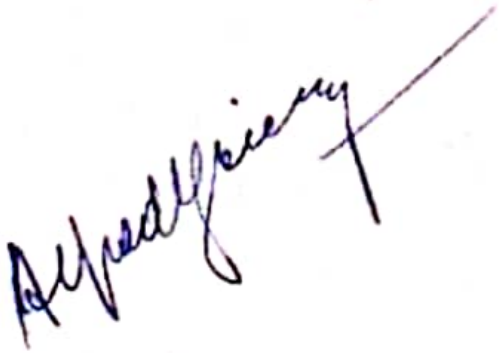
Dr. IOAN I. PLĂCINȚEANU
PROFESOR UNIVERSITAR

VECTORI
POTENȚIALI
TENSORI



TIPOGRAFIA ATH. D. GHEORGHIU — IAȘI, STR. ȘTEFAN CEL MARE Nr. 6

Scanned with OKEN Scanner

VECTORI
POTENȚIALI
TENSORI

TIPOGRAFIA ATH. D. GHEORGHIU — IAȘI, STR. ȘTEFAN CEL MARE Nr. 6

Scanned with OKEN Scanner

CALCULUL VECTORIAL

VECTORI IN SPAŢIILE EUCLIDIENE

CAP. I

Mărimi. Numere. Spaţiu euclidian. Vectori.

1. Conceptul de „mărime". Matematica este ştiinţa care stabileşte reguli de calcul şi relaţii între *mărimi,* pornind de la un anumit sistem de propoziţii fundamentale (axiome).

După H. GRASSMANN [1]) vom numi „mărime" de o *specie* dată, o mulţime de obiecte (entităţi fizice extrase din observaţia naturii, sau construcţii abstracte ale spiritului omenesc), pentru care sunt definite: relaţii de egalitate (=); relaţii de ordonare ($>$, $<$); şi o operaţie de compunere (adunare), satisfăcând axiomelor fundamentale pe care le enunţăm mai jos. Exemple: noţiunile de segment liniar, de unghi, poligon etc.; noţiunea de număr; noţiunile de masă, temperatură etc., definesc, fiecare în parte, mărimi de o anumită specie, distinctă.

Conceptul de *egalitate (echivalenţă)* este definit prin proprietatea: două mărimi de aceiaşi specie sunt egale (echivalente) când orice propoziţie matematică privind pe una din ele este valabilă şi pentru cealaltă. In caz contrar, cele două mărimi sunt neegale.

---

1). H. GRASSMANN. *Werke*, v. II, 2. Teubner, Leipzig, 1904, p. 298.
D. GIGLI, *Enciclopedia delle Matematiche elementari*, v. I, l, Hoepli, Milano, 1936, p. 127.

Scanned with OKEN Scanner

Conceptul de *ordonare* este definit prin propoziţia: dacă două mărimi sunt neegale, atunci una este ori *superioară* ($>$), ori inferioară ($<$) celeilalte.[1])

Operaţia de *compunere (adunare)* a mărimilor de aceiaşi specie se exprimă prin propoziţia: două mărimi dintr'o specie determinată se pot compune într'o mărime *rezultantă* din aceiaşi specie.

In scris, vom exprima mărimile unei specii date prin simbolii $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ In cele ce urmează, vom expune propoziţiile fundamentale privind mărimile unei specii determinate.

Propoziţii fundamentale (axiome) asupra mărimilor unei specii date.

I. Există mărimi $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$

II. Dacă $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$ sunt două mărimi, atunci, ori $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, ori $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, ori $\mathbf{A} < \mathbf{B}$; realizarea unui caz exclude pe celelalte.

III. Orice mărime este egală cu ea însăşi: $\mathbf{A} = \mathbf{A}$. (Egalitatea e *reflexivă*).

IV. Din $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ decurge $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. (Egalitatea e *simetrică*).

V. Dacă $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ şi $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, rezultă $\mathbf{A} = \mathbf{C}$. (Egalitatea e *tranzitivă*).

VI. Dacă $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, atunci $\mathbf{B} < \mathbf{A}$.

VII. Două mărimi $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$ determină univoc o *mărime rezultantă* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, obţinută prin adunarea lui $\mathbf{B}$ la $\mathbf{A}$; se scrie $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Operaţia este repetabilă de un număr finit de ori.

VIII. Dacă $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ şi $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$, rezultantele sunt egale: $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}')$.

IX. $((\mathbf{A}, \mathbf{B}), \mathbf{C}) = (\mathbf{A}, (\mathbf{C}, \mathbf{B}))$; *(asociativitate)*.

X. $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A})$; *(comutativitate)*.

XI. Dacă $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$, atunci $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ sau $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

XII. Dacă $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ şi în acelaş timp $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, mărimea $\mathbf{C}$ se zice *nulă* şi se scrie $\mathbf{C} = 0$. Există mărimi nule. Două mărimi nule sunt echivalente.

XIII. Dacă $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, atunci $\mathbf{A}$ este echivalentă cu rezultanta lui $\mathbf{B}$ şi a unei mărimi $\mathbf{C}$ nenule; $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$, $\mathbf{C} \neq 0$.

---

1) Noţiunile de „superior sau inferior" trebuesc înţelese într'un sens mai extins: „anterior sau posterior"; „mai sus ori mai jos"; „înainte sau după"; aşadar, nu numai în înţelesul cantitativ, ci ca raport de succesiune, de poziţie şi, în general, de ordonare relativă.

Scanned with OKEN Scanner

XIV. Dacă $(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{B}$ atunci $\mathbf{C} = 0$.

Din grupul axiomelor precedente rezultă proprietăţile:

1. Dacă $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, există o mărime $\mathbf{C}$ (nenulă) astfel încât $\mathbf{A} = (\mathbf{C}, \mathbf{B})$; mărimea $\mathbf{C}$ se numeşte *diferenţa* dintre $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$: $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Mărimea $-\mathbf{A}$ se numeşte *inversa* lui $\mathbf{A}$.

2. Dacă $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ şi $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$, diferenţa $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A}' - \mathbf{B}'$.

Clase finite de mărimi: există mărimi $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots$ de specie dată, care formează o *clasă*, astfel încât există mărimi ale speciei care sunt superioare unui element al clasei.

Clasă nefinită: există totdeauna o mărime aparţinând clasei, care este superioară oricărui din elementele clasei.

Multiplii unei mărimi. Definiţie: $\mathbf{A}$ fiind o mărime şi m un număr natural diferit de zero, mărimea multiplă $m\,\mathbf{A}$ este echivalentă cu $\mathbf{A}$ pentru $m = 1$ şi este rezultanta a m mărimi echivalente cu $\mathbf{A}$, când $m > 1$.

Se demonstrează uşor proprietăţile:

1. Din $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ rezultă $m\,\mathbf{A} = m\,\mathbf{B}$.

2. m şi n fiind două numere diferite de zero, avem $n\,(m\,\mathbf{A}) = (m\,n)\,\mathbf{A}$.

3. Rezultanta mărimilor $m\,\mathbf{A}$ şi $n\,\mathbf{A}$ este $(m+n)\,\mathbf{A}$.

4. Dacă $m > n$, atunci $m\,\mathbf{A} > n\,\mathbf{A}$. Diferenţa acestor mărimi este $m\,\mathbf{A} - n\,\mathbf{A} = (m-n)\,\mathbf{A}$.

Divizibilitatea unei mărimi. Presupunem că avem o specie dată de mărimi.

1. Dacă $\mathbf{A} = m\,\mathbf{B}$, atunci $\mathbf{B}$ este a m-a parte aliotă din $\mathbf{A}$, sau, un submultiplu a lui $\mathbf{A}$ şi se notează prin $\frac{\mathbf{A}}{m}$.

2. Orice mărime $\mathbf{A}$ este divizibilă in părţi alicote (axiomă).

3. Dacă $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, atunci $\frac{\mathbf{A}}{m} = \frac{\mathbf{B}}{m}$.

4. Avem $$\frac{\frac{\mathbf{A}}{m}}{n} = \frac{\mathbf{A}}{mn}.$$

Mărimi comensurabile şi incomensurabile.

1. O mărime care este un multiplu a unui submultiplu de $\mathbf{A}$ este comensurabilă cu $\mathbf{A}$; deci, dacă $\mathbf{A}$ este com. $\mathbf{B}$

Scanned with OKEN Scanner

atunci $\mathbf{A} = m\frac{\mathbf{B}}{n}$; rezultă **B** este com. **A** şi anume, $\mathbf{B} = n\frac{\mathbf{A}}{m}$.

2. $$m\frac{\mathbf{A}}{n} = \frac{m\mathbf{A}}{n}.$$

3. $$p\frac{m\frac{\mathbf{A}}{n}}{q} = mp\frac{\mathbf{A}}{nq}.$$

4. Rezultanta a două mărimi comensurabile cu **A** este comensurabilă cu **A**; anume $\left(\frac{p}{q}\mathbf{A}, \frac{r}{s}\mathbf{A}\right) = (ps+rq)\frac{\mathbf{A}}{qs}$.

5. Diferența dintre două mărimi neechivalente între ele, dar comensurabile cu **A**, anume $p\frac{\mathbf{A}}{q}$ şi $r\frac{\mathbf{A}}{s}$, este echivalentă cu $(ps-rq)\frac{\mathbf{A}}{qs}$ dacă $ps - rq > 0$.

6. Presupunem că există mărimi *incomensurabile* cu o mărime dată **A** (deci, nemultiple de nici un submultiplu de **A**).

Dacă **A** este incomensurabilă cu **B**, orice mărime comensurabilă cu **A** este incomensurabilă cu **B**. Există mărimi incomensurabile cu **A** şi **B**.

Axioma lui Archimede. **A** şi **B** fiind două mărimi oarecare din aceiaşi specie, există multiple sau submultiple ale unei mărimi, care să fie mărimi superioare, respectiv, inferioare celeilalte mărimi.

Definiție. Două clase de mărimi din aceiaşi specie $\mathbf{C}_1$ şi $\mathbf{C}_2$ se numesc *contingente* dacă satisfac condițiilor: 1. fiecare mărime aparținând uneia din clase, $\mathbf{C}_1$, este inferioară oricărei mărimi din cealaltă clasă; 2. $\mathbf{A}_1$ fiind o mărime din clasa $\mathbf{C}_1$, există o mărime $\mathbf{A}_2$ din clasa $\mathbf{C}_2$, astfel încât diferența $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ să fie inferioară oricărei mărimi date.

Definiție. O mărime **L** se numeşte *margine superioară* (respectiv, *inferioară*) a unei clase **C** de mărimi de aceiaşi specie, dacă: 1. nu există nici o mărime din clasa **C** care să fie superioară (resp. inferioară) lui **L** şi 2. **L'** fiind o mărime mai mică (resp. mai mare) ca **L**, există cel puțin o mărime din clasa **C** care să fie superioară (resp. inferioară) lui **L'**. Dacă **L**

Scanned with OKEN Scanner

aparţine clasei **C**, ea constitue elementul maxim (resp. minim) al clasei.

Din axioma lui ARCHIMEDE decurg următoarele consecinţe:

1. Dacă **A** este o mărime, există mărimi comensurabile cu **A** cuprinse între două mărimi oarecare, date.

2. Dacă toate mărimile comensurabile cu A sunt repartizate în două clase $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$, astfel încât fiecare mărime din $\mathbf{C_1}$ să fie inferioară oricărei mărimi din $\mathbf{C_2}$, atunci cele două clase sunt contingente.

Individualizarea unei mărimi, în raport cu altă mărime, prin clase contingente. Fie **B** o mărime oarecare de aceiaşi specie cu mărimea **A**. Să împărţim mărimile $m\frac{A}{n}$ (comensurabile cu **A**) în clasele: $\mathbf{C_1}$ formată din mărimile nesuperioare (inferioare sau echivalente) lui **B**, şi $\mathbf{C_2}$ formată din mărimile superioare lui **B**. In aceste condiţii, mărimea **B** separă cele două clase contingente $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$, fiind margine superioară pentru $\mathbf{C_1}$ şi margine inferioară pentru $\mathbf{C_2}$. Prin aceasta, mărimea **B** se găseşte *individualizată*, în raport cu **A**.

Noţiunea de continuitate. O specie de mărimi constitue un continuum, dacă este satisfăcut unul din următoarele axiome echivalente:

1. Dacă toate mărimile speciei sunt repartizate în două clase $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$, astfel încât orice mărime aparţinând lui $\mathbf{C_1}$ să fie inferioară fiecărei mărimi ce aparţine lui $\mathbf{C_2}$, există un element maxim al clasei $\mathbf{C_1}$, ori un element minim al clasei $\mathbf{C_2}$.

2. Dacă două clase de mărimi din aceiaşi specie sunt contingente, există o mărime care le separă.

3. Fiind dată o clasă a speciei, **C**, dacă există o mărime superioară (inferioară) tuturor mărimilor din **C**, există o mărime **L** şi numai una singură, care este margine superioară (inferioară) a clasei **C**.

Proporţionalitatea mărimilor. A spune că o pereche de mărimi **A**, **B** de o specie **S**, este proporţională cu perechea de mărimi **A′**, **B′** de specia **S′**, înseamnă a spune că cele două clase $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$, care individualizează pe **B** în raport cu **A**, corespund respectiv claselor $\mathbf{C'_1}$ şi $\mathbf{C'_2}$, care individualizează pe **B′** în raport cu **A′**, astfel încât:

1. Mărimii $m\,\mathbf{A}$ din clasa **C** îi corespunde mărimea $m\,\mathbf{A}'$ din clasa **C'**, oricare ar fi numărul natural m.

2. Mărimii $m\frac{\mathbf{A}}{n}$ din **C** îi corespunde mărimea $m\frac{\mathbf{A}'}{n}$ din **C'**, oricare ar fi numerile naturale m şi n.

2. Conceptul de număr real. Fie o specie dată **S** şi o mărime nenulă **U** din specie. Fie $\mathbf{C}_1$ clasa mărimilor multiple de **U**, şi **C** clasa mărimilor comensurabile cu **U**. Fie **A** o mărime oarecare din specia **S**. Ne propunem să comparăm mărimea **A** cu mărimea **U**, făcând abstracţie de specie, de raporturile de poziţie, de spaţiu şi timp, — în general, de toate caracterele intrinsece care definesc specia comună. In aceste condiţii, rămâne un caracter inerent care stabileşte ordonarea relativă a mărimilor **A** şi **U** în specie, anume, *raportul* dintre **A** şi **U**, reprezentat printr'un *număr real,* absolut.[1])

Acest număr este nul dacă **A** este nulă, şi nenul, dacă **A** este nenulă; numărul este *întreg* (m), dacă $\mathbf{A} = m\,\mathbf{U}$ aparţine clasei $\mathbf{C}_1$ (a multiplelor lui **U**); numărul este *raţional* ($\frac{m}{n}$), dacă $\mathbf{A} = m\frac{\mathbf{U}}{n}$ aparţine clasei **C** (a mărimilor comensurabile cu **U**) şi *iraţional,* dacă **A** nu aparţine clasei **C**, aşadar, dacă este incomensurabilă cu **U**.

Dacă **A** este echivalentă cu **U**, raportul dintre **A** şi **U** defineşte numărul real absolut: *unu.* Mărimea **U** se numeşte *mărime fundamentală (unitate de măsură).*

Dacă facem abstracţie de axiomul continuităţii, se poate să existe o mărime $\mathbf{U}_0$ a speciei, astfel în cât **U** să se deducă din $\mathbf{U}_0$ precum se deduce **A** din **U**, dar nu şi invers; mărimea $\mathbf{U}_0$ se numeşte *unitate primordială* (ireductibilă).

Dacă există o singură mărime fundamentală, specia este formată din *mărimi simple.* Dacă există un număr de n mărimi fundamentale distincte (nedeductibile din aceiaşi unitate primordială), specia este alcătuită din *mărimi compuse.*

Mulţimea tuturor mărimilor fundamentale (distincte) alcătueşte *sistemul fundamental* (de măsură) al speciei. Sistemul

1) Se obicinueşte să se spună că numărul absolut este un număr *pozitiv*; este mai corect să se spună că numărul natural este *lipsit de semn* (v. WHITTAKER, Modern Analysis, p. 3).

Scanned with OKEN Scanner

este de *ordinul întâi*, dacă este deductibil dintr'o singură unitate primordială. In caz contrar este de ordin superior.

Numărul *unu* (unitatea numerilor reale) se numeşte *unitate absolută*. Celelalte unităţi sunt relative.

Mulţimea mărimilor compuse, care se deduc din acelaş sistem fundamental (neabsolut) alcătueşte o specie de *rangul* unu (formată din mărimi de rangul unu).

Mărimile care se deduc din unitatea absolută (numărul unu) se numesc *mărimi numerice*.

Consideraţiile desvoltate în paragrafele precedente se referă la mărimi care alcătuesc o specie de rangul unu.

Mărimile numerice alcătuesc o specie simplă de rangul unu şi de ordinul întâi, şi satisfac tuturor propoziţiilor enunţate în cele ce preced. Axiomele din teoria numerilor [1]) se pot reduce la următoarele.

Dacă a, b, c... sunt numere reale, enunţăm :

I. Există un număr, 0 (zero) astfel că oricare ar fi a, avem $a+0=a$

Fiind dat a, există un număr, $-a$, astfel că $a+(-a)=0$.

II. Adunarea este comutativă : $a+b=b+a$;

„ „ asociativă : $(a+b)+c=a+(b+c)$;

III. Inmulţirea este comutativă : $a\,b=b\,a$;

„ „ asociativă : $(a\,b)\,c=a\,(b\,c)$;

„ „ distributivă : $a\,(b+c)=a\,b+a\,c$;

IV. Fiind dat $a\neq 0$, există un număr, $\frac{1}{a}$, astfel că $a\frac{1}{a}=1$.

Există un număr, 1, astfel că, oricare ar fi $a\neq 0$, $a.1=a$.

3. Mărimi extensive. Noţiunea de mărime de rang unu permite o formulare pe care o redăm, după H. GRASSMANN, [2]) precum urmează.

---

1) „Teoria numerilor" se ocupă cu stabilirea proprietăţilor numerilor, ce decurg din conceptul de număr şi din structura logică a axiomelor, aşa cum a fost desvoltată de G. PEANO în teoria sa operatorie ; R. DEDEKIND în teoria secţionară ; G. CANTOR în teoria şirurilor ; H. GRASSMANN în teoria mărimilor, K. WEIERSTRASS, şi alţii.

2) H. GRASSMANN, „*Ausdehnungslehre*" Werke, I, 2 B, Teubner, Leipzig, 1896.

A. LOTZE, *Enziklopädie der mathematischen Wissenschaften* III, 2, p. 1425.

Fie un sistem de n (nu mai puţine) mărimi independente (între care nu există relaţii numerice liniare), $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$, din aceiaşi specie, formând un sistem fundamental cu n *elemente*, în număr finit.

Numim *mărime extensivă*, orice mărime care se poate exprima în forma

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \,, \tag{1}$$

unde a_i sunt numere reale, numite *componentele* mărimii $\mathbf{A}$ prin raport la sistemul fundamental ales $\mathbf{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Mărimile extensive, definite prin relaţia (1), satisfac axiomelor de la § 1 cu excepţia celor relative la ordonare. Această proprietate rezultă din definiţia mărimii $\mathbf{0} = \Sigma\, 0 \,.\, \mathbf{u}_i$ şi din definiţia următoare:

1. *Suma* de mărimi extensive din aceiaşi specie

$$\mathbf{A} = \Sigma\, a_i \mathbf{u}_i \quad ; \quad \mathbf{B} = \Sigma\, b_i \mathbf{u}_i \; ; \ldots \tag{2}$$

este o mărime extensivă

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \ldots = \Sigma\, (a_i + b_i + \ldots)\, \mathbf{u}_i \,. \tag{3}$$

Din proprietăţile asupra mărimilor şi numerilor, rezultă că adunarea este asociativă şi comutativă.

2. *Multiplicarea* unei mărimi printr'un număr, se defineşte prin egalitatea

$$m\,\mathbf{A} = \Sigma\, (m\, a_i)\, \mathbf{u}_i \,; \tag{4}$$

în special,

$$(-1)\,\mathbf{A} = -\mathbf{A} = \Sigma\, (-a_i)\, \mathbf{u}_i \,, \tag{4'}$$

relaţie, care reduce operaţia scăderii la operaţia adunării.

3. Mai multe (n) mărimi extensive $\mathbf{A}_k$ sunt *liniar independente*, dacă *nu* există între ele o relaţie de forma

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{A}_k = 0 \,, \tag{5}$$

unde α_k sunt numere. In caz contrar cele n mărimi extensive sunt *liniar dependente*.

4. Fiind date n mărimi extensive $\mathbf{A}_i$ liniar independente, este posibil să se exprime mărimile extensive în forma

$$\mathbf{X} = \Sigma\, x_i \mathbf{A}_i \,, \tag{6}$$

x_i fiind numere.

Scanned with OKEN Scanner

Produse de mărimi extensive. Numim produs a două mărimi extensive din aceiaşi specie sau din *specii diferite* $\mathbf{S}(\mathbf{u}_i)$ şi $\mathbf{S}(\mathbf{v}_i)$

$$\mathbf{A} = \Sigma a_i \mathbf{u}_i \quad ; \quad \mathbf{B} = \Sigma b_j \mathbf{v}_j ,$$

expresia

$$(7) \qquad (\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \Sigma a_i b_j (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j) .$$

Produsul a două mărimi extensive de specii diferite sau chiar de aceiaşi specie defineşte, aşadar, o mărime extensivă de o *nouă specie*, pentru care sistemul fundamental este dat de produsele mărimilor fundamentale ale speciilor iniţiale, iar componentele nouilor mărimi se obţin prin înmulţirea numerică a componentelor iniţiale.

Inmulţirea unui produs cu un număr este asociativă. In adevăr,

$$(8) \qquad (\alpha\,\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{A}\,(\alpha\,\mathbf{B}) = \alpha\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) .$$

Produsul este distributiv. In adevăr,

$$(9) \qquad \Sigma \alpha_i \mathbf{A}_i \,.\, \Sigma \beta_j \mathbf{B}_j = \Sigma \alpha_i \beta_j a_k b_s (\mathbf{u}_k \mathbf{v}_s) =$$
$$= \sum_{ij} \alpha_i \beta_j (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_j) = \sum_{ijks} x \mathbf{U}_{ks} = \mathbf{X} .$$

In mod analog, produsul lui $\mathbf{X}$ prin o nouă mărime extensivă ne va da, prin acelaş procedeu (9), iarăşi o nouă mărime extensivă.

Produse de mai mulţi factori. Repetând procedeul definit prin relaţia (9) pentru produse de mai multe mărimi extensive, în număr finit, constatăm că aceste produse sunt distributive.

De asemeni, înmulţirea unui produs de mai mulţi factori cu un număr este asociativă.

Diferite categorii de produse de mai multi factori. Fie un număr finit de mărimi extensive din aceiaşi specie. Să formăm produsul lor. Avem, după regula precedentă,

$$(10) \qquad \mathbf{P} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C} \ldots = a_i b_j c_k \ldots \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k \ldots .$$

Să punem în evidenţă ordinea a doi factori în produsul mărimilor fundamentale $\mathbf{u}_i$, prin notaţia

$$\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k \ldots = \mathbf{U}_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_s \mathbf{U}_s' ,$$

unde am însemnat prin $\mathbf{U}_k$ şi $\mathbf{U}_s'$ produsele factorilor care preced pe $\mathbf{u}_k$ şi care succed lui $\mathbf{u}_s$.

Scanned with OKEN Scanner

Permutând cei doi factori corespunzători lui u_k şi u_s din **P**, se obţine o nouă mărime fundamentală $U_k\, u_s\, u_k\, U_s'$.

Amintim pe scurt, fără a intra în desvoltarea tuturor consecinţelor şi proprietăţilor, că se pot prezenta două categorii însemnate de produse:

1. *Produsul comutativ,*

(12) $$U_k\, u_k\, u_s\, U_s' = U_k\, u_s\, u_k\, U_s' \;;\; \text{deci}\; u_k\, u_s = u_s\, u_k\,,$$

pentru toţi factorii. Aşadar, $\mathbf{A\,B = B\,A}$.

2. *Produsul anticomutativ,*

(13) $$U_k\, u_k\, u_s\, U_s' + U_k\, u_s\, u_k\, U_s' = 0 \;;\; \text{deci,}\; u_k\, u_s = -\, u_s\, u_k,$$

şi în particular $u_k\, u_k = 0$; aşadar, $\mathbf{A\,B = -\,B\,A}$.

Se demonstrează, fără dificultate că aceste produse sunt asociative.

4. Punctul de vedere al expunerii de faţă. In expunerea pe care ne-am propus s'o prezentăm în lucrarea de faţă, nu intenţionăm să desvoltăm o teorie a vectorilor sub forma abstractă, în concepţia analitico-algebrică, aşa cum a preconizat-o GRASSMANN şi nici o construcţie pur axiomatică.

Noi urmărim să prezentăm o formulare a concepţiei mărimilor vectoriale ca reprezentante figurative în spaţiile geometrice ale mărimilor cu care operează Fizica (inclusiv Mecanica), şi prin urmare, alcătuirea unui *algoritm*, necesar şi comod, de calcul.

Fizica urmăreşte să formuleze legile naturii (pentru fenomenele care intră în cadrul de cercetări al acestei ştiinţe), prin relaţii între mărimi *efectiv măsurabile.*

Un sistem fizic, determinat, este totalitatea elementelor fizice a căror constituţie poate să fie precizată.

In Fizică, conceptualizarea noţiunii de mărime (entitate percepută prin experienţa individuală) se efectuiază prin „reprezentarea" acestei entităţi (WEYL), reprezentare, posibilă numai prin executarea unei măsurători efective.

In Fizica clasică, toate mărimile fizice pot fi *simultan* măsurabile cu o precizie cât de mare; bineînţeles, în limitele permise de instrumentele de măsură (care sunt nişte construcţii macroscopice).

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile fizice astfel concepute, se încadrează în noţiunea de „mărime“ admisă în expunerea de faţă şi răspund proprietăţilor enunţate în paragrafele precedente.

In Mecanica quantică, fenomenele studiate îşi au sediul în regiunile intraatomare (microscopice); în timp ce măsurile se efectuiază tot cu ajutorul aparatelor macroscopice. Această împrejurare a condus la necesitatea creerii unui sistem teoretic, care operează cu mărimi abstracte (fără reprezentant fizic). Acest paradox a putut să fie înlăturat de W. Heisenberg prin introducerea unui principiu mai general: orice sistem fizico-teoretic trebue să opereze numai cu mărimi *principial observabile*, şi să înlăture posibilitatea măsurii simultane a mărimilor fizice (Principiul de „nedeterminare“ al lui Heisenberg).[1])

J. Destouches preconizează o noţiune de mărime fizică, prin conceptualizarea rezultatului unei măsuri, pentru tot domeniul Fizicii (clasice şi quantice). Fiind obligat să facă distincţie între mărimi *compatibile* (măsurabile simultan) şi *incompatibile*, mărimile fizice — în sensul lui Destouches — nu satisfac complet axiomelor fundamentale enunţate în § 1.

Noi ne mărginim, în expunerea de faţă, la domeniul Fizicii clasice.

Am văzut că, dacă alegem la voe o mărime fundamentală **U** (nenulă), astfel încât toate mărimile **A** ale speciei să poată fi extensive, prin raport cu **U**, se defineşte măsura lui **A** faţă de unitatea de măsură **U**, cu ajutorul unui număr absolut. Reciproc, fiind dată măsura şi unitatea de măsură, mărimea este bine determinată. [2])

Fiziceşte, o „măsură“ este rezultatul unei operaţii efectuate cu aparate fizice. Acestui rezultat i se atribue o reprezentare matematică definită prin mărimi.

O mărime fizică fiind, în general, o mărime de specie superioară, ea se va exprima analitic sub forma

$$M = \Sigma\, x_i\, y_j\, z_k \ldots \mathbf{u}_i\, \mathbf{v}_j\, \mathbf{w}_k \ldots ,$$

unde $x, y, z, \ldots$ sunt numere reale, iar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ sunt mărimi fundamentale din aceiaşi specie sau specii diferite.

---

1) Vezi articolul nostru din „Revista Fundaţiilor ... 1, II, 1936, p. 396.

2) Pentru o teorie sistematică a „măsurii“ vezi: D. Gigli, *Teoria della misura*, în „Enciclopedia delle matematiche“, v. II, p. 123, 1937.

Fizica foloseşte, după natura problemei ce are de rezolvat, diferite *sisteme de unităţi* (teoretice, practice, electromagnetice, electrostatice, etc.) reductibile la un sistem primordial. Pentru teorie, este mai comod să se lase nespecificat sistemul de unităţi, notându-le prin *dimensiuni:* lungime $[l]$, massă $[m]$, timp $[t]$. Este totuşi util să amintim că un sistem de unităţi utilizat chiar în desvoltările teoretice este *sistemul absolut:* centimetrul, gramul, secunda (c. g. s.) (v. Mecanica).

O lege fizică trebue să fie invariantă faţă de transformarea admisă a sistemului de unităţi: o substituţie liniară. Prin urmare, legea fizică

$$f(x, y, z, \ldots) = 0 \tag{13}$$

exprimată în sistemul $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$, trebue să prezinte forma

$$f(x', y', z', \ldots) = 0 \tag{14}$$

în sistemul $\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}', \ldots$, legat de primul printr'o substituţie liniară.

O lege fizică trebue să fie „omogenă", prin raport cu dimensiunile fundamentale $[l, m, t]$: dacă relaţia ce o exprimă este algebrică întreagă, toţi termenii ce apar în expresia legii fizice trebue să poseadă aceiaşi dimensiune, relativ la fiecare mărime fundamentală $[l, m, t]$.

Exemplu: legea căderii corpurilor în vid, într'un loc de pe suprafaţa pământului unde acceleraţia greutăţii are valoarea g (dimensiunea $[l\,t^{-2}]$) este

$$s = \frac{1}{2} g\, t^2, \tag{15}$$

dând spaţiul parcurs de mobil în timpul t. Prin substituţia $[l, m, t] \longrightarrow [\lambda l, \mu m, \nu t]$, legea de mai sus devine

$$\lambda s = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\nu^2} g\, \nu^2 t^2,$$

care se reduce, prin simplificări evidente, la (15).

Recunoaşterea omogeneităţii dimensionale a unei legi fizice permite un control a însăşi corectitudinii unei legi fizice exprimată printr'o formulă matematică; ba mai mult, metoda constitue un instrument, uneori util chiar pentru stabilirea de legi fizice noui, ceeace s'a întâmplat efectiv în cercetările de Fizică.

Scanned with OKEN Scanner

5. Mărimi scalare sunt mărimile simple sau compuse de rangul unu a căror măsură se poate exprima printr'un *singur număr concret* (dimensional) numit *scalar.*

Fiind date unităţile de măsură, mărimile scalare sunt complet determinate prin acest număr real, a cărui valoare depinde numai de unităţile de măsură considerate: *de scară.* Rezultă că operaţiile cu scalari satisfac axiomelor operaţiilor numerice (§ 2).

Exemple de mărimi scalare fizice, simple, răpunzând acestei definiţii sunt: temperatura, massa, timpul (ele admit un sistem de unităţi de ordinul întâi, nereductibil). Exemple de mărimi fizice scalare compuse sunt: volumul, cantitatea de căldură, de electricitate, energia, potenţialul, lucrul mecanic etc. (ele admit un sistem de unităţi de ordinul trei, fiind reductibil la sistemul $[l, m, t]$).

Există însă şi mărimi fizice extensive, a căror determinare nu poate să fie exprimată printr'un singur număr. Exemple: viteza, acceleraţia, forţa, etc., pentru determinarea cărora sunt necesare mai multe date; mărimi şi mai complicate sunt: tensiunile, forţele superficiale, etc., în corpurile deformabile.

Fizica fiind o ştiinţă care se referă la fenomenele naturale cu sediul în spaţiul înconjurător, (mărginindu-ne numai la fenomenele macroscopice, distincte de cele înglobate în Fizica quantică), tratarea teoretică a acestor fenomene necesită o reprezentare spaţială a mărimilor fizice. Spaţiul fizic (pentru numitele fenomene) este *spaţiul euclidian* cu *trei dimensiuni* (excluzând Relativitatea). Cum însă multe imagini fizice necesită o reprezentare într'un spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni (exemple: mişcările moleculelor unui gaz, vibraţiile acustice şi luminoase, etc.), vom căuta să definim, în această primă parte a expunerii de faţă, noţiunea de spaţiu euclidian cu un număr oarecare de dimensiuni, lăsând pentru mai târziu introducerea spaţiilor riemanniene, necesare în relativitatea generalizată.

6. Caracterele spaţiului euclidian şi conceptelor fundamentale. [1]) Considerăm spaţiul drept „formă a realităţilor corporale" (Weyl). Aceste *realităţi*, prin însăşi definiţia lor, nu-şi pot modifica natura după poziţia pe care o ocupă „corpul" în

1) v. H. Weyl, *Raum. Zeit. Materie.*

spaţiu. Prin aceasta, spaţiul realităţilor fizice este *omogen* şi *isotrop*.

Presupunem că putem distinge, cu o precizie arbitrară, un punct în spaţiu. Condiţia omogeneităţii spaţiale implică conceptul de *egalitate*: dacă un „obiect" oarecare ce ocupă o regiune S din spaţiu, poate să ocupe, *rămânând identic cu el însuşi*, o altă regiune S' din acelaş spaţiu, spunem că cele două regiuni sunt *egale* sau *congruente*. Un obiect se zice că „rămâne identic cu el însuşi" dacă, oricum l'am deplasa, fără a-i modifica starea internă şi aspectul, poate să fie readus, prin manipulări adecvate, în regiunea iniţială S, astfel încât să-şi reia întocmai poziţia primordială, cu condiţia, ca să se păstreze neschimbată poziţia relativă a manipulantului faţă de corp. [1] Materializarea acestei noţiuni se face cu ajutorul conceptului de *corp rigid*, în sensul Fizicii nerelativistice. [2]

Reprezentarea spaţiului cu ajutorul noţiunii de corp rigid, trebue să fie *univocă* şi *continuă*; în consecinţă, pentru spaţiul reprezentărilor fizice trebue să admitem axioma continuităţii: spaţiul este un *continuum*.

Fiind date două regiuni congruente S şi S', deplasarea unui corp, care ocupă S, în poziţia S' face să corespundă fiecărui punct din S un punct *omolog* în S' şi invers. Legea de transformare a punctelor omoloage este o *transformare punctuală* biunivocă, care efectuiază o „reprezentare congruentă" a regiunii S pe S'.

Această operaţie permite definirea conceptului de *linie dreaptă*: există reprezentări congruente care păstrează cel puţin *două* puncte A şi B; locul punctelor păstrate de aceste reprezentări este, prin definiţie, o *linie dreaptă* D determinată de cele două puncte A şi B. Prin aceste reprezentări, orice punct al dreptei D este propriul său omolog (rămâne *fix*).

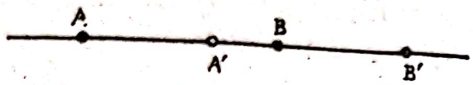
O reprezentare congruentă are păstrează fixe toate punctele unei drepte D este o *rotaţie* în jurul dreptei D, ca *axă*.

1) Pentru lămurirea acestei noţiuni, v. H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, cap. IV, p. 77 şi H. REICHENBACH, *Handbuch der Physik*, v. IV, p. 50.

2) După unii autori, corpul rigid nu poate să fie definit: această definiţie ar fi implicată în însuşi conceptul geometriei euclidiane. v. H. DINGLER, *Phys. ZS.* v. 23 p. 52' 1922; H. REICHENBACH, *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre*, (Vieweg), 1924.

Linia dreaptă determină un continuum liniar, omogen. Un punct O aşezat pe dreapta D o desparte în două *semidrepte* opuse D_1 şi D_2, aşezate deoparte şi cealaltă a lui O, punct, care se numeşte *origina* semidreptelor respective şi care permite fixarea poziţiei relative a celor două semidrepte.

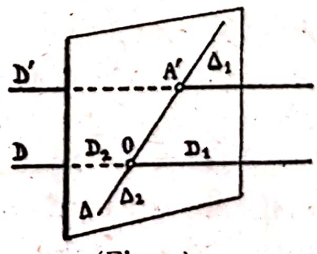
Există reprezentări congruente care păstrează o dreaptă D fără a lăsa fixe punctele acestei drepte. Le vom numi *alunecări* (dealungul dreptei). Printr'o alunecare, punctului A îi va corespunde punctul A' aşezat tot pe D, iar unui punct B îi va corespunde un punct B' al dreptei (fig. 1). Poziţia relativă a punctului B' faţă de B va fi aceiaşi ca şi poziţia relativă a punctului A' faţă de A. Vom avea $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Toate punctele lui D aşezate între A' şi B' sunt omoloage punctelor lui D aşezate între A şi B. Prin alunecare, cele două semidrepte definite de punctul A (respectiv B) pe dreapta D îşi păstrează aşezarea lor relativă: semidreapta din stânga lui A (res. B) este omoloagă semidreptei din stânga lui A' (resp. B'); semidreapta din dreapta lui A (resp. B) este omoloaga semidreptei din dreapta lui A' (resp. B').



(Fig. 1)

Două semidrepte, posedând aceiaşi origină, alcătuesc un *unghi* având ca laturi cele două semidrepte. Schimbarea laturilor între ele nu schimbă unghiul. Prin înlocuirea unei laturi cu semidreapta opusă se obţine unghiul suplimentar. Unghiul drept este un unghi congruent cu suplimentul său. Două drepte care formează un unghi drept sunt *perpendiculare* între ele.

Să considerăm (fig. 2) o dreaptă Δ perpendiculară pe D în punctul O. Acest punct deosebeşte pe Δ cele două semidrepte opuse Δ_1 şi Δ_2. O alunecare dealungul lui Δ lasă invariantă poziţia relativă a semidreptelor Δ_1 şi Δ_2. O rotaţie având dreapta D ca axă produce schimbarea celor două semidrepte Δ_1 şi Δ_2 între ele.



(Fig. 2)

Toate dreptele perpendiculare în O pe dreapta D alcătuesc un *plan* P. Intervertirea semidreptelor D_1 şi D_2, determinate de O pe D, printr'o rotaţie în jurul dreptei Δ ca axă, aduce punctele planului P peste ele însile.

Planul este un continuu bidimensional, omogen.

Orice dreaptă D' dusă printr'un punct A' al planului P, astfel încât toate semidreptele planului P (deci, planul însuşi) să fie perpendiculare pe D', este paralelă cu dreapta D.

Prin orice punct din spaţiu se poate duce o dreaptă, şi numai una singură, paralelă cu o dreaptă dată. (Postulatul lui Euclid).

Dreptele D' formează o familie de drepte paralele, care umple tot spaţiul. Planele perpendiculare pe această familie de drepte paralele sunt plane paralele; ele formează o familie de plane paralele între ele şi umplu tot spaţiul.

Există reprezentări congruente, care transformă dreptele unei familii de drepte paralele în ele însile. Le vom numi *translaţii.*

Mai mult, o translaţie este o reprezentare congruentă care transformă *orice* dreaptă din spaţiu într'o dreaptă paralelă cu prima.

Există totdeauna o translaţie, şi numai una singură, care face să se corespundă două puncte A şi A' (distincte). Această translaţie face să corespundă unei drepte D, care conţine pe A, o dreaptă paralelă D', care conţine pe A'.

Fie T_1 o astfel de translaţie. Fie T_2 o translaţie care face să se corespundă punctul A' cu un punct A'' (aşezat pe o dreaptă D'' paralelă cu D', deci şi cu D). Există o translaţie rezultantă $T=(T_1, T_2)$ care face să se corespundă punctele A şi A''. Atunci, T face parte din translaţiile care transformă dreptele paralele ale familiei (D, D', D'') în ele însile. Ordinarea acestor operaţii este indiferentă, prin însăşi definiţia lor. Aşadar, $(T_1, T_2)=(T_2, T_1)$; compunerea translaţiilor este comutativă; translaţiile sunt permutabile între ele *(regula paralelogramului).*

Numai o translaţie *identică* face ca punctul A să se corespundă lui însuşi.

Dacă se specifică o ordine de succesiune în corespondenţa a două puncte date, printr'o translaţie, de exemplu: punctul B este ordonat punctului A (şi nu invers), atunci A se numeşte *origină*, iar B *extremitate.* Prin aceasta, translaţia este afectată de un *sens.* In cele ce urmează, vom considera numai translaţii afectate de sens. Vom nota o astfel de mărime prin litere supraliniate cu o săgeată: $\overrightarrow{a}$.

Se poate arăta că translaţiile sunt mărimi extensive.

Admitem că se pot determina, în spaţiu, n (şi nu mai puţine) translaţii fundamentale $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$, independente (deci, între care nu există o relaţie liniară); când nu există mai multe decât n astfel de translaţii independente, spunem că spaţiul posedă n dimensiuni.

Teoremă. Orice translaţie se poate exprima printr'o expresie de forma

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i \quad , \tag{16}$$

unde a_i sunt numere reale, într'un spaţiu cu n dimensiuni.

In adevăr, translaţiile care ordonează unui punct dat O de pe o dreaptă D toate punctele de pe dreapta considerată, pot fi exprimate prin $x_i \vec{u}$, dacă $\vec{u}$ reprezintă o translaţie fundamentală aleasă la voe pe dreapta D şi x_i sunt numere reale. Dacă $x_i > 0$, punctele omoloage lui O ocupă, pe D, semidreapta pozitivă; dacă $x_i > 0$, punctele omoloage lui O ocupă semidreapta negativă a lui D. Punctul O devine origina acelor semidrepte. Numerile x_i se numesc *abscisele* punctelor lui D faţă de O.

In plan (continuum cu două dimensiuni), există două translaţii neparalele

$$\vec{X}_1 = x_1 \vec{u}_1 \quad ; \quad \vec{X}_2 = x_2 \vec{u}_2 \quad ,$$

unde $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ sunt două translaţii neparalele unitare, distincte, duse prin acelaş punct O; rezultanta $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$ ordonează lui O un punct P din plan. Dacă lăsăm numerile x_i şi x_j să ia toate valorile, punctele P umplu întreg planul. Ele determină o multitudine liniară bidimensională.

Dacă deplasăm planul considerat dealungul unei drepte ce trece prin O, dar nesituată în acest plan, putem alege o translaţie nesituată în plan $\vec{u}_3$, astfel încât, în spaţiul cu trei dimensiuni, orice translaţie să poată prezenta forma de translaţie compusă

$$\vec{X} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3 \, .$$

Lăsând numerile x să ia toate valorile posibile, reale, translația ordonează punctului O mulțimea punctuală din spațiul tridimensional.

In general, într'un continuum n—dimensional, putem reprezenta o translație oarecare prin corespondența univocă (16), așadar, sub forma unei mărimi extensive.

Posibilitatea acestei reprezentări, după cum am precizat mai sus, este conținută în postulatul: *în spațiul cu n dimensiuni există n translații fundamentale independente, pe când $n+1$ translații sunt totdeauna liniar dependente.*

Această propoziție constitue *axioma dimensională.*

Prin urmare, în spațiile n—dimensionale, translațiile alcătuesc o *multiplicitate liniară cu n dimensiuni.*

Fie O un punct fix, luat ca origină, și P un punct oarecare, iar $\overrightarrow{OP}$ să fie identică translației $\vec{a}$, dată de o relație (16); atunci mărimile numerice x_i poartă numele de *coordonate* ale punctului P față de sistemul de coordonate posedând axele $\vec{u}_i$. Observăm că valorile x_i depind de alegerea particulară a sistemului de coordonate și nu numai de unitatea de măsură aleasă. Componentele nu au deci un caracter riguros scalar; le vom numi *pseudo-scalare.*

Fie un nou sistem de coordonate cu translațiile fundamentale $\vec{u}_i'$ $(i=1, 2, \ldots n)$. După considerațiile precedente, acest sistem nu poate să fie independent de primul. Așadar, relațiile de legătură dintre cele două sisteme de translații fundamentale sunt liniare:

$$\vec{u}_i' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, \vec{u}_k \qquad (i=1, 2, \ldots n) \tag{17}$$

unde α_{ki} sunt numere reale, al căror determinant este diferit de zero (căci $\vec{u}_i'$ sunt independente). Dar atunci, mărimea extensivă (16) trebue să se exprime și prin

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i'\, \vec{u}_i' \;; \tag{18}$$

prin urmare,

$$\Sigma a_i' \vec{u}_i' = \Sigma a_i \vec{u}_i \quad . \tag{19}$$

Inlocuind (17) în (19) obţinem relaţia care leagă componentele în cele două reprezentări, caracterizate prin sistemele de coordonate alese,

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_k' \quad . \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{20}$$

Relaţia (20), unde a_i şi a'_k sunt interpretate ca fiind componentele a două translaţii (referite la sisteme de coordonate oarecari), mijloceşte o corespondenţă biunivocă ce satisface proprietăţilor:

1. oricărei translaţii nenule $\vec{a}$ îi corespunde o translaţie *imagine* $\vec{a}'$ nenulă;

2. translaţiei rezultante $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ a două translaţii date, îi corespunde rezultanta $\vec{a}' + \vec{b}' = \vec{c}'$ a translaţiilor „imagine“;

3. translaţiei $m\vec{a}$ (m număr real), îi corespunde translaţia $m\vec{a}'$.

O astfel de corespondenţă se numeşte *corespondenţă afină*, iar reprezentările respective sunt afine. Trebue de observat că în reprezentările afine nu este necesar să se aleagă o unitate de măsură comună pentru toate componentele unei mărimi raportată la un sistem $\vec{u}_i$. In adevăr, în relaţia de definiţie a mărimii extensibile (16) elementele sistemului fundamental pot face parte din specii diferite, pentru care nu este posibilă stabilirea unei unităţi comune de măsură. In aceste condiţii, este evident că nu poate fi vorba de o definiţie a „lungimii“ unei translaţii într'un spaţiu afin, atâta vreme cât nu se introduce o *metrică*. Prin aceasta însă spaţiul afin se transformă într'un *spaţiu metric*.

Reprezentarea afină mijloceşte numai o „corespondenţă“ a diferitelor elemente geometrice din spaţiu.

S'ar părea că o asemenea reprezentare nu ar avea nici un sens fizic. Din potrivă, reprezentările afine sunt necesare în Fizică. Exemplul edificator îl oferă, în această privinţă, Termodinamica. *Starea* unui sistem termic (un *gaz ideal*, de ex.) este

reprezentat, în diagramă, prin raport la un sistem de coordonate pe care raportăm mărimi fundamentale de specii diferite: temperatura, presiunea, volumul. Este de la sine înţeles că nu se poate găsi o unitate comună pentru toate aceste mărimi. Distanţa dintre două puncte, în spaţiul afin astfel determinat, puncte care reprezintă două stări diferite ale aceluiaş gaz, nu are nici un înţeles fizic. In schimb, se poate vorbi cu înţeles despre o corespondenţă între diferitele stări ale unui sistem termodinamic.

Cum, însă, cea mai mare parte dintre fenomenele fizice îşi au reprezentarea comodă şi chiar necesară într'un spaţiu metric, vom schiţa pe scurt noţiunea de spaţiu metric, urmând ca mai târziu să insistăm asupra precizării acestei noţiuni.

Un spaţiu metric este un spaţiu afin în care se defineşte noţiunea de *distanţă* între două puncte date, oarecare, prin lungimea *elementului liniar* care uneşte două puncte infinitesimal vecine:

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, dx_i\, dx_j \,, \tag{21}$$

unde am însemnat prin ds elementul liniar infinitesimal care uneşte două puncte aparţinând spaţiului considerat; prin g_{ij} nişte funcţii date de coordonate (măsurabile cu aceiaşi unitate de măsură), finite şi continue; $d\vec{x}_i = d(x_i \vec{u}_i)$ reprezintă variaţii infinitesimale ale coordonatelor în sistemul fundamental.

Funcţiile g_{ij} sunt caracteristice pentru natura spaţiului metric în care există posibilitatea de a compara între ele, cu ajutorul unităţii de măsură comună, lungimile.

Spaţiul *euclidian* este caracterizat prin proprietatea: expresia (21) a elementului diferenţial este o funcţie patratică, *pozitiv definită* în dx_i, cu *coeficienţi constanţi* (toţi g_{ij} sunt constanţi), sau care poate să fie redusă la o atare formă, printr'o transformare de coordonate conducând la coordonate cartesiene.

In acest caz, translaţiile fundamentale $\vec{u}_i$ pot să fie comparate între ele cu ajutorul unei unităţi de *lungime*, comună tuturor translaţiilor; aceiaşi unitate va servi şi la măsurarea *valorii absolute* a unei translaţii oarecare: „lungimea", care măsoară distanţa dintre punctul origină şi punctul extremitate.

In cazul când toate $\vec{u}_i$ sunt ortogonale între ele, expresia (21) ia forma teoremei lui PYTHAGORA:

$$(22) \qquad (ds)^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 ,$$

O schimbare a axelor coordonate de forma (17) conduce la

$$(23) \qquad dx_i' = \sum_{1}^{n} \alpha_{ki}\, dx_k . \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Inlocuind în relaţia (22), obţinem

$$(24) \qquad ds^2 = \sum_{i,k,l} \alpha_{ki}\, \alpha_{li}\, dx_k\, dx_l ;$$

aşadar,

$$(25) \qquad g_{kl} = \sum_{i} \alpha_{ki}\, \alpha_{li}$$

prin urmare, câtimi constante.

Reciproc, dacă relaţia (21) poate să fie adusă la forma (24), ea defineşte un spaţiu metric euclidian.

7. Segmente orientate. Mărimea rectilinie $\overline{AB}$, prin care înţelegem exprimată *mulţimea* tuturor punctelor aşezate între punctele A şi B se numeşte *segment* şi se măsoară printr'un număr pozitiv, reprezentând raportul dintre acel segment şi un segment fix ales ca unitate de măsură; aşadar, un scalar pozitiv, numit lungimea segmentului AB.

Dacă origina A coincide cu extremitatea B, segmentul este nul.

Prin fixarea ordinii de succesiune a celor două puncte extreme A şi B se atribue segmentului un *sens*: de exemplu, sensul pozitiv dela A spre B şi sensul negativ dela B spre A (fig. 3). Prin aceasta, segmentul devine orientat: $\overrightarrow{AB}$. Aşadar, un segment orientat este definit prin următoarele date: 1. *origina* (punctul A), 2. *valoarea absolută* numită şi *modùl* (lungimea segmentului $\overline{AB}$), 3. *direcţia* (dreapta AB) şi 4. *sensul* (de exemplu, pozitiv când parcurgem segmentul $\overline{AB}$ de la A spre B).

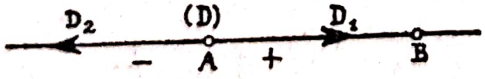


Fig. 3

Segmentul orientat nul are direcţia şi sensul nedeterminate.

Proiecția unui segment orientat pe o dreaptă sau un plan este segmentul orientat care are ca origină și extremitate proiecția originii și a extremității segmentului orientat dat pe dreapta sau planul considerat.

8. Segmente orientate echipolente sunt segmentele orientate, nenule, având aceiași valoare absolută, direcție și sens. Segmentele nule sunt toate echipolente. Echipolența verifică proprietățile fundamentale ale egalității, și anume: orice segment este echipolent cu el însuși (prop. reflexivă); dacă $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{PQ}$, atunci și $\overrightarrow{PQ}$ este echipolent cu $\overrightarrow{AB}$ (simetrie); două segmente echipolente cu un al treilea sunt echipolente între ele (transitivitate).

Segmentele echipolente cu un segment dat sunt congruente între ele și cu segmentul dat. Fie două segmente echipolente $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{AB}$. Există o reprezentare congruentă (o translație) care face să se corespundă segmentele $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{AB}$. Zicem că translația $\overrightarrow{AA'}$ este o astfel de reprezentare. In adevăr, fiind dat un punct M' pe $\overrightarrow{A'B'}$, el este omologul unui punct M de pe $\overrightarrow{AB}$, astfel încât $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, ceeace rezultă din faptul că figura $AA'M'M$ este un paralelogram. Deci, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

Printr'un punct dat din spațiu se poate duce un segment și numai unul singur echipolent cu un segment dat. In spațiul tridimensional se poate duce ∞^3 segmente orientate echipolente unui segment orientat dat. Ele formează o clasă de segmente echipolente, definită prin valoarea absolută, direcția și sensul comune acestor segmente.

Prin urmare, o clasă de segmente echipolente definește o translație și reciproc.

9. Vector euclidian. Entitatea geometrică definită, într'un spațiu euclidian, prin: 1. *valoare absolută* (modul) [1]; 2. *direcție* și 3. *sens*, poartă numele de *vector liber*.

1) Atrag atenția asupra faptului că întrebuințez cu intenție expresia

Din consideraţiile de mai sus rezultă că această mărime geometrică este identificabilă, într'un spaţiu metric euclidian, unei clase de segmente echipolente sau unei translaţii.

Numele „vector", de la latinescul *vehere* (a merge) este datorit lui HAMILTON.

Denumirea generică de „vector" poate desemna tot atât de bine o clasă de segmente echipolente ca şi unul *oricare* din segmentele orientate ale clasei; un *anumit* segment orientat reprezintă *individualizarea*, prin specificarea unui anumit individ, a noţiunii abstracte de vector.

Origina segmentului orientat nefiind implicată în definiţia vectorului, acesta a fost numit *liber*. Dacă însă vectorul este, prin însăşi semnificaţia lui fizică, ataşat unui punct, suntem conduşi să alegem acel punct ca origină a vectorului, care devine *vector legat* sau *localizat*.

Tot astfel, dacă un vector este ataşat de o anumită dreaptă, paralelă cu direcţia lui, suntem conduşi s'o luăm ca *dreaptă-suport*; vectorul se numeşte *alunecător*.

Un vector este nul dacă valoarea lui absolută este egală cu zero. El exprimă o reprezentare congruentă (translaţie nulă) care lasă toate punctele în repaos; direcţia şi sensul unui astfel de vector rămân nedeterminate.

Doi vectori sunt *egali* dacă au aceiaşi valoare absolută, aceiaşi direcţie şi acelaş sens; figuraţi în acelaş punct din spaţiu, prin vectori echipolenţi, cei doi vectori egali se confundă.

Un vector care are valoarea absolută egală cu unitatea se numeşte *vector unitar*. Vectorul unitar care are aceiaşi direcţie şi acelaş sens cu un vector dat se numeşte *versorul* acelui vector.

Adoptând notaţia lui GRASSMANN şi K. HEUN, vom nota vectorii prin litere supraliniate $\bar{a}$ sau $\overrightarrow{AB}$ (dacă vectorul este evidenţiat prin extremităţile sale). Litera a (fără linie deasupra)

„valoare absolută" sau „modùl", evitând expresiile destul de răspândite de „lungime" sau „intensitate", care nu sunt adecvate definiţiei generale. In adevăr, numind „lungime" mărimea vectorului, substituim noţiunii generale de vector imagina geometrică a segmentului rectiliniu; iar denumirea de „intensitate" se leagă de imagina fizică de forţă. Ori, un vector poate să reprezinte diverse mărimi fizice, care posedă dimensiuni diferite: viteză, acceleraţie, forţă etc.

sau $|\bar{a}|$, exprimă valoarea absolută (modulul) vectorului $\bar{a}$; versorul determină direcţia şi sensul.[1])

Mărimile fizice, ca şi construcţiile matematice, care pot să fie reprezentate geometric prin vectori, se numesc *mărimi vectoriale*. Este interesant de observat că există mărimi fizice, reprezentând mişcări cinematice reale, diferite de translaţii, care pot să fie descrise totuşi geometric prin mărimi matematice posedând toate proprietăţile algebrice ale vectorilor. Aşa sunt *rotaţiile infinitesimale* în spaţiile euclidiene cu trei dimensiuni, sau mărimile fizice descrise prin astfel de rotaţii.

Numim *„spaţiu de vectori" mulţimea tuturor mărimilor din aceiaşi specie care pot să fie reprezentate, univoc şi fără arbitrar, după alegerea unităţii de măsură, prin mulţimea translaţiilor.*

Din punctul de vedere al semnificaţiei distingem două feluri de vectori: 1. *vectori polari*, sau propiu zişi, identificabili translaţiilor; 2. *vectori axiali*, bucurându-se de proprietăţile algebrice ale vectorilor polari, dar reprezentând mărimi fizice (rotaţii infinitesimale) sau construcţii geometrice (mărimile plane ale lui GRASSMANN), care posedă un caracter intrinsec deosebit al deplasărilor rectilinii.

Această deosebire se evidenţiază atât prin faptul că vectorii polari şi axiali, fiind mărimi de natură deosebită, nu se pot „compune" (aduna), cât şi prin modul diferit cum se comportă cele două categorii de vectori la schimbările axelor de coordonate.

1) In literatură, vectorii primesc diverse notaţii. Literatura germană foloseşte litere gotice. Uneori se întrebuinţează litere grase. Unii autori scriu $\overrightarrow{a}$ sau chiar $\overleftrightarrow{a}$ pentru a distinge un vector axial. (v. L. BRILLOUIN şi P. LANGEVIN). Alţii, păstrând notaţia lui HAMILTON, însemnează vectorii prin „diferenţe de puncte" (v. BURALI-FORTI şi T. LEVI-CIVITA): $A - B$ pentru $\overrightarrow{AB}$.

CAP. II

Operaţiile vectoriale algebrice.

10. Adunarea vectorilor liberi este o operaţie evidentă, care decurge din însuşi caracterul noţiunii de translaţie rezultantă a două translaţii nenule $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ care ordonează punctele A şi B, respectiv, punctele B şi C. Am constatat în adevăr, că rezultanta este o translaţie care face să se corespundă punctele A şi C. Aşadar, *suma geometrică* a doi vectori liberi va fi exprimată prin *ecuaţia vectorială*

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} \; ; \tag{1}$$

$\bar{c}$ se numeşte *vector rezultant*, sau *rezultantă*.

Dacă unul din vectori este nul, translaţia respectivă exprimă o reprezentare congruentă identică; aşadar, există un vector nul $\bar{0}$, pentru care

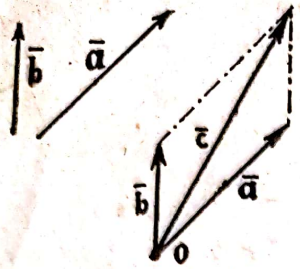
$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \; , \tag{2}$$

oricare ar fi vectorul $\bar{a}$.

Dacă cei doi vectori sunt coliniari (sau paraleli), vectorul rezultant este coliniar (sau paralel) cu vectorii daţi. Rezultanta a doi vectori coliniari (sau paraleli) se obţine aşezând un vector echipolent cu al doilea vector dat, pe dreapta (sau direcţia) comună: rezultanta va fi un vector cu origina în origina primului vector şi extremitatea în extremitatea celui de al doilea, pe dreaptă. Dacă cei doi vectori sunt oarecari (nenuli, neparaleli şi necoliniari), vectorul rezultant se construeşte prin *regula paralelogramului:* să considerăm paralelogramul construit pe două segmente echipolente cu vectorii daţi,

Scanned with OKEN Scanner

prin acelaş punct; diagonala având ca origină, origina primului segment şi ca extremitate, extremitatea celui de al doilea, reprezintă ca valoare absolută, direcţie şi sens, vectorul rezultant (fig. 4).



(Fig. 4)

Din Trigonometrie urmează că valoarea absolută a vectorului rezultant este dată de relaţia cunoscută

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,\bar{a}.\bar{b}\cos(\bar{a},\bar{b}) \quad , \tag{2}$$

unde $(\bar{a},\bar{b})$ este unghiul ≥ 0 şi $\leq \pi$, format de două semidrepte având aceleaşi direcţii şi aceleaşi sensuri ca vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Adunarea a trei sau mai multi vectori $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\ldots$, în număr finit, cari sunt sau nu în acelaş plan, se efectuiază (fig. 5) alegând un punct arbitrar O ca origină a primului vector; în extremitatea acestuia plasăm origina vectorului al doilea şi aşa mai departe, formând *poligonul de vectori*. Vectorul rezultant va avea origina în origina primului şi extremitatea în extremitatea ultimului vector. Dacă origina primului vector se confundă cu extremitatea ultimului vector, rezultanta este nulă.

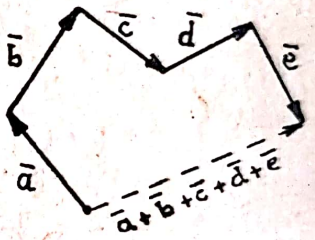


Fig. 5

Adunarea este comutativă (fig. 6)

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a} \quad . \tag{3}$$

Această relaţie rezultă din proprietatea de „permutabilitate" a translaţiilor. Segmentele echipolente celor doi vectori daţi, duse prin acelaş punct alcătuesc un paralelogram a cărui diagonală aleasă după regula paralelogramului, dă vectorul rezultant. Operaţia fiind simetrică faţă de cei doi vectori, urmează exactitatea relaţiei (3).

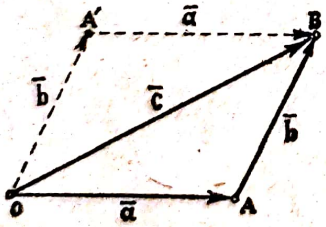


Fig. 6

Adunarea este asociativă (fig. 7)

$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}) \quad . \tag{4}$$

Dacă vectorului $(\bar{a}+\bar{b})$ i se adună vectorul $\bar{c}$, aplicând de două ori regula paralelogramului, se obţine acelaş rezultat

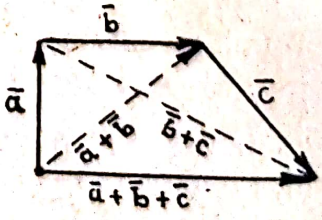


Fig. 7

ca atunci când se adună vectorului $\bar{a}$ vectorul $(\bar{b}+\bar{c})$, construit cu elementele din fig. 7. Egalitatea (4) fiind astfel stabilită, cei doi membri ai ei se pot nota prin $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ (suprimând parantezele).

11. Diferența geometrică a doi vectori (fig. 8). Ca și pentru scalari, fiind dat un vector $\bar{b}$, definim vectorul $-\bar{b}$ prin relația

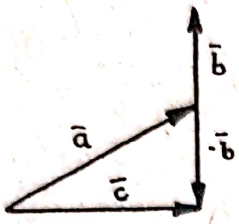


Fig. 8

$$\bar{b}+(-\bar{b})=0\ ,$$

care exprimă că translația $-\bar{b}$ este inversa translației $\bar{b}$: vectorul $-\bar{b}$ are același modul, aceiași direcție, dar sens contrar cu $\bar{b}$.

Vectorul $-\bar{b}$ se numește vector *opus* lui $\bar{b}$.

Prin diferența geometrică dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ înțelegem un vector $\bar{c}$, astfel încât

$$\bar{c}=\bar{a}+(-\bar{b})\ ;$$

ceeace se mai scrie

$$\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}\ . \tag{5}$$

Există un vector $\bar{c}$ și numai unul singur, care satisface relației vectoriale (5). In adevăr, construcția geometrică (5) ne arată că $\bar{c}$ este dat prin regula paralelogramului; vectorul $\bar{c}$ este unic, căci nu există două translații distincte care să asocieze cele două puncte: origina lui $\bar{a}$ și extremitatea lui $-\bar{b}$.

12. Multiplicarea vectorilor cu un număr.

Produsul unui vector $\bar{a}$ cu un număr real $\alpha \neq 0$,

$$\alpha\bar{a}=\bar{a}\alpha\ ,$$

este vectorul având valoarea absolută $|\alpha|a$, aceiași direcție cu $\bar{a}$ și același sens sau sens contrar lui $\bar{a}$ după cum $\alpha>0$ sau $\alpha<0$.

In particular,

$$1\,.\,\bar{a}=\bar{a}\ \ ;\ \ (-1)\,.\,\bar{a}=-\bar{a}\ .$$

Tot prin definiție

$$0\,.\,\bar{a}=\bar{0}\ \ ;\ \ \alpha\bar{0}=\bar{0}\ .$$

Scanned with OKEN Scanner

Impărtirea unui vector $\bar{a}$ cu un număr α diferit de zero, se reduce la înmulţirea vectorului cu inversul numărului:

$$\frac{\bar{a}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\bar{a}.$$

Inmultirea este distributivă:

(6) $$(\alpha+\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}\ ;\ \alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b},$$

α şi β fiind două numere. Pentru a fixa ideile să luăm $\alpha+\beta>0$; deci, $\alpha a + \beta a > 0$, căci pentru numere

$$(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a.$$

Cei doi membrii ai relaţiei întâia (6) exprimă un veetor de aceiaşi direcţie şi acelaş sens cu $\bar{a}$, având aceiaşi valoare absolută.

In mod analog se stabileşte şi a doua relaţie (6).

Inmultirea cu un număr este asociativă: α şi β fiind numere, avem

(7) $$\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}.$$

In adevăr, $\beta\bar{a}$ reprezintă un vector de valoare absolută $|\beta|a$ având aceiaşi direcţie şi acelaş sens ($\beta>0$) sau sens contrar ($\beta<0$) cu $\bar{a}$. Produsul acestui vector prin numărul α ne dă un vector de modùl $|\alpha|(|\beta|a)$, având aceiaşi direcţie şi sens ($\alpha\beta>0$) sau sens contrar ($\alpha\beta<0$) cu $\bar{a}$. Raţionând la fel asupra membrului al doilea al egalităţii (7), găsim un vector având modùlul $(|\alpha\beta|)a$, aceiaşi direcţie şi acelaş sens ($\alpha\beta>0$) sau sens contrar ($\alpha\beta<0$) cu $\bar{a}$. Cum însă, pentru numere, $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, concludem egalitatea acestor doi vectori rezultanţi.

După § 5, operaţiile de mai sus subsistă pentru produse dintre vectori şi scalari.

13. Propoziţiile fundamentale ale calculului vectorial. Legile de adunare (resp. scădere) şi multiplicare, desvoltate mai sus, pot să fie prezentate drept fundament axiomatic al calculului vectorial. Ele sunt cuprinse în propoziţiile fundamentale enunţate pentru translaţii (§ 6) şi pentru mărimile extensive (§ 3). Le rezumăm în tabloul următor:

I. Fiind daţi doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, există un vector $\bar{a}+\bar{b}$;

Există un vector $\bar{0}$ (vector nul) astfel încât, pentru orice vector $\bar{a}$ să avem $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;

Scanned with OKEN Scanner

Fiind dat vectorul $\bar{a}$ există un vector $-\bar{a}$ astfel încât $\bar{a}+(-\bar{a})=0$;

II. Adunarea este comutativă $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;

» » asociativă $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;

III. Inmulţirea cu un număr este comutativă $\alpha\bar{a}=\bar{a}\alpha$;

» » » » » asociativă $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$;

» » » » » distributivă $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$;

$\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$;

IV. Din $\alpha\bar{a}=0$, rezultă, ori $\alpha=0$, ori $\bar{a}=\bar{0}$.

V. *Axioma dimensională,* va fi formulată mai târziu (§ 18).

Este de observat că şi pentru vectori, ca şi pentru scalari, adunarea se poate aplica numai mărimilor vectoriale care posedă aceleaşi dimensiuni fizice. In schimb, înmulţirea între un vector şi un scalar poate avea sens oricare ar fi natura lor: o massă (scalar) înmulţită cu o acceleraţie (vector), ne dă o forţă (vector, de natură cu totul diferită de massă sau acceleraţie).

Vom vedea mai târziu că se pot înmulţi şi vectori de dimensiuni diferite sau de aceleaşi dimensiuni, între ei.

Teoria vectorilor abstracţi poate să fie prezentată şi în mod pur formal, pornind dela proprietăţile fundamentale asupra translaţiilor, vectorii fiind concepuţi drept translaţii efective în spaţiile afine (făcând abstracţie de „lungime") sau în spaţiile metrice (introducând măsura unui vector prin lungimea sa). In aceste prezentări propoziţiile de mai sus se aşează la început, drept axiome de bază.

In spaţiile afine noţiunea de vector este identică noţiunii de translaţie. In spaţiile euclidiene cu trei dimensiuni, această noţiune poate reprezenta şi rotaţia.

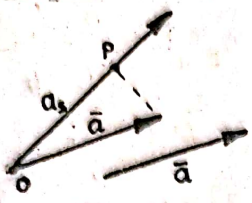
Vom lămuri mai târziu cum se poate prezenta o teorie a vectorilor numerici drept mărimi extensive.

Am ales prezentarea de faţă întru cât are avantajul intuiţiei geometrice, necesară înţelegerii problemelor de Fizică — ceeace ne preocupă pe noi, în deosebi.

14. Exprimarea unui vector cu ajutorul versorului său. (fig. 9). Avem

(8) $$\bar{a}=a\bar{u}\,.$$

In adevăr, după definiţia versorului (§ 9), mărimea din membrul al doilea al relaţiei precedente reprezintă un vector de modùl $a\mathbf{u} = a$ având aceiaşi direcţie şi acelaş sens cu $\bar{a}$. După § 12, putem exprima vectorul unitar $\bar{\mathbf{u}}$ al vectorului dat $\bar{a}$, diferit de zero, prin



(Fig. 9)

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{a}\bar{a} = \frac{\bar{a}}{a} .$$

15. Componenta unui vector pe o direcţie orientată.

1. *Vectorul este paralel cu direcţia dată.* Fie $\bar{\mathbf{s}}$ vectorul unitar al al unei direcţii orientate, dată. Avem evident,

$$\bar{\mathbf{u}} = \pm\bar{\mathbf{s}},$$

$\bar{\mathbf{u}}$ fiind versorul vectorului dat $\bar{a}$. După (8) rezultă

$$\bar{a} = \alpha\bar{\mathbf{s}}, \tag{9}$$

dacă $\alpha = \pm a$; scalarul α fiind pozitiv sau negativ după cum vectorii unitari $\bar{\mathbf{u}}$ şi $\bar{\mathbf{s}}$ au acelaş sens sau sensuri contrare. Scalarul α se numeşte *componenta* vectorului $\bar{a}$ pe direcţia orientată $\bar{\mathbf{s}}$. Reprezentarea (9) se poate face numai într'un singur mod şi exprimă vectorul $\bar{a}$ printr'o funcţie liniară de vectorul $\bar{\mathbf{s}}$ (v. proprietăţile translaţiilor).

2. *Vectorul nu este paralel cu direcţia dată.* Să alegem o direcţie fixă de proiecţie. Lungimea algebrică a segmentului $\overline{A'B'}$ aşezat pe direcţia orientată $\bar{\mathbf{s}}$, segment obţinut prin proiectarea extremităţilor A şi B ale vectorului $\bar{a}$, paralel cu direcţia de proiecţie aleasă, se numeşte *componenta* vectorului $\bar{a}$ pe direcţia orientată $\bar{\mathbf{s}}$. In cazul proiecţiei *ortogonale*, obţinem *componenta ortogonală*

$$a_s = a\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{\mathbf{s}}}), \tag{10}$$

unghiul $(\bar{a}, \bar{\mathbf{s}})$ fiind unghiul dintre semidreptele determinate de versorul lui $\bar{a}$ şi de $\bar{\mathbf{s}}$.

Componenta a_s este un scalar pozitiv sau negativ după cum unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{\mathbf{s}}$ este ascuţit sau obtuz.

Aceleaşi definiţii sunt valabile şi pentru componenta faţă de un plan, luându-se ca direcţie pe care se efectuiază proiecţia, dreapta de intersecţie a planului dat cu planul proiectant, orientată într'un sens sau altul.

Scanned with OKEN Scanner

16. Teorema componentelor. Dacă avem mai mulţi vectori, în număr finit, şi-i proiectăm pe o direcţie orientată dată, obţinem suma componentelor acestor vectori faţă de direcţia dată, egală cu componenta vectorului rezultant, faţă de aceiaşi direcţie. In adevăr, suma componentelor este lungimea algebrică a segmentului, aşezat pe direcţia dată, cuprins între proiecţiile originii primului vector şi extremităţii ultimului vector. Ea este egală cu lungimea segmentului obţinut prin proiecţia vectorului rezultant pe aceiaşi direcţie orientată dată.

17. Proiecţia unui vector pe o direcţie orientată este vectorul care are valoarea absolută egală cu componenta vectorului dat pe direcţia considerată şi ca versor vectorul unitar al direcţiei date, $\bar{s}$

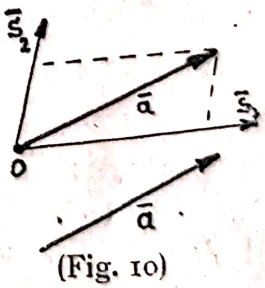
$$\text{pr. } \bar{a} = \alpha \bar{s} .$$

In cazul a mai mulţi vectori, înmulţind componenta vectorului rezultant cu vectorul unitar al direcţiei orientate dată, obţinem cunoscuta *teoremă a proiecţiilor:* „proiecţia vectorului rezultant pe o direcţie orientată, este egală cu vectorul rezultant al proiecţiilor vectorilor componenţi pe aceiaşi direcţie orientată".

18. Descompunerea vectorilor. Elementele de mai sus ne permit să efectuăm descompunerea unui vector $\bar{a}$, în spaţiul euclidian cu una, două, trei sau un număr oarecare de dimensiuni n (finit), după atâtea direcţii independente cât este numărul dimensiunilor.

Pe o direcţie paralelă cu vectorul însuşi, descompunerea este exprimată prin formula (9).

In plan (două dimensiuni) fie $\bar{s}_1$ şi $\bar{s}_2$ două direcţii, distincte (fig. (10). Să proiectăm vectorul $\bar{a}$ pe $\bar{s}_1$, paralel cu $\bar{s}_2$ şi pe $\bar{s}_2$, paralel cu $\bar{s}_1$. Obţinem vectorii $\alpha_1 \bar{s}_1$ şi $\alpha_2 \bar{s}_2$, respectiv. Ducând prin acelaş punct fix O din plan, vectorii echivalenţi cu $\bar{a}, \alpha_1 \bar{s}_1$ şi $\alpha_2 \bar{s}_2$, formăm paralelogramul având aceşti trei vectori ca diagonală, respectiv, ca laturi. Vectorul $\bar{a}$ apare drept vectorul rezultant al vectorilor componenţi $\alpha_1 \bar{s}_1$ şi $\alpha_2 \bar{s}_2$:



(Fig. 10)

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 . \tag{11}$$

In plan, o relaţie de forma

$$\alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 + \alpha_3 \bar{s}_3 = 0$$

exprimă proprietatea: cei trei vectori $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ sunt liniar dependenţi, dacă α_i nu sunt toţi nuli (§ 6).

In spaţiul cu trei dimensiuni, să considerăm trei direcţii oarecare $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, independente, neparalele cu vectorul dat şi neaşezate în acelaş plan. Să ducem printr'un punct fix O din spaţiu patru vectori echipolenţi cu $\bar{a}$ şi cei trei vectori unitari $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$. Cele trei direcţii formează trei plane P_1 $(\bar{s}_2, \bar{s}_3)$, P_2 $(\bar{s}_3, \bar{s}_1)$ şi P_3 $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$. Să proiectăm vectorul $\bar{a}$, paralel cu $\bar{s}_3$, pe planul P_3. Fie $\bar{a}'$ această proiecţie. Fie $\alpha_3 \bar{s}_3$ proiecţia vectorului $\bar{a}$ pe $\bar{s}_3$, paralelă cu planul P_3. In planul P_3 descompunem vectorul $\bar{a}'$ pe cele două direcţii $\bar{s}_1$ şi $\bar{s}_2$; fie $\alpha_1 \bar{s}_1$ şi $\alpha_2 \bar{s}_2$ vectorii componenţi, după relaţia (11).

In planul format de $\bar{a}$ cu $\bar{s}_3$, avem

$$\bar{a} = \bar{a}' + \alpha_3 \bar{s}_3 \ ;$$

în planul P_3 avem

$$\bar{a}' = \alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 \ .$$

Din cele două relaţii precedente se obţine

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 + \alpha_3 \bar{s}_3 \ . \tag{12}$$

In spaţiul cu trei dimensiuni putem exprima, aşadar, un vector prin cele trei proiecţii pe trei direcţii arbitrare, necoplanare. Rezultă că orice relaţie de forma

$$\alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 + \alpha_3 \bar{s}_3 + \alpha_4 \bar{s}_4 = 0$$

arată că cei trei vectori unitari $\bar{s}_i$ sunt liniar dependenţi (§ 6).

Generalizând, în spaţiul euclidian S_n cu un număr n (finit) de dimensiuni, există sisteme de n direcţii independente, adică astfel încât o relaţie de forma

$$\sum_1^n \alpha_i \bar{s}_i = 0 \ ,$$

să fie satisfăcută numai pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Din contra, $n+1$ vectori sunt, în spaţiul cu n dimensiuni, liniar dependenţi; de unde urmează că orice vector se poate exprima sub forma:

$$\bar{a} = \sum_1^n \alpha_i \bar{s}_i \ . \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mulţimea vectorilor de forma (14) alcătueşte o multiplicitate vectorială liniară n — dimensională, desfăşurată pe vectorii fundamentali $\bar{s}_i$, în S_n. Un vector se poate exprima, în spaţiul euclidian S_n într'un *singur mod* sub forma (14); în adevăr, dacă ar exista două astfel de reprezentări, expresia

$$\bar{a} = \Sigma \alpha \bar{s} = \Sigma \beta \bar{s} ,$$

ar constitui de fapt o relaţie liniară între vectorii $\bar{s}_i$, cari, atunci, nu ar mai fi independenţi, contrar ipotezei. Această proprietate constitue *axioma dimensională:* „în spaţiul euclidian S_n se pot găsi n vectori liniar independenţi, dar nu $n+1$“ (v. § 6).

19. Sisteme de referinţă. Coordonate. Am specificat în § 6 că, dacă ducem printr'un punct oarecare O, n direcţii având ca vectori unitari $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots \bar{s}_n$, obţinem un *sistem de referinţă* (sau de coordonate), afin, având punctul O drept origină. Scalarii α_i, cari reprezintă componentele vectorului $\bar{a}$, faţă de direcţiile $\bar{s}_i$, sunt *coordonatele* extremităţii A a vectorului $\bar{a}$, adus cu origina în O. Dacă scalarii α pot să ia toate valorile reale, pozitive şi negative, punctul A va descrie continuumul n — dimensional S_n. In acest caz, vectorul $\overrightarrow{OA}$ joacă rolul de vector de poziţie $\bar{r}$ al punctului generic A.

Fie o dreaptă pe care alegem un vector unitar $\bar{s}$ şi un punct O'; fie un punct O fix în spaţiu, faţă de care vectorul de poziţie al punctului O' să fie $\bar{a}$. Ecuaţia vectorială a dreptei se scrie

$$\bar{r} = \bar{a} + \alpha \bar{s} ,$$

$\bar{r}$ reprezentând vectorul de poziţie al unui punct curent de pe dreaptă, faţă de O.

In general, fie un S_p în S_n ($p = 1, 2, \ldots n-1$), definit prin direcţiile $\bar{s}_i$ ($i = 1, 2, \ldots p-1$). Ecuaţia vectorială a acestui spaţiu liniar se scrie

$$\bar{r} = \bar{a} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \bar{s}_i ,$$

$\bar{a}$ fiind vectorul de poziţie al unui punct arbitrar din S_p, faţă de O. Pentru $p = n - 1$, avem iperplanele lui S_n.

20. Vectori reprezentaţi prin diferenţa a doi vectori de poziţie. Fie $\bar{r}_A$ şi $\bar{r}_B$ vectorii de poziţie, faţă de un punct fix din spaţiu O, ai originii şi extremităţii unui vector dat $\bar{a}$. Avem, după definiţia scăderii vectoriale (§ 11)

$$\bar{a} = \bar{r}_B - \bar{r}_A \,. \tag{15}$$

Fie α_i componentele lui $\bar{r}_A$ şi β_i componentele lui $\bar{r}_B$, faţă de un sistem de axe cu origina în O. Din ecuaţia vectorială (15) rezultă n ecuaţii scalare

$$a_i = \beta_i - \alpha_i \,, \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{16}$$

dacă însemnăm cu a_i componenta lui $\bar{a}$ pe axa $\bar{s}_i$.

Reprezentarea (15) lămureşte încă odată distincţia dintre un vector şi un segment liniar: în vreme ce noţiunea de segment implică mulţimea punctelor cuprinse între extremităţi, un vector este bine determinat numai prin extremităţile sale (două puncte).

Scriind $\bar{a} = \overrightarrow{AB} = B - A$, avem reprezentarea unui vector prin puncte. (Marcolongo).

21. Vectori numerici. Conexiune cu teoria ecuaţiilor liniare. Un vector în spaţiul n—dimensional poate să fie definit drept un grup de n numere reale

$$\bar{a} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

care satisfac următoarele axiome:

I. Un vector este un grup finit de numere: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$;

II. Adunarea este definită prin: $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) + (\beta_1, \ldots \beta_n) = ((\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + (\alpha_n + \beta_n))$;

III. Inmulţirea scalară este definită prin $\alpha(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \ldots \alpha\alpha_n)$;

IV. Există un vector nul: $\bar{0} = (0, 0, \ldots 0)$;

V. Orice vector se reprezintă într'un singur mod ca o combinaţie liniară de n vectori fundamentali:

$$\bar{a} = \sum_1^n \alpha_i \bar{\imath}_i \,.$$

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, este suficient să luăm

$$\bar{u}_1 = (1, 0, \ldots 0) \ , \ldots \ \bar{u}_n = (0, 0, \ldots 1) \ .$$

VI. O schimbare de vectori fundamentali

$$\bar{u}_i = \sum_j c_{ij} \bar{u}'_j \ ,$$

conduce la relaţiile

$$\bar{a} = \sum_{ij} \alpha_i c_{ij} \bar{u}'_j = \sum_j \alpha'_j \bar{u}'_j \ ;$$

aşadar, după V, trebue să fie verificată relaţia

$$\alpha'_j = \sum_i c_{ij} \alpha_i \ ,$$

care, conform axiomei V, trebue să determine univoc pe toţi α ; deci, determinantul coeficienţilor trebue să fie diferit de zero $|c_{ij}| \neq 0$. Numim vectorii astfel definiţi, *vectori numerici.*

Fie n numere $x_1, x_2, \ldots x_n$, pe care să le luăm drept componentele vectorului $n-$ dimensional $\bar{x}$ şi care să satisfacă axiomelor precedente. Fie un vector numeric dat $\bar{y}$ $(y_1, \ldots y_n)$.

Teorema fundamentală din teoria ecuaţiilor algebrice liniare sună: „un sistem de ecuaţii liniare *neomogene* cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots x_n$ (componentele vectorului $\bar{x}$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

unde a_{ik} sunt numere date al căror determinant este diferit de zero, iar $\bar{y}$ un vector dat, posedă o soluţie unică (în particular, soluţia $\bar{x} = 0$, pentru $\bar{y} = 0$). Sistemul *omogen* $(\bar{y} = 0)$ posedă un număr m de soluţii (nenule) $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_m$, liniar independente, dacă rangul determinantului principal este $n - m$ $(m < n)$".

Putem considera componentele vectorului numeric $|(x_i, \ldots x_n)|$ drept o soluţie a unei ecuaţii omogene

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \ .$$

Dacă ne sunt date $n - m$ astfel de ecuaţii liniar independente obţinem o multiplicitate vectorială cu m dimensiuni.

Fie o ecuaţie neomogenă

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a ,$$

şi două soluţii ale acestei ecuaţii $(x_1 , x_2 , \ldots x_n)$ şi $(x_1', x_2', \ldots x_n')$. Diferenţa acestor două soluţii

$$x_1' - x_1 \; ; \; x_2' - x_2 , \ldots x_n' - x_n \; ;$$

va fi evident o soluţie a ecuaţiei omogene corespunzătoare ; aşadar, componentele unui vector n—dimensional. Cum expresia acestor componente este identică cxprimării (16) a vectorului prin puncte, putem spune că o soluţie a ecuaţiei neomogene determină un *punct* în multiplicitatea $n-1$ dimensională. Mulţimea tuturor soluţiilor unei ecuaţii liniare neomogene umple întreaga multiplicitatea cu puncte.

Dacă ni se dau n ecuaţii neomogene, cu determinantul principal diferit de zero, sistemul de ecuaţii determină un punct unic.

Un sistem de ecuaţii liniare neomogene poate să fie considerat şi ca o transformare liniară între vectorii $\bar{x}$ şi $\bar{y}$; ea poate să fie scrisă sub forma

$$A\bar{x} = \bar{y} .$$

Fie

$$\mathcal{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea sistemului neomogen considerat, cu determinantul $| a_{ik} | \neq 0$.

Dacă vectorul $\bar{x}$ este, la rândul său, obţinut în mod analog, prin transformarea

$$B\bar{z} = \bar{x} ,$$

cu matricea $\mathcal{B} = (b_{ik})$, din vectorul $\bar{z}$, atunci $\bar{x}$ se deduce din $\bar{z}$ cu ajutorul sistemului de ecuaţii liniare neomogene

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} z_k = x_i . \qquad (i = 1 , 2 , \ldots n) .$$

Substituind valorile precedente în sistemul iniţial, vectorul $\bar{y}$

este dat de transformarea

$$A B \bar{z} = \bar{y} ,$$

iar matricea rezultantă este

$$\mathcal{A} \mathcal{B} = \mathcal{C} = (c_{ik}) ,$$

cu elementele

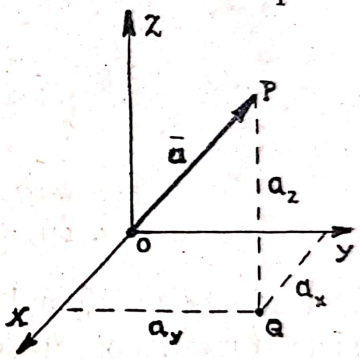
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} ;$$

ceeace constitue legea cunoscută de multiplicare a matricelor.

Această reprezentare a vectorilor are însemnătate în teoria *tensorilor*, după cum vom vedea. In adevăr, o matrice figurează, în anumite condiţii, un *tensor*, iar elementele matricei reprezintă atunci componentele tensorului.

22. Reprezentare cartesiană (fig. 11). Cea mai mare parte din fenomenele fizice sunt descrise în spaţiul fizic euclidian cu trei dimensiuni.

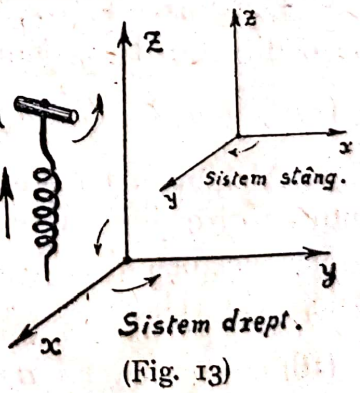
Printr'un punct O fix în spaţiu ducem un sistem de trei drepte orientate Ox, Oy, Oz, ortogonale, necoplanare, afectate respectiv, de trei vectori unitari $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (nenuli), numiţi *vectori fundamentali*. Avem un sistem de axe de coordonate cartesian ortogonal. Să alegem *orientarea dreaptă* a sistemului, introdusă în Fizică de Maxwell şi caracterizată prin una din regulele mnemonice, care figurează separat în diferitele tratate:



(Fig. 11)

(Fig. 12)

1. *regula „bonhomme"ului lui* Ampére (fig. 12): un observator aşezat cu picioarele în O şi capul pe direcţia pozitivă a lui Oz trebue să vadă semi-axa pozitivă de x în dreapta şi semi-axa pozitivă de y în stânga.



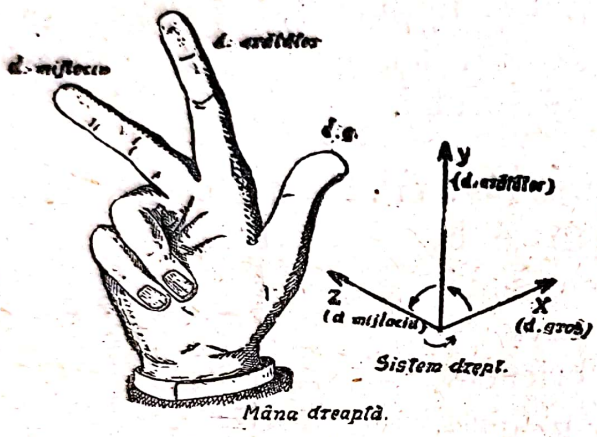
(Fig. 13)

2. *regula şurubului*, (fig. 13): sensul pozitiv al axei z este sensul în care

avansează şurubul care iese din mutelcă, pe direcţia axei; sensul de rotaţie al şurubului fixează sensul pozitiv al rotaţiilor în jurul axei de z, astfel încât să aducă axa de x peste axa de y printr'o rotaţie de 90 grade.

3. *regula celor trei degete* (fig. 14): degetul gros (ca axă de x), arătătorul (ca axă de y) şi degetul mijlociu (ca axă de z) ale mânei *drepte* formează un sistem drept.

Sistemul drept definit prin una din regulele precedente, echivalente, diferă de sistemul de coordonate adoptat în vechille tratate de Geometrie analitică şi chiar în unele tratate de Fizică, anume sistemul *stâng*, format din aceleaşi degete ale mânei stângi, sau prin schimbarea sensului de rotaţie al şurubului, sau prin condiţia ca bonhomme-ul lui Ampére să aibă semiaxa pozitivă de x în stânga şi cea de y în dreapta.



(Fig. 14)

Adoptarea unuia sau celuilalt din aceste sisteme este o chestie de pură convenţie. Noi adoptăm sistemul drept, în expunerea de faţă, cum am făcut şi în tratatul nostru de Mecanică.

După relaţia (16), câtimile

$$a_x = x' - x^0 \quad ; \quad a_y = y' - y^0 \quad ; \quad a_z = z' - z^0$$

sunt componentele ortogonale ale vectorului $\bar{a}$ cu origina în $A(x^0, y^0, z^0)$ şi extremitatea în $A'(x', y', z')$, faţă de sistemul $O(x, y, z)$.

Din formula (10), care defineşte componenta ortogonală pe o direcţie dată, deducem

$$(17) \qquad a_x = a\cos(\bar{a}, \bar{\imath}) \; ; \; a_y = a\cos(\bar{a}, \bar{\jmath}) \; ; \; a_z = a\cos(\bar{a}, \bar{k}).$$

Alegând o unitate de măsură, pentru lungime, comună tuturor direcţiilor din spaţiu, după *teorema lui* Pythagora, lungimea vectorului se poate exprima cu ajutorul componentelor sale, prin relaţia

$$(18) \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \; .$$

Din (17) şi (18) deducem rezultatul cunoscut din Geometria analitică, după care cosinusurile directoare ale direcţiei $\bar{a}$ faţă de direcţiile $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, sunt date de relaţiile

$$\cos(a, \bar{\imath}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} ;$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{\jmath}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} ; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} ,$$

Pentru un vector unitar $\bar{a} = 1$, componentele coincid cu cosinusurile directoare ale direcţiei sale.

După relaţiile (12), putem scrie

$$\bar{a} = a_x \bar{\imath} + a_y \bar{\jmath} + a_z \bar{k} , \tag{19}$$

vectorii fundamentali fiind liniar independenţi.

23. Unghiul a doi vectori. Numim unghi a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, unghiul format de două semidrepte orientate duse printr'un punct O şi definite prin doi vectori unitari echipolenţi versorilor lui $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, sub restricţia

$$0 \leq \text{ung. } (\bar{a}, \bar{b}) \leq \pi .$$

Prin definiţie,

$$\text{ung. } (\bar{a}, \bar{b}) = \text{ung. } (\bar{b}, \bar{a}) ;$$
$$\text{ung. } (\bar{a}, \bar{b}) = \text{ung. } (-\bar{a}, -\bar{b}) ;$$
$$\text{ung. } (\bar{a}, -\bar{b}) = \text{ung. } (-\bar{a}, \bar{b}) = \pi - \text{ung. } (\bar{a}, \bar{b}) .$$

24. Produsul scalar (numit şi produs *interior*) dintre doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este, prin definiţie scalarul

$$\bar{a} . \bar{b} = (\bar{a} . \bar{b}) = ab \cos(\bar{a}, \bar{b}) . \tag{20}$$

In membrul întâi figurează simbolii prin care se obicinueşte să se noteze produsul scalar, cu ajutorul parantezelor rotunde, despărţind cei doi vectori printr'un punct, sau fără paranteze, când orice ambiguitate este exclusă. Unii autori scriu produsul scalar sub forma $\bar{a} \times \bar{b}$. In membrul al doilea al relaţiei de definiţie (20) figurează produsul algebric dintre modùlii celor doi vectori prin cosinusul unghiului format de cei doi vectori (§ 23). Dacă $\bar{a} \neq 0$ şi $\bar{b} \neq 0$, acest produs poate să fie pozitiv (dacă unghiul este ascuţit), negativ, (dacă unghiul este obtuz), sau nul (dacă unghiul este drept).

Observăm că

$$a_b = a \cos(\bar{a}, \bar{b})$$

este componenta lui $\bar{a}$ pe direcţia lui $\bar{b}$; pozitivă sau negativă după cum unghiul celor doi vectori este ascuţit sau obtuz. De asemenea,

$$b_a = b \cos(\bar{b}, \bar{a})$$

este componenta lui $\bar{b}$ pe direcţia lui $\bar{a}$, deasemenea pozitivă sau negativă, după cum unghiul celor doi vectori este ascuţit sau obtuz.

Dacă cei doi vectori sunt perpendiculari, $a_b = b_a = 0$.

Este evident că relaţia (20) se poate pune sub forma echivalentă

$$a \,.\, b = a_b \,.\, b = b_a \,.\, a \ .$$

ceeace exprimă proprietatea: produsul scalar dintre doi vectori este egal cu modùlul unuia din vectori înmulţit cu componenta ortogonală a celuilalt pe direcţia orientată a celui dintâi.

Produsul scalar al unui vector prin el însuşi, este egal cu patratul modùlului său

$$\bar{a} \,.\, \bar{a} = a^2 \ ,$$

căci unghiul făcut de vector cu el însuşi fiind nul, cosinusul este $+1$.

Produsul scalar este un scalar propriu zis.

Pentru vectorii unui sistem cartesian, ortogonal, avem

(21) $$\bar{\imath}^2 = \bar{\jmath}^2 = \bar{k}^2 = 1 \ ; \ \bar{\jmath} \,.\, \bar{k} = \bar{k} \,.\, \bar{\imath} = \bar{\imath} \,.\, \bar{\jmath} = 0 \ .$$

Este de remarcat că produsul scalar al unui vector $\bar{a}$ printr'un vector unitar $\bar{s}$ este componenta vectorului $\bar{a}$ pe direcţia orientată de versor $\bar{s}$

$$a_s = \bar{a} \,.\, \bar{s} = a \cos(\bar{a}, \bar{s}) \,.$$

Produsul versorului unui vector printr'un vector unitar fundamental este egal cu cosinusul direcţiei vectorului faţă de axa de coordonate corespunzătoare.

Regula componentelor: componenta unui vector pe o direcţie orientată oarecare, este egală cu suma produselor componentelor vectorului pe cele trei direcţii fundamentale prin co-

sinusurile directoare ale direcției considerate în raport cu direcțiile fundamentale.

In adevăr, fie $\bar{s}$ vectorul unitar al direcției date. Inmulțind ecuația (19) scalar cu $\bar{s}$, obținem

$$\bar{a}.\bar{s}=a_x(\bar{i}.\bar{s})+a_y(\bar{j}.\bar{s})+a_z(\bar{k}.\bar{s}) ,$$

sau,

$$a_s=a_x\cos(\bar{i},\bar{s})+a_y\cos(\bar{j},\bar{s})+a_z\cos(\bar{k},\bar{s}) ,$$

relație, care exprimă teorema enunțată.

Această proprietate constitue criteriul de recunoaștere a caracterului vectorial pentru mărimile definite prin valoare absolută, direcție și sens, în spațiile euclidiene: „pentru orice vector se poate defini o componentă relativă unei direcții orientate date, ca funcție liniară de componentele față de un sistem cartesian de coordonate și de cosinusurile directoare ale direcției considerată față de același sistem de coordonate".

Proprietatea de mai sus este un caz particular al legii generale de transformare a componentelor de vectori în spațiile euclidiene. In studiul proprietăților analitice ale vectorilor se demonstrează că transformarea axelor de coordonate (în spațiile euclidiene cu un număr oarecare, finit, de dimensiuni) conduce la legea, esențială în definiția vectorilor, de transformare a componentelor corespunzătoare celor două sisteme de coordonate, lege, care este o formă generală a relației (22), după cum rezultă din expresia (20) din § 6.

Proprietățile produsului scalar.

1. Prin definiție, se verifică imediat că, α fiind un scalar diferit de zero,

$$\alpha\,(\bar{a}.\bar{b})=(\alpha\,\bar{a}.\bar{b})=(\bar{a}.\alpha\,\bar{b}) \quad ;$$

2. Produsul scalar este *comutativ:*

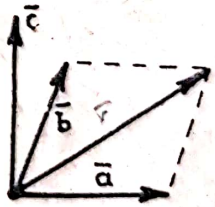
$$\bar{a}.\bar{b}=\bar{b}.\bar{a} ,$$

ceeace revine a scrie

$$a\,b\cos(\bar{a},\bar{b})=b\,a\cos(\bar{b},\bar{a}) .$$

3. Produsul scalar este *distributiv* (fig. 15):

$$\bar{c}.(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{b} .$$



(Fig. 15)

In adevăr, dacă notăm cu $\bar{r}=\bar{a}+\bar{b}$ vectorul rezultant,

vom avea

$$\bar{c}\,.\,\bar{r} = c\,r\,\cos(\bar{c},\bar{r}) = c\,a\,\cos(\bar{c},\bar{a}) + c\,b\,\cos(\bar{c},b) =$$
$$= \bar{c}\,.\,\bar{a} + \bar{c}\,.\,\bar{b} \quad ,$$

căci, $r\,\cos(\bar{c},\bar{r})$ este componenta vectorului $\bar{r}$ pe direcţia lui $\bar{c}$ şi deci, este egală cu suma componentelor vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ faţă de direcţia lui $\bar{c}$, după teorema componentelor.

Rezultă

$$(\bar{a}+\bar{b})\,.\,(\bar{c}+\bar{d}) = \bar{a}\,.\,\bar{c} + \bar{b}\,.\,\bar{c} + \bar{a}\,.\,\bar{d} + \bar{b}\,.\,\bar{d} \quad ,$$

şi aşa mai departe, pentru un număr oarecare, finit, de vectori.

Expresia analitică a produsului scalar. Exprimând vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ conform relaţiei (19), vom avea

$$\bar{a}\,.\,\bar{b} = (a_x\,\bar{\imath} + a_y\,\bar{\jmath} + a_z\,\bar{k})\,.\,(b_x\,\bar{\imath} + b_y\,\bar{\jmath} + b_z\,\bar{k}) \quad ,$$

de unde, ţinând seamă de relaţiile (21), rezultă

$$\bar{a}\,.\,\bar{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z \quad . \tag{23}$$

Membrul întâi al acestei relaţii depinde, prin definiţie, numai de modùlii vectorilor daţi şi de unghiul format de ei ; el este independent de alegerea sistemului de coordonate. Rezultă că şi membrul al doilea, care exprimă produsul scalar dintre doi vectori ca funcţie liniară şi omogenă de componentele vectorilor faţă de un anumit sistem de coordonate, este un *invariant* la transformări liniare de coordonate.

Această proprietate este adevărată pentru un număr oarecare, finit, de dimensiuni.

Rezumăm regulele de calcul ale produsului scalar :

I. Produsul scalar este comutativ $\bar{a}\,.\,\bar{b} = \bar{b}\,.\,\bar{a}$;

II. „ „ „ distributiv $(\bar{a}+\bar{b})\,.\,\bar{c} = \bar{a}\,.\,\bar{c} + \bar{b}\,.\,\bar{c}$;
$\bar{a}\,.\,(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\,.\,\bar{b} + \bar{a}\,.\,\bar{c}$;

III. Produsul printr'un număr este distributiv $(\alpha\,\bar{a})\,.\,\bar{b} = \alpha\,(\bar{a}\,.\,\bar{b})$.

Produsul scalar este un exemplu caracteristic pentru produsele comutative construite cu mărimi extensive de GRASSMANN (§ 4).

25. Caracterile generale ale spaţiului metric. După H. WEYL, observăm că forma biliniară simetrică (23) posedă o sin-

gură formă patratică ce depinde de un singur vector, anume

$$\bar{a} \,.\, \bar{a} = a^2 \quad , \tag{24}$$

care este pozitiv definită. Ea pune în evidenţă faptul că nu lungimea însăşi a vectorului depinde raţional de vector, ci patratul acestei lungimi. Această proprietate constitue conţinutul esenţial al teoremei lui PYTHAGORA. Pentru formularea acestei teoreme este necesar să alegem o unitate de măsură cu care să măsurăm lungimile vectorilor *în toate direcţiile,* ceeace necesită, după cum am mai amintit, introducerea unei metrici a spaţiului în care reprezentăm vectorii. Proprietatea de invarianţă a formei biliniare simetrice (23) şi caracterul pozitiv definit al formei patratice asociate (24), constitue *axioma metrică* a spaţiului euclidian : „după alegerea unui vector unitar, doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ determină univoc un scalar $(\bar{a} \,.\, \bar{b})$, ca funcţie biliniară simetrică de cei doi vectori, iar forma patratică asociată $(\bar{a} \,.\, \bar{a})$ este pozitiv definită“ (WEYL).

Aceste consideraţii se pot extinde şi pentru un S_n euclidian, metric. Intr'un astfel de spaţiu se defineşte o *formă biliniară* prin

$$Q(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \, x_i \, y_j \quad , \tag{25}$$

unde α_{ij} sunt numere. Această expresie este o formă generală a expresiei (23). Forma (25) *nu este degenerată* dacă nu este identic nulă, pentru orice valoare a lui $\bar{y}$, decât dacă $\bar{x} = 0$; ceeace însemnează că determinantul $|\alpha_{ij}| \neq 0$. Dacă însă $Q(\bar{x}, \bar{y}) = Q(\bar{x}, \bar{y})$, forma este simetrică; atunci toţi $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Fiecărei forme biliniare $Q(\bar{x}, \bar{y})$ îi corespunde o *formă patratică* şi numai una singură care depinde de un singur vector.

$$Q(\bar{x}) = Q(\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \, x_i \, x_j \quad ; \tag{26}$$

ea este un scalar, deci invariat la o transformare oarecare liniară de coordonate.

Intr'un S_n axioma metrică sună : „după alegerea unui vector unitar $\bar{u}$, doi vectori $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ determină univoc un scalar $(\bar{x} \,.\, \bar{y}) = Q(\bar{x}, \bar{y})$, ca funcţie biliniară simetrică de cei doi vec-

tori; forma patratică corespunzătoare $(\bar{x} \,.\, \bar{x}) = Q(\bar{x}, \bar{x})$ este pozitiv definită. $Q(\bar{u}) = +1$" (WEYL).

Prin aceasta este definit caracterul fundamental al spaţiului euclidian metric. Mai târziu vom extinde aceste definiţii şi pentru un spaţiu riemannian metric.

Faţă de un sistem cartesian de coordonate ortogonale, orice vector putându-se pune sub forma

$$\bar{x} = \sum_{1}^{n} x_i \, \bar{u}_i \quad ,$$

rezultă,

$$Q(\bar{x}) = \Sigma \, x_i^2 \quad ; \tag{27}$$

aşadar,

$$Q(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} .$$

unde δ_i^j este *simbolul lui* KRONECKER.

Dacă efectuăm o transformare de coordonate de forma (17) § 6, cum

$$\Sigma \, x_i^2 = \Sigma \, x'^2_i \quad ,$$

rezultă *condiţia de ortogonalitate*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \, \alpha_{kj} = \delta_i^j \tag{29}$$

Expresia (21) § 6 a elementului liniar într'un S_n, are, în adevăr, forma patratică pozitiv definită (26). Pentru un sistem cartesian, ea va lua forma (22), identică formei (27). Relaţia (25) § 6, unită cu (29), ne arată că

$$g_{ij} = \delta_i^j \quad , \tag{30}$$

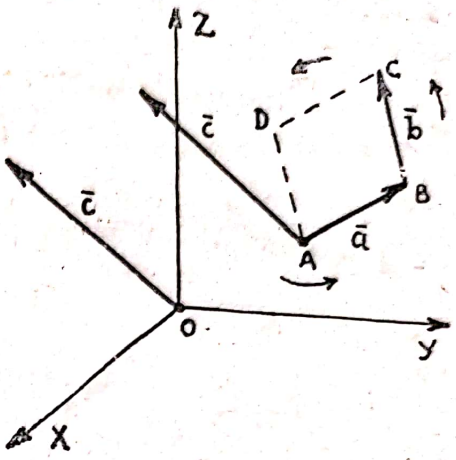
pentru un sistem cartesian de coordonate ortogonale.

26. Produsul vectorial (numit şi produs *exterior*). Am amintit că există anumite mărimi fizice şi construcţii geometrice care nu pot să fie identificabile translaţiilor, dar care posedă totuşi proprietăţile operative ale vectorilor. Astfel de mărimi satisfac teoriei lui GRASSMANN, schiţată în § 1 şi § 4, şi sunt numite *mărimi plane*.

Scanned with OKEN Scanner

Fie doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, neparaleli şi diferiţi de zero (fig. 16).

In planul lor construim paralelogramul având aceşti doi vectori ca laturi, ducând printr'un punct al planului segmente echipolente cu cei doi vectori daţi, în ordinea succesiunii lor. Fixăm apoi, pe paralelogram, ca *sens de circulaţie pozitiv*, sensul vectorului $\bar{a}$. Direcţia planului determinat de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, împreună cu aria suprafeţei paralelogramului astfel construit, arie egală cu scalarul pozitiv



(Fig. 16)

$$ab \sin (\bar{a}, \bar{b}) , \tag{31}$$

precum şi sensul de circulaţie admis, definesc un element geometric, numit „mărime plană“. In expresia (31) a şi b sunt modùlii celor doi vectori daţi, iar unghiul făcut de cei doi vectori este definit conform convenţiei de la § 23. Expresia (31) este, prin urmare un scalar pozitiv: aria paralelogramului construit cu cei doi vectori.

Intervertirea ordinii de succesiune a celor doi vectori produce schimbarea sensului de circulaţie de pe paralelogram.

Dacă unul din vectori este nul, dacă vectorii sunt paraleli sau coliniari, mărimea plană este nulă. Două mărimi plane sunt egale dacă au planele paralele, au aceiaşi arie şi acelaş sens de circulaţie. Două mărimi plane nule sunt egale.

Este evident că o astfel de mărime nu poate să fie identificată cu o translaţie. Totuşi i se poate asocia o mărime geometrică posedând proprietăţile operative ale vectorilor. Să considerăm mărimea definită prin: 1. valoare absolută, egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi, dată de expresia (31); 2. direcţie, determinată de perpendiculara pe planul mărimii plane, format de cei doi vectori, şi 3. sens, definit ca pozitiv, dacă sistemul celor trei direcţii: vectorul $\bar{a}$, vectorul $\bar{b}$ şi perpendiculara pe planul lor, formează un sistem drept (§ 22). Schimbarea ordinii vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ atrage schimbarea semnului mărimii geometrice astfel definite.

O astfel de mărime posedă toate elementele prin care am

caracterizat un vector. Rămâne, pentru a putea să-i acordăm în adevăr denumirea de vector, în sensul definiţiei fundamentale (§ 9), să verificăm dacă ea satisface la regula componentelor (§ 24, relaţia 22), ceeace revine a verifica dacă noua mărime este o mărime extensivă. Vom constata mai jos că această proprietate este satisfăcută. (Compară şi *Mecanica* § 204).

In aceste condiţii, putem să definim un *vector*, reprezentant al mărimii definită mai sus, prin relaţia

$$\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}], \tag{32}$$

exprimată prin simbolul din membru al doilea (paranteze ascuţite şi o virgulă între vectori), având valoarea absolută (31), direcţia perpendicularei pe planul format de cei doi vectori şi sensul definit prin rotaţia pozitivă, în jurul normalei de plan, care aduce primul vector peste al doilea, printr'o rotaţie mai mică de 180 grade, după regula de formare a unui sistem drept (§ 22).

Numim o astfel de operaţie între vectorii daţi, exprimată prin simbolul (31), *produs vectorial*, sau *produs exterior* (întru cât vectorul $\bar{c}$ este exterior planului mărimii plane).

Unii autori întrebuinţează simbolul $\wedge$ sau semnul $\times$, pentru a desemna un produs vectorial.

Produsul vectorial este un exemplu caracteristic pentru produsele anticomutative studiate de GRASSMANN (§ 4).

Operaţiile de calcul cu mărimile plane satisfac axiomelor enunţate în § 1 şi § 4. Operaţiile cu vectorii de natura lui $\bar{c}$, satisfac axiomelor fundamentale de la § 9. Aceşti vectori, numiţi *vectori axiali*, nu pot fi identificaţi translaţiilor (vectori *polari*), iar posibilitatea de a-i supune regulilor de calcul ale vectorilor polari, este o proprietate satisfăcută numai în spaţiile euclidiene cu trei dimensiuni, după cum vom vedea mai târziu.

Prin construcţie, vectorul $\bar{c}$ (produsul vectorial al vectorilor daţi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$) este perpendicular pe fiecare din vectorii daţi. Vectorul $\bar{c}$ este nul când unul din cei doi vectori daţi este nul sau cei doi vectori daţi sunt paraleli. Vectorul $\bar{c}$ schimbă semnul dacă se trece de la un sistem drept de coordonate la unul stâng (§ 22).

Aplicând definiţia (32) vectorilor unitari ai unui sistem car-

tesian ortogonal, găsim următoarele relaţii

(33) $[\bar{j},\bar{k}] = -[\bar{k},\bar{j}] = \bar{i}$, $[\bar{i},\bar{j}] = -[\bar{j},\bar{i}] = \bar{k}$,

$[\bar{k},\bar{i}] = -[\bar{i},\bar{k}] = \bar{j}$, $[\bar{i},\bar{i}] = [\bar{j},\bar{j}] = [\bar{k},\bar{k}] = 0$.

Proprietăţile produsului vectorial.

1. Prin definiţie, se verifică imediat că, α fiind un scalar diferit de zero,

$$\alpha[\bar{a},\bar{b}] = [\alpha\bar{a},\bar{b}] = [\bar{a},\alpha\bar{b}] .$$

2. Produsul vectorial este *anticomutativ*:

$$[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}] ;$$

ceeace rezultă prin definiţie şi în conformitate cu comutativitatea produsului dintre scalari.

3. Produsul vectorial este *distributiv*:

$$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c}] .$$

Pentru a stabili această proprietate este nevoe să deducem două relaţii preliminare. Anume

1. Vectorul $[\bar{a},\bar{b}]$ este egal cu vectorul $[\bar{a}_1,\bar{b}]$, unde $\bar{a}_1$ este proiecţia lui $\bar{a}$ pe un plan perpendicular pe $\bar{b}$, proiecţie efectuată astfel în cât să se păstreze ordinea de succesiune a celor doi vectori. (fig. 17).

In adevăr,

$$|[\bar{a},\bar{b}]| = a.b.\ \sin(\bar{a},\bar{b})\ ;\ \text{iar}\ |[\bar{a}_1,\bar{b}] = a_1 b .$$

căci $\sin(\bar{a}_1,\bar{b}) = 1$, deoarece vectorii $\bar{a}_1$ şi $\bar{b}$ sunt perpendiculari. Insă $a_1 = a.\ \sin(\bar{a},\bar{b})$.

Urmează că

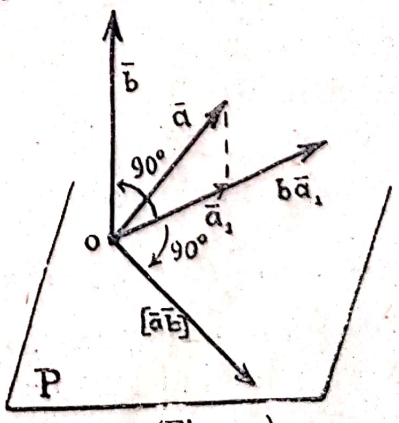
$$|[\bar{a}_1,\bar{b}]| = a.b.\ \sin(\bar{a},\bar{b})$$

sau,

$$|[\bar{a},\bar{b}]| = |[\bar{a}_1,\bar{b}]| .$$

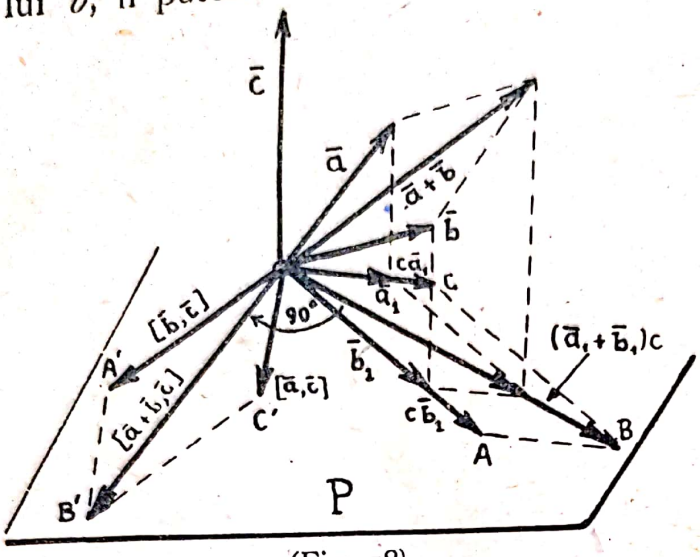
Vectorii $[\bar{a},\bar{b}]$ şi $[\bar{a}_1,\bar{b}]$ au aceiaşi direcţie, căci $\bar{a}$, $\bar{a}_1$ şi $\bar{b}$ sunt coplanari şi deci direcţia lor comună este direcţia normalei la planul comun celor trei vectori. Vectorii $[\bar{a},\bar{b}]$ şi $[\bar{a}_1,\bar{b}]$ au acelaş sens, căci $\bar{a}_1$ păstrează sensul lui $\bar{a}$, prin construcţie.

β) Dacă dilatăm, în planul P perpendicular pe $\bar{b}$, vectorul $\bar{a}_1$ cu cantitatea scalară b (adică dacă înmulţim vectorul $\bar{a}_1$ cu scalarul b) obţinem vectorul $b\bar{a}_1$ (fig. 17).



(Fig. 17)

Dacă, apoi, rotim acest vector de 90°, în jurul vectorului $\bar{b}$, îl putem aduce să coincidă cu vectorul $[\bar{a}, \bar{b}]$, respectiv $[\bar{a}_1, \bar{b}]$, căci atât dreapta suport a vectorului obţinut prin operaţiile de mai sus, cât şi suportul vectorului $[\bar{a}, \bar{b}]$, sunt perpendiculare pe planul $\bar{a}, \bar{b}$; iar sensul este şi el acelaş, căci o rotaţie directă în jurul lui $[\bar{a}, \bar{b}]$ aduce pe $\bar{a}$ peste $\bar{b}$.



(Fig. 18)

Să trecem la demonstraţia propriu zisă. (fig. 18). Considerăm trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$; ducem un plan P, perpendicular pe $\bar{c}$ şi proiectăm separat, pe acest plan, vectorii $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Obţinem vectorii $\bar{a}_1+\bar{b}_1$, $\bar{a}_1$ şi $\bar{b}_1$. Dilatăm pe $\bar{a}_1$ cu $\bar{c}$; obţinem, conform observaţiei (β) de mai sus, vectorul $c\,\bar{a}_1$; îl rotim în planul P de 90° şi obţinem vectorul $[\bar{a}, \bar{c}]$. La fel vom proceda şi cu vectorii $\bar{b}_1$ şi $\bar{a}_1+\bar{b}_1$; obţinem astfel vectorii $[\bar{a}, \bar{b}]$ şi $[\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}]$. Toţi aceşti vectori sunt în planul P. Cum $c(a_1+b_1)=ca_1+cb_1$ rezultă, după construcţia de mai sus,

$$[\bar{a}, \bar{c}]+[\bar{b}, \bar{c}]=[\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}]\ ,$$

păstrând sensurile; astfel încât, totul revine la o rotaţie de 90° a paralelogramului O A B C, în planul P, până ajunge la poziţia O A′ B′ C′.

Expresia analitică a produsului vectorial. Exprimând cei doi vectori sub forma (19), cu ajutorul vectorilor unitari fundamentali, putem efectua produsul vectorial, în virtutea distributivităţii, operaţia reducându-se la produse vectoriale între vectorii fundamentali. Ţinând seamă de relaţiile (33), găsim

$$(34)\quad [\bar{a}, \bar{b}]=(a_y b_z - a_z b_y)\,\bar{\imath}+(a_z b_x - a_x b_z)\,\bar{\jmath}+(a_x b_y - a_y b_x)\,\bar{k}$$

relaţie, care implică satisfacerea regulii componentelor. In adevăr, înmulţind (34) cu vectorul unitar al unei direcţii orientate, obţinem o expresie de forma (22), coeficienţii vectorilor unitari

fiind componentele produsului vectorial față de axele de coordonate cartesiene, ortogonale. Este ușor de verificat că expresia (34) se poate pune sub formă de determinant

$$(35) \qquad [\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

linia întâia fiind ocupată de vectorii unitari ai axelor, linia a doua de componentele primului vector și linia a treia de componentele vectorului al doilea. Desvoltarea determinatului precedent după prima linie conduce, evident, la relația (34); minorii elementelor primii linii fiind componentele produsului vectorial față de axele respective.

Rezumăm regulele de calcul ale produsului vectorial:

I. Produsul vectorial este anticomutativ: $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$;

II. „ „ „ distributiv: $[(\bar{a}+\bar{b}), \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$;
$[\bar{a}, (\bar{b}+\bar{c})] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$;

III. Produsul printr'un număr este distributiv: $[\alpha \bar{a}, \bar{b}] = \alpha [\bar{a}, \bar{b}]$.

27. Produse mixte de mai mulți vectori.

1. Produsul dintre un vector și un produs scalar a altor doi vectori

$$\bar{c}\,(\bar{a}.\bar{b})$$

este evident un vector având ca modùl, modùlul lui $\bar{c}$ înmulțit cu valoarea absolută a produsului scalar, aceiași direcție și același sens sau sens contrar cu $\bar{c}$, după cum scalarul este pozitiv sau negativ.

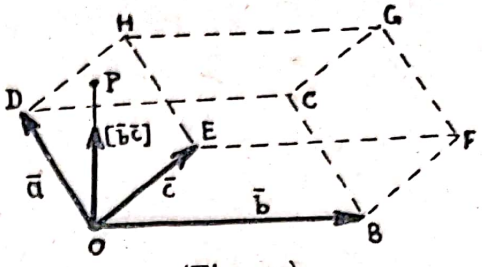
2. Produsul scalar dintre un vector și un produs vectorial de doi vectori necoliniari (fig. 19). Avem relațiile

$$\bar{a}.[\bar{b}, \bar{c}] = \bar{b}.[\bar{c}, \bar{a}] = \bar{c}.[\bar{a}, \bar{b}] = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

Observăm că acest produs schimbă semnul când schimbăm orientarea axelor; prin urmare nu este un scalar propriu zis, ci un *pseudo-scalar*. El este nul când vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari.

Scanned with OKEN Scanner

Când $\bar{a}$, b şi $\bar{c}$ nu sunt în acelaş plan, putem distinge două cazuri, după cum orientarea paralelipipedului format pe cei trei vectori ca muchii, este dreaptă sau stângă. Pe figură, de exemplu, avem orientarea dreaptă, adică, vectorul $[\bar{b}, \bar{c}]$ are acelaş sens cu vectorul $\bar{a}$. Apoi, $[\bar{b}, \bar{c}]$ este perpendicular pe planul format de $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, fiind îndreptat în acelaş sens cu $\bar{a}$. Acest vector $[\bar{b}, \bar{c}]$ străbate faţa opusă feţei $\bar{b}$, $\bar{c}$ a paralelipipedului, în punctul P, aşa încât OP este înălţime în paralelipiped; deci OP este proecţia lui $\bar{a}$ pe direcţia vectorului $[\bar{b}, \bar{c}]$. Rezultă deci că $OP.\,|[\bar{b}, \bar{c}]|$ este chiar valoarea produsului scalar dintre $\bar{a}$ şi $[\bar{b}, \bar{c}]$, pe care o căutăm; ori, cum



(Fig. 19)

$|[\bar{b}, \bar{c}]|$ = aria bazei, urmează că $\bar{a}\,[\bar{b}, \bar{c}] = \bar{a}\,|[\bar{b}, \bar{c}]|\cos(\bar{a}, \overrightarrow{OP}) = OP.\,|[\bar{b}, \bar{c}]|$ = volumul paralelipipedului. Dacă permutăm circular vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, adică schimbăm baza paralelipipedului, vom obţine aceiaşi valoare, şi anume tot volumul paralelipipedului, ceea ce demonstrează relaţia enunţată.

Putem exprima produsul $\bar{a}\,[\bar{b}, \bar{c}]$ cu ajutorul componentelor vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, scriind:

$$(36)\qquad \bar{a}\,[\bar{b}, \bar{c}] = \bar{b}\,[\bar{c}, \bar{a}] = \bar{c}\,[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}),$$

ceeace se verifică astfel: observăm că punând

$$\bar{u} = [\bar{b}, \bar{c}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

vom avea

$$(\bar{a}, \bar{u}) = a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix};$$

ori, expresia din membrul al doilea este tocmai desvoltarea determinantului de mai sus, după elementele primei linii.

3. Produsul vectorial dintre un vector şi un produs vectorial de doi vectori. Avem relaţia :

$$(37) \qquad [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}.\ \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}.\ \bar{b})$$

In primul rând să observăm că produsul $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$ este un vector. Să punem : $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = \bar{f}$. Vectorul $\bar{f}$ este perpendicular pe $\bar{a}$ şi pe $[\bar{b}, \bar{c}]$, deci $\bar{f}$ este în acelaş plan cu vectorii $\bar{b}$ şi $\bar{c}$. Putem atunci exprima în planul format de $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ pe $\bar{f}$ ca funcţie liniară de $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, adică,

$$\bar{f} = \alpha\bar{b} + \beta\bar{c},$$

unde α şi β sunt scalari pozitivi. Pentru a găsi valorile lor, să înmulţim relaţia de mai sus scalar cu $\bar{a}$. Cum $\bar{a}$ este perpendicular pe $\bar{f}$, rezultă :

$$(\bar{a}.\ \bar{f}) = 0 = \alpha(\bar{a},\ \bar{b}) + \beta(\bar{a},\ \bar{c})$$

relaţie satisfăcută identic punând

$$\alpha = +\gamma(\bar{a}.\ \bar{c})$$
$$\beta = -\gamma(\bar{a}.\ \bar{b}). \qquad (\gamma \text{ fiind un scalar})$$

Rezultă $$\bar{f} = \gamma\{(\bar{a}.\ \bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}.\ \bar{b})\,\bar{c}\}.$$

Această relaţie este adevărată oricum ar fi vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$; deci şi în cazurile când aceşti vectori iau nişte poziţii particulare. Ne servim de acest fapt pentru a determina pe γ. Să luăm, de exemplu, $\bar{a}$ în planul determinat de vectorii $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ şi perpendicular pe $\bar{b}$; atunci $\bar{a}$ este perpendicular pe $[\bar{b}, \bar{c}]$. Modulul lui $\bar{f}$ va fi egal cu $a.\ b.\ c.\ \sin(\bar{b}, \bar{c})$.

Membrul al 2-lea se reduce la $\gamma(\bar{a}.\ \bar{c}).\ \bar{b}$, căci $(\bar{a}.\ \bar{b}) = 0$, deoarece $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Deci, modulul membrului al doilea fiind $\gamma\ a.\ c\ b.\ \cos(\bar{a}, \bar{c})$ şi cum $\bar{b} \perp \bar{a}$ avem, $\cos(\bar{a}, \bar{c}) = \sin(\bar{b}, \bar{c})$; rezultă imediat $\gamma = 1$. Apoi $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$ este un vector perpendicular pe $\bar{c}$ şi conţinut în planul $\bar{b}$, $\bar{c}$ având acelaş sens pozitiv ca şi $\bar{b}$ sau $\bar{c}$. Deci, fiind perpendicular pe $\bar{a}$ el are chiar direcţia lui $\bar{b}$ (care este perpendicular pe $\bar{a}$) şi acelaş sens. Aşadar, $\gamma = +1$.

4. Produsul scalar dintre două produse vectoriale :

$$(38) \qquad [\bar{a}, \bar{b}].\ [\bar{c}, \bar{d}] = (\bar{a}.\ \bar{c})\ (\bar{b}.\ \bar{d}) - (\bar{b}.\ \bar{c})\ (\bar{a}.\ \bar{d})$$

Scanned with OKEN Scanner

Punem, $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{u}$. Conform relaţiunilor stabilite mai sus avem

$\bar{u}[\bar{c}, \bar{d}] = \bar{c}\,[\bar{d}, \bar{u}]$; dar $[\bar{d}, \bar{u}] = [\bar{d}, [\bar{a}, \bar{b}]] = \bar{a}\,(\bar{d}.\ \bar{b}) - \bar{b}\,(\bar{d}.\ \bar{a})$.

Deci, $\bar{c}\,[\bar{a}, \bar{u}] = \bar{c}\,(\bar{a}\,(\bar{d}.\ \bar{b}) - \bar{b}\,(\bar{d}.\ \bar{a}))$

sau $[\bar{a}, \bar{b}].[\bar{c}, \bar{d}] = (\bar{a}.\ \bar{c})\,(\bar{b}.\ \bar{d}) - (\bar{b}.\ \bar{c})\,(\bar{a}.\ \bar{d})$

Identitatea cunoscută a lui LAGRANGE:

(39) $$[\bar{a}, \bar{b}]^2 = a^2 b^2 - (\bar{a}.\ \bar{b})^2,$$

este un caz particular al relaţiei (38): $\bar{a} = \bar{c}$; $\bar{b} = \bar{d}$.

28. Vectori reciproci. Fie trei direcţii oarecare determinate de vectorii unitari $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$, necoplanari, independenţi. Un vector dat se poate, precum am văzut, descompune dealungul acestor direcţii; fie

(40) $$\bar{a} = a_1 \bar{s}_1 + a_2 \bar{s}_2 + a_3 \bar{s}_3 \ .$$

Ne propunem să determinăm expresiile celor trei componente oblice a_1, a_2, a_3, cu ajutorul datelor cunoscute. In acest scop, să înmulţim succesiv ecuaţia precedentă scalar cu $[\bar{s}_2, \bar{s}_3]$, $[\bar{s}_3, \bar{s}_1]$ şi $[\bar{s}_1, \bar{s}_2]$. Obţinem;

(41) $$a_1 = \frac{(\bar{a}, \bar{s}_2, \bar{s}_3)}{S} \ ; \ a_2 = \frac{(\bar{a}, \bar{s}_3, \bar{s}_1)}{S} \ ; \ a_3 = \frac{(\bar{a}, \bar{s}_1, \bar{s}_2)}{S} \ ;$$

unde am făcut notaţia

$$(\bar{s}_1, \bar{s}_2.\ \bar{s}_3) = S \ .$$

Aşadar,

(42) $$\bar{a} = \frac{1}{S}\left\{ (\bar{a}, \bar{s}_2, \bar{s}_3)\,\bar{s}_1 + (\bar{a}, \bar{s}_3, \bar{s}_1)\,\bar{s}_2 + (\bar{a}, \bar{s}_1, \bar{s}_2)\,\bar{s}_3 \right\}$$

relaţie, care exprimă descompunerea vectorului pe cele trei direcţii.

Să considerăm vectorii

(43) $$\bar{s}'_1 = \frac{[\bar{s}_2, \bar{s}_3]}{S} \ ; \ \bar{s}'_2 = \frac{[\bar{s}_3, \bar{s}_1]}{S} \ ; \ \bar{s}'_3 = \frac{[\bar{s}_1, \bar{s}]_2}{S} \ ,$$

numiţi *vectori reciproci* faţă de $\bar{s}_1$ $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$.

Din (41) şi (43) rezultă

(44) $$a_1 = \bar{a}.\ \bar{s}'_1 \ ; \ a_2 = \bar{a}.\ \bar{s}'_2 \ ; \ a_3 = \bar{a}.\ \bar{s}'_3 \ ;$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încât (40) se scrie

$$(45) \qquad \bar{a} = (\bar{a}.\,\bar{s}'_1)\,\bar{s}_1 + (\bar{a}.\,\bar{s}'_2)\,\bar{s}_2 + (\bar{a}.\,\bar{s}'_3)\,\bar{s}_3 \quad .$$

Se verifică imediat proprietăţile următoare

$$\bar{s}_1.\,\bar{s}'_1 = \bar{s}_2.\,\bar{s}'_2 = \bar{s}_3.\,\bar{s}'_3 = 1 \quad ;$$

$$(46) \quad \bar{s}_1.\,\bar{s}'_2 = \bar{s}_1.\,\bar{s}'_3 = \bar{s}_2.\,\bar{s}'_1 = \bar{s}_2.\,\bar{s}'_3 = \bar{s}_3.\,\bar{s}'_1 = \bar{s}_3.\,\bar{s}'_2 = 0 \quad ;$$

$$\bar{s}_1 = \frac{[\bar{s}'_2,\,\bar{s}'_3]}{S'} \quad ; \quad \bar{s}_2 = \frac{[\bar{s}'_3,\,\bar{s}'_1]}{S'} \quad ; \quad \bar{s}_3 = \frac{[\bar{s}'_1,\,\bar{s}'_2]}{S'} \quad ;$$

unde am pus

$$(\bar{s}'_1\,,\,\bar{s}'_2\,,\,\bar{s}'_3) = S' \quad .$$

Din proprietăţile determinanţilor se verifică uşor că determinanţii S şi S' sunt inverşi

$$S\,.\,S' = +1 \quad .$$

Putem să descompunem vectorul $\bar{a}$ şi după direcţiile vectorilor reciproci.

In adevăr, punând

$$(47) \qquad \bar{a} = a'_1\,\bar{s}'_1 + a'_2\,\bar{s}'_2 + a'_3\,\bar{s}'_3 \quad ,$$

aplicând operaţia similară celei prin care am obţinut pe (41), şi ţinând seamă de relaţiile (46), găsim

$$(48) \qquad a'_1 = \bar{a}.\,\bar{s}_1 \quad ; \quad a'_2 = \bar{a}.\,\bar{s}_2 \quad ; \quad a'_3 = \bar{a}.\,\bar{s}_3 \quad ,$$

şi prin urmare,

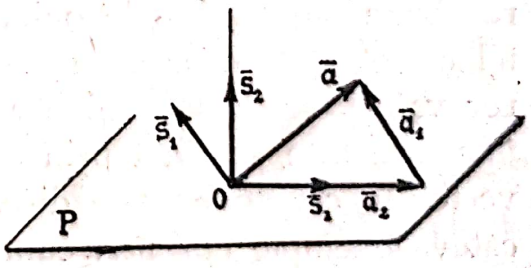
$$(49) \qquad \bar{a} = (\bar{a}.\,\bar{s}_1)\,\bar{s}'_1 + (\bar{a}.\,\bar{s}_2)\,\bar{s}'_2 + (\bar{a}.\,\bar{s}_3)\,\bar{s}'_3 \quad ,$$

expresie simetrică faţă de (45), în $\bar{s}$ şi $\bar{s}'$.

In cazul coordonatelor dreptunghiulare, vectorii $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$, sunt proprii lor reciproci, căci determinantul $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}) = 1$, şi deci,

$$(50) \quad \bar{\imath}' = [\bar{\jmath}, \bar{k}] = \bar{\imath} \quad ; \quad \bar{\jmath}' = [\bar{k}, \bar{\imath}] = \bar{\jmath} \quad ; \quad \bar{k}' = [\bar{\imath}, \bar{\jmath}] = \bar{k} \quad .$$

Aplicaţie. Descompunerea unui vector pe o direcţie $\bar{s}_1$ şi pe un plan P perpendicular pe o direcţie $\bar{s}_2$ oblică faţă de prima, componenta din P fiind proiecţia vectorului efectuată paralel cu prima direcţie. (fig. 20). Fie $\bar{s}_3$, perpendicular pe $\bar{s}_2$, vectorul unitar al proiecţiei lui $\bar{a}$



(Fig. 20)

pe planul P, efectuată paralel cu $\bar{s}$. Avem

$$\bar{a} = a_1 \bar{s}_1 + a_2 \bar{s}_3 \quad . \tag{51}$$

Inmulţind scalar cu $\bar{s}_2$, obţinem

$$a_1 = \frac{\bar{a} \cdot \bar{s}_2}{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2} \quad ; \tag{51'}$$

înmulţind vectorial cu $\bar{s}_1$, obţinem

$$[\bar{a}, \bar{s}_1] = a_2 [\bar{s}_3, \bar{s}_1] \quad .$$

Să înmulţim ultima relaţie vectorial cu $\bar{s}_2$; se obţine

$$[\bar{s}_2, [\bar{a}, \bar{s}_1]] = a_2 \, (\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2) \, \bar{s}_3 \quad .$$

Scoatem valoarea lui $a_2 \bar{s}_3$ şi o întroducem în (51), împreună cu valoarea (51'); se obţine, în definitiv,

$$\bar{a} = \frac{1}{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2} \left\{ \bar{a} \cdot \bar{s}_2 + [\bar{s}_2, [\bar{a}, \bar{s}_1]] \right\} \quad .$$

Dacă $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \bar{n}$, deducem din relaţia precedentă,

$$\bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{n} + [\bar{n}, [\bar{a}, \bar{n}]] \, . \tag{52}$$

Ultima relaţie poate să fie folosită, de exemplu, la descompunerea unui vector pe planul tangent al unei suprafeţe şi pe direcţia normalei la suprafaţa considerată, în acelaş punct în care a fost dus planul tangent: componenta pe normală este dată de primul termen; componenta pe plan este dată de termenul al doilea, din membrul al doilea, al relaţiei (52).

29. Ecuaţii vectoriale.[1]) In unele probleme se pot prezenta relaţii între cantităţi scalare şi vectoriale cunoscute şi vectori necunoscuţi, urmând a se determina valorile acestor necunoscute vectoriale din ecuaţia dată. Aceste ecuaţii nu pot să fie rezolvate după normele obicinuite. Metoda vectorială constă în înlocuirea *vectorilor* necunoscuţi prin *scalari* necunoscuţi a căror valori să se determine apoi prin metodele curente. Această înlocuire este posibilă prin operaţia de descompunere a unui vector în componente pe direcţii cunoscute. Arătăm, mai jos, prin câteva exemple curente, cum se tratează o astfel de problemă.

1) V. SPIELREIN, l. c.

1. Să se determine un vector $\bar{x}$ când se cunoaşte produsul său scalar printr'un vector dat.

Se dă aşadar, ecuaţia

$$\bar{x} \cdot \bar{a} = \alpha,$$

unde $\bar{a}$ este un vector cunoscut şi α un scalar cunoscut. Să afle vectorul necunoscut $\bar{x}$.

In acest scop, descompunem vectorul $\bar{x}$ în două componente: un vector paralel cu $\bar{a}$ şi un al doilea $\lambda\bar{u}$ perpendicular pe $\bar{a}$. Fie

$$\bar{x} = \mu\,\bar{a} + \lambda\,\bar{u},$$

descompunerea preconizată. In primul rând, înmulţind această relaţie scalar cu $\bar{a}$ se obţine $\mu = \alpha : a^2$. Apoi, $\lambda\bar{u}$ trebue să fie un vector perpendicular pe $\bar{a}$; el va putea deci să fie pus sub forma

$$\lambda\bar{u} = [\bar{a}, \bar{\varepsilon}],$$

unde vectorul $\bar{\varepsilon}$ este un vector arbitrar ca direcţie, mărime şi sens.

Aşadar, avem în definitiv

$$\bar{x} = \alpha\frac{\bar{a}}{a^2} + [\bar{a}, \bar{\varepsilon}],$$

relaţie, care determină pe $\bar{a}$ până la un vector arbitrar $\bar{\varepsilon}$. Problema nu este deci unic determinată, ci admite o infinitate de soluţii.

2. Să se determine un vector $\bar{x}$ când sunt cunoscute produsele scalare ale acestui vector prin *doi* vectori daţi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Aşadar, ni se dau ecuaţiile

$$\bar{x} \cdot \bar{a} = \alpha\ ; \quad \bar{x} \cdot \bar{b} = \beta,$$

α şi β fiind scalari cunoscuţi.

In acest scop, descompunem vectorul $\bar{x}$ pe trei direcţii date: direcţia lui $\bar{a}$, direcţia lui $\bar{b}$ şi pe o direcţie perpendiculară pe planul format de $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, care se poate pune sub forma $\lambda\,[\bar{a}, \bar{b}]$. Avem, deci

$$x = \lambda_1\,\bar{a} + \lambda_2\,\bar{b} + \lambda\,[\bar{a}, \bar{b}]. \tag{53}$$

Inmulţim scalar cu $\bar{a}$ şi $\bar{b}$; obţinem

$$\lambda_1 a^2 + \lambda_2 (\bar{a} \,.\, \bar{b}) = \alpha \,,$$
$$\lambda_1 (\bar{a} \,.\, \bar{b}) + \lambda_2 b^2 = \beta \,,$$

ecuaţii, din care se deduce, ţinând seamă de identitatea lui LAGRANGE (39),

$$\lambda_1 = \frac{\alpha a^2 - \beta (\bar{a} \,.\, \bar{b})}{[\bar{a}, \bar{b}]^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha (\bar{a} \,.\, \bar{b}) - \beta b^2}{[\bar{a}, \bar{b}]^2} \,.$$

Introducem aceste valori în (53), grupăm termenii şi ţinem seamă de relaţiile (38); rezultă, în definitiv,

$$x = \frac{\alpha}{[\bar{b}, \bar{a}]^2} [\bar{a}, [\bar{a}, \bar{b}]] + \frac{\beta}{[\bar{a}, \bar{b}]^2} [\bar{a}, [\bar{a}, \bar{b}]] + \lambda [\bar{a}, \bar{b}] \,.$$

Nici această problemă nu are o determinare unică; ea posedă o infinitate de soluţii, dar gradul de infinitudine este inferior celui din problema precedentă, direcţia vectorului arbitrar fiind determinată.

3. Să se determine un vector, cunoscând produsele sale scalare prin *trei* vectori daţi:

$$\bar{x} \,.\, \bar{a} = \alpha \quad ; \quad \bar{x} \,.\, \bar{b} = \beta \quad ; \quad \bar{x} \,.\, \bar{c} = \gamma \,.$$

Dacă determinantul $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ este diferit de zero, deci dacă cei trei vectori daţi nu sunt coplanari, problema admite o singură soluţie. In adevăr, fie $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, vectorii reciproci celor trei vectori daţi. Inmulţim prima ecuaţie cu $\bar{a}'$, a doua cu $\bar{b}'$ şi a treia cu $\bar{c}'$; apoi le adunăm. Ţinând seama de (49), obţinem

$$x = \alpha \bar{a}' + \beta \bar{b}' + \gamma \bar{c}' \,,$$

ceeace rezolvă problema, unic.

4. Să se determine un vector $\bar{x}$ când se cunoaşte produsul său vectorial printr'un vector dat. Se dă deci ecuaţia

(54) $$[\bar{x}, \bar{a}] = \bar{\alpha} \,.$$

Observăm, în primul rând, că $\bar{\alpha}$ nu poate să fie absolut arbitrar, căci el trebue să satisfacă identic relaţiei $(\bar{a} \,.\, \bar{\alpha}) = 0$, (fiind perpendicular, prin definiţie, pe $\bar{a}$).

Să descompunem vectorul căutat după direcţia lui $\bar{a}$ şi direcţia $\bar{\alpha}$ perpendiculară pe $\bar{a}$. Avem, λ şi μ fiind doi scalari,

$$x = \lambda \bar{a} + \mu \bar{\alpha} .$$

Inmulţind ecuaţia dată (54) vectorial cu $\bar{a}$, obţinem

$$[\bar{a}, [\bar{x}, \bar{a}]] = [\bar{a}, \bar{\alpha}] ,$$

sau,

$$\bar{x} a^2 - (\bar{a} . \bar{x}) \bar{a} = [\bar{a}, \bar{\alpha}] ,$$

şi deci,

$$\bar{x} = \lambda \bar{a} + \frac{[\bar{a}, \bar{\alpha}]}{a^2} ;$$

aşadar, vectorul căutat este determinat până la un vector arbitrar de direcţia vectorului dat (scalarul λ rămânând arbitrar).

5. Să se determine un vector $\bar{x}$ când se cunosc produsele sale vectoriale prin doi vectori daţi.

Avem ecuaţiile

$$[\bar{x}, \bar{a}] = \bar{\alpha} ; \quad [\bar{x}, \bar{b}] = \bar{\beta} , \tag{55}$$

vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ fiind daţi la voe; vectorii $\bar{\alpha}$ şi $\bar{\beta}$ fiind daţi sub restricţiile $\bar{a} . \bar{\alpha} = 0$; $\bar{a} . \bar{\beta} = 0$, după (§ 26).

Din (§ 26) rezultă că trebue să avem şi

$$\bar{x} . \bar{\alpha} = 0 \quad ; \quad \bar{x} . \bar{\beta} = 0 .$$

Deci, vectorul căutat trebue să fie perpendicular pe direcţiile vectorilor $\bar{\alpha}$ şi $\bar{\beta}$. Putem atunci, să-l exprimăm sub forma (λ fiind un scalar ce urmează să fie determinat),

$$\bar{x} = \lambda [\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \tag{56}$$

Introducând această valoare în prima ecuaţie (55), obţinem

$$\lambda [[\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \bar{a}] = \lambda \{\bar{\beta} (\bar{a} . \bar{\alpha}) - \bar{\alpha} (\bar{a} . \bar{\beta})\} = \bar{\alpha} ;$$

de unde, înmulţind vectorial cu $\bar{\beta}$, deducem

$$\lambda = - 1 : (\bar{a} . \bar{\beta}) .$$

Inlocuind însă valoarea (56) în a doua ecuaţie (55), se deduce analog

$$\lambda = + 1 : (\bar{b} . \bar{\alpha}) .$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat este admisibil numai dacă $\bar{a} \cdot \bar{\beta} + \bar{b} \cdot \bar{\alpha} = 0$; ceeace se verifică uşor din (55), căci după (36),

$$\bar{b} \cdot [\bar{x}, \bar{a}] = \bar{a} \cdot [\bar{b}, \bar{x}] = - \bar{a} \cdot [\bar{x}, \bar{b}] .$$

Rezultă, prin urmare, soluţia unică

$$\bar{x} = - \frac{[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]}{\bar{a} \cdot \bar{\beta}} = \frac{[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]}{\bar{b} \cdot \bar{\alpha}} .$$

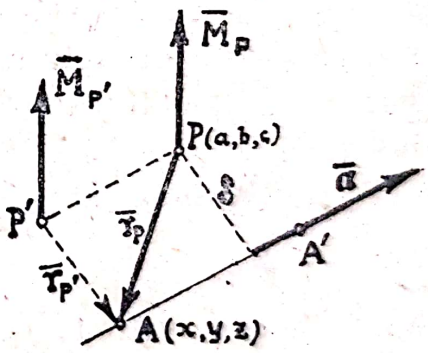
CAP. III

Vectori legaţi şi vectori alunecători. Momente. Sisteme de vectori.

30. Vectori legaţi. Vectori alunecători. In unele fenomene suntem nevoiţi să considerăm vectorul ataşat de un punct material, în domeniul care este sediu al numitelor fenomene. Entitatea formată de un vector şi un punct (de aplicaţie) se numeşte *vector legat* sau *localizat*. Este, evident, legitim să reprezentăm un vector legat de un punct prin segmentul orientat echipolent cu vectorul şi cu origina în punctul de aplicaţie.

In Dinamica rigidului, vectorii care reprezintă *forţe*, pot aluneca pe propria lor direcţie fără ca să varieze efectul mecanic produs de forţă. Se introduce, astfel, noţiunea de *vector alunecător:* entitatea alcătuită dintr'un vector şi o dreaptă paralelă cu el. Dreapta pe care poate aluneca vectorul se numeşte *dreaptă-suport*.

Operaţiile cu vectori legaţi şi alunecători necesită introducerea unei noţiuni noui, numită *moment* în raport cu un punct sau un ax, noţiune care are sens numai pentru aceste clase de vectori.



(Fig. 21)

31. Momentul unui vector legat în raport cu un punct neaşezat pe dreapta vectorului (fig. 21), este definit prin produsul vectorial dintre vectorul de poziţie $\overline{r}_P$ al originii $A(x, y, z)$ a vectorului dat $\overline{a}$, faţă de un punct $P(a, b, c)$, în raport cu care se ia momentul, numit *pol*, şi vectorul $\overline{a}$. Aşadar,

$$\overline{M}_P = [\overline{r}_P , \overline{a}] \ . \tag{1}$$

Momentul este deci, prin definiţie, un vector axial perpendicular pe planul format de $\bar{r}_P$ şi $\bar{a}$, având modùlul egal cu aria paralelogramului determinat de aceşti doi vectori şi sensul determinat după regula cunoscută pentru produsele vectoriale (§ 26).

După regula de formare a componentelor unui produs vectorial, momentul are, faţă de un sistem de coordonate (x, y, z) cartesian, componentele

$$M_x = (y - b)\, a_z - (z - c)\, a_y \; ; \; M_y = (z - c)\, a_x - (x - a)\, a_z \; ;$$
$$M_z = (x - a)\, a_y - (y - b)\, a_x \, .$$

32. Proprietăţile momentelor. $\bar{M}_P$ nu-şi schimbă valoarea când vectorul dat alunecă pe direcţia sa (deci, când este considerat ca vector alunecător).

In adevăr, momentul lui $\bar{a}$, localizat în $A'(\bar{r}'_P)$ pe dreapta-suport, este

$$\bar{M}'_P = [\bar{r}'_P, \bar{a}]$$

Avem,

$$\bar{M}'_P - \bar{M}_P = [\bar{r}_P - \bar{r}_P, \bar{a}] = [\overrightarrow{AA'}, \bar{a}] = 0 \, .$$

căci $\overrightarrow{AA'}$ este coliniar cu $\bar{a}$.

Prin această proprietate, momentul unui vector alunecător se exprimă ca moment al vectorului localizat într'un punct oarecare de pe dreapta-suport. Aşadar, momentul unui vector legat şi momentul unui vector alunecător sunt două naţiuni identice.

2. Valoarea absolută a momentului se poate exprima prin

$$M_P = \delta a \, ,$$

unde δ este distanţa de la pol la dreapta suport a lui $\bar{a}$.

3. Variaţia momentului când se schimbă polul P (fig. 21).

Fie un pol P' ; momentul lui $\bar{a}$ în raport cu P' va fi

$$\bar{M}_{P'} = [\bar{r}_{P'}, \bar{a}] \, , \quad \text{unde} \quad \bar{r}_{P'} = \bar{r}_P + \overrightarrow{P'P} \, .$$

Rezultă

$$\bar{M}_{P'} = [\bar{r}_P + \overrightarrow{P'P}, \bar{a}] = [\bar{r}_P, \bar{a}] + [\overrightarrow{P'P}, \bar{a}] \, ;$$

aşa dar,

$$\bar{M}_{P'} = \bar{M}_P + [\overrightarrow{P'P}, \bar{a}] \, ; \tag{2}$$

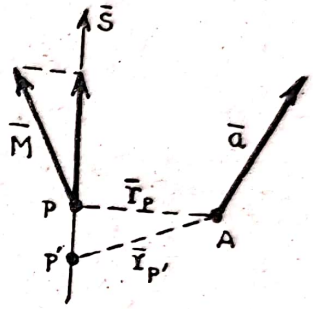
deci, *momentul lui $\bar{a}$ în raport cu P' este egal cu momentul lui $\bar{a}$ în raport cu P adunat cu momentul lui $\bar{a}$, aplicat în P, în raport cu P'.*

Dacă dreapta $P'P$ este paralelă cu $\bar{a}$, atunci $\overline{M}_{P'} = \overline{M}_P$. Deci *momentele lui $\bar{a}$ în raport cu toate punctele aşezate pe o dreaptă paralelă cu direcţia sa sunt egale.*

33. Momentul unui vector legat sau alunecător în raport cu un ax (fig. 22) este dat de componenta pe ax a momentului $\bar{a}$ în raport cu un punct *oarecare* P, al axului:

$$M_s = \overline{M}_P \,.\, \bar{s}, \tag{3}$$

unde $\bar{s}$ este vectorul unitar pe ax. Acest moment, spre deosebire de momentul în raport cu punct (care este un vector axial), este un pseudo-scalar (fiind exprimat printr'un produs mixt).



(Fig 22)

Observaţii. 1. Definiţia de mai sus are sens numai în cazul când componenta pe direcţia $\bar{s}$ a momentului lui $\bar{a}$ în raport cu P, este *independentă* de poziţia lui P pe ax; ceeace se verifică uşor că are loc. In adevăr, fie P' un alt punct de pe ax. Atunci,

$$M'_s = \overline{M}_{P'} \,.\, \bar{s}.$$

Trebue să arătăm că $M'_s = M_s$. In adevăr, avem

$$M_s = \overline{M}_P \,.\, \bar{s} = [\bar{r}_P, \bar{a}] \,.\, \bar{s} = [\bar{a}, \bar{s}] \,.\, \bar{r}_P;$$
$$M'_s = \overline{M}_{P'} \,.\, \bar{s} = [\bar{r}_{P'}, \bar{a}] \,.\, \bar{s} = [\bar{a}, \bar{s}] \,.\, \bar{r}_{P'}.$$

Scăzând aceste două expresii, obţinem

$$M_s - M'_s = [\bar{a}, \bar{s}] \,.\, (\bar{r}_P - \bar{r}_{P'}) = [\bar{a}, \bar{s}] \,.\, \overrightarrow{PP'} = 0,$$

căci factorii ultimului produs scalar sunt vectori perpendiculari.

2. Fie un punct oarecare P' nesituat pe ax şi $\overline{M}_{P'}$, momentul vectorului $\bar{a}$ în raport cu acest punct, moment dat de relaţia (2). Inmulţind ecuaţia (2) scalar cu vectorul unitar $\bar{s}$ al axului, obţinem

$$\bar{s} \,.\, \overline{M}_{P'} = \bar{s} \,.\, \overline{M}_P + \bar{s} \,.\, \left[\overrightarrow{P'P}, \bar{a}\right];$$

sau

$$(4) \qquad M'_s = \bar{s} \,.\, \bar{M}_{P'} = \bar{s} \,.\, \bar{M}_P - \bar{a} \,.\, \left[\overrightarrow{P'P}\,, \bar{s}\right] = \bar{s} \,.\, \bar{M}_P - \bar{a} \,.\, \bar{m} \,.$$

Produsul vectorial din membrul al doilea reprezintă momentul $\bar{m}$ al vectorului unitar $\bar{s}$ al axului (vector alunecător) în raport cu punctul exterior P'. Aşadar, „proiecţia pe un ax, de vector unitar $\bar{s}$, a momentului unui vector $\bar{a}$, luat faţă de un punct P' exterior axului, este egală cu diferenţa dintre proiecţia momentului lui $\bar{a}$, luat faţă de un punct P de pe ax, şi proiecţia momentului lui $\bar{s}$ în raport cu P'".

34. Momentul relativ a doi vectori alunecători $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, necoplanari. Să alegem pe dreapta-suport a lui $\bar{a}$ un punct oarecare A. Fie $\bar{a} = a\,\bar{s}$. Din (3), prin înmulţire cu scalarul a, obţinem

$$(5) \qquad a \,.\, M_s = \bar{a} \,.\, \bar{M}_A \,,$$

unde am însemnat cu $\bar{M}_A$ momentul vectorului $\bar{b}$ în raport cu punctul A. Membrul al doilea al ecuaţiei (5) poate fi scris sub formă de produs mixt. Relaţia (5) devine

$$M_{ab} = \bar{a} \,.\, \left[\overrightarrow{AB}\,, \bar{b}\right] = \bar{b} \,.\, \left[\overrightarrow{BA}\,, \bar{a}\right] = M_{ba} \,,$$

după § 26. Punctul B este ales arbitrar pe dreapta-suport a lui $\bar{b}$. Ultimul termen reprezintă momentul lui $\bar{a}$ în raport cu axul vectorului $\bar{b}$, înmulţit cu valoarea absolută a lui $\bar{b}$.

Expresia (5) este simetrică în raport cu vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Mai mult, ea nu se schimbă când vectorii lunecă pe dreptele-suport respective.

Numim pseudo-scalarul M_{ab}, dat de ecuaţia (6), *moment relativ* al celor doi vectori alunecători. El exprimă, după § 27, volumul paralelipipedului construit cu vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ şi $\overrightarrow{AB}$ ca muchi. Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coplanari, momentul relativ este nul.

Momentul relativ a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ se poate exprima cu ajutorul momentelor lor în raport cu acelaş pol P. In adevăr, din relaţia (6) deducem

$$M_{ab} = \bar{a} \,.\, \left[\overrightarrow{AB}\,, \bar{b}\right] = \bar{a} \,.\, \left[\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}\,, \bar{b}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \bar{a} \cdot \left[\overrightarrow{PB}, \bar{b}\right] - \bar{a} \cdot \left[\overrightarrow{PA}, \bar{b}\right] = \bar{a} \cdot \left[\overrightarrow{PB}, \bar{b}\right] + \bar{b} \cdot \left[\overrightarrow{PA}, \bar{a}\right];$$

sau, în definitiv,

$$M_{ab} = \bar{a} \cdot \bar{M}_P(\bar{b}) + \bar{b} \cdot \bar{M}_P(\bar{a}) = M_{ba} . \tag{7}$$

Cum pseudo-scalarul din membrul întâi este independent de alegerea polului P, este clar că şi expresia din membrul al doilea va fi invariantă pentru deplasările polului. Relaţia (7) evidenţiază, încă odată, *simetria* momentului relativ al doi vectori.

35. Sisteme de vectori legaţi şi alunecători. O mulţime de vectori respectiv legaţi de punctele unei mulţimi de puncte din domeniu (pentru care sunt definiţi vectorii) se numeşte un *sistem de vectori legaţi.*

Dinamica rigidului impune considerarea unui *sistem de vectori alunecători*, întru cât distanţele mutuale ale punctelor ce alcătuesc rigidul rămânând invariabile, poziţia punctului de aplicaţie a vectorului forţă pe dreapta-suport este indiferentă.

In paragrafele următoare vom studia proprietăţile „sistemelor“ de vectori legaţi şi alunecători, de mare însemnătate în aplicaţiile de Fizică şi Mecanică.

36. Vector rezultant şi moment rezultant *al unui sistem de vectori alunecători.* Fie dat un sistem format dintr'un număr finit de vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$, localizaţi în punctele (distincte sau nu) $A_1, A_2, \ldots A_n$, care pot luneca, la nevoe, pe drepte-suport date.

Pentru sistem, putem să definim următorii vectori importanţi în Statică şi în Dinamica rigidului, vectori care caracterizează complet sistemul:

1. *Rezultanta* sistemului (un vector polar):

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i ; \tag{8}$$

2. *Momentul rezultant* (un vector axial) în raport cu un punct P (numit *pol* sau *cenru tde reducere*) dat de suma geometrică a momentelor vectorilor daţi, în raport cu P:

$$\bar{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_P^{(i)} = \sum_{1}^{n} \left[\bar{r}_{iP}, \bar{a}_i\right], \tag{9}$$

$\bar{r}_{iP}$ fiind vectorul de poziţie al unui punct de pe dreapta-suport a lui $\bar{a}_i$, faţă de P.

37. Teorema lui VARIGNON. In cazul a *n vectori aplicaţi în acelaş punct* A, avem ($\bar{r}_P$ fiind vectorul de poziţie a lui A faţă de P)

$$M_P = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_P, \bar{a}_i] = [\bar{r}_P, \sum_i \bar{a}_i] = [\bar{r}_P, \overline{R}], \tag{10}$$

ţinând seamă că produsul vectorial este distributiv.

Deci: „momentul unui sistem de vectori aplicaţi în acelaş punct, în raport cu un pol oarecare dat, este egal cu momentul în raport cu acelaş pol, al vectorului rezultant aplicat în acelaş punct cu toţi vectorii

38. Momentul rezultant al unui sistem de vectori alunecători, în raport cu un ax, este egal cu suma momentelor fiecărui vector în raport cu axul.

In adevăr, fie P un punct oarecare luat ca pol şi $\bar{s}$ vectorul unitar al axului. Din

$$\overline{M}_P = \Sigma\, \overline{M}_P^{(i)},$$

deducem

$$M_s = \overline{M}_P \,.\, \bar{s} = \Sigma\, \overline{M}_P^{(i)} \,.\, \bar{s} = \Sigma\, M_s^{(i)}.$$

39. Variaţia momentului rezultant când se schimbă polul. Deplasând polul dintr'un punct P aşezat pe ax, într'un punct P' exterior axului, din (2) rezultă, pentru fiecare vector în parte,

$$\overline{M}_{P'}^{(i)} = \overline{M}_P^{(i)} + [\overrightarrow{P'P}, \bar{a}_i].$$

Sumând pentru toţi vectorii sistemului, obţinem

$$\sum_i \overline{M}_{P'}^{(i)} = \sum_i \overline{M}_P^{(i)} + [\overrightarrow{P'P}, \Sigma\, \bar{a}_i],$$

sau,

$$\overline{M}_{P'} = \overline{M}_P + [\overrightarrow{P'P}, \overline{R}] \;; \quad \text{unde } \overline{R} = \sum_i \bar{a}_i. \tag{11}$$

Din relaţia precedentă urmează proprietatea: „dacă rezultanta este nulă $\overline{R} = 0$, momentul rezultant este independent de poziţia polului". Momentul rezultant devine un vector liber.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, din (4), rezultă, dacă însemnăm cu $\bar{m}$ momentul lui $\bar{s}$ în raport cu P',

(12) $$M'_s = \bar{s}.\overline{M}_P - \overline{R}.\bar{m} \quad ; \quad M_s = \bar{s}.\overline{M}_{P'} + \overline{R}.\bar{m} .$$

40. Invarianţii scalari ai unui sistem de vectori alunecători, faţă de schimbarea polului şi transformările axelor de coordonate.

1. In primul rând, este evident că valoarea absolută a vectorului rezultant este un invariant al sistemului: $R =$ invariant.

2. Un alt invariant se obţine înmulţind scalar ambii membri ai relaţiei (11) cu $\overline{R}$. In adevăr,

$$\overline{M}_{P'} . \overline{R} = \overline{M}_P . \overline{R} + [\overrightarrow{P'P}, \overline{R}] . \overline{R} ;$$

dar ultimul termen este evident nul. Deci mărimea

(13) $$I = \overline{M}_{P'} . \overline{R} = \overline{M}_P . \overline{R}$$

este independentă de poziţia punctului P şi deci un invariant faţă de deplasările polului în raport cu care se ia momentul sistemului. Prezentând forma unui produs scalar, expresia (13) este evident invariantă şi faţă de transformările axelor de coordonate.

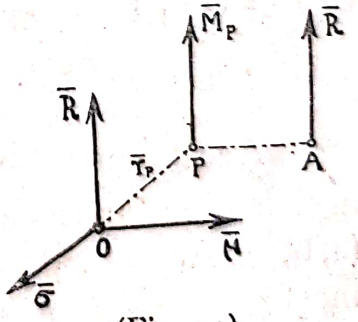
3. Fie $R \neq 0$ şi α unghiul lui $\overline{M}_P$ cu $\overline{R}$; avem

$$M_P . \cos \alpha = \frac{I}{R} = \text{invariant},$$

căci şi I şi R nu depind de poziţia punctului P.

Aşadar, componenta momentului rezultant pe direcţia orientată a rezultantei nu depinde de poziţia polului, când rezultanta este diferită de zero. Raportul precedent este evident invariant şi faţă de transformările admise pentru axele de coordonate.

41. Axa centrală (fig. 23) a unui sistem de vectori necoplanari $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ a căror rezultantă nu este nulă, se defineşte prin locul geometric al punctelor P (luate ca poli) faţă de cari momentele rezultante, $\overline{M}_P$, (dacă nu sunt nule) să fie paralel cu vectorul rezultant $\overline{R}$.



(Fig. 23)

Fie un astfel de pol P, variabil, şi un punct fix O.

Avem

$$\overline{M}_O = \overline{M}_P + [\bar{r}_P , \overline{R}], \tag{14}$$

unde $\bar{r}_P = \overrightarrow{OP}$.

Condiţia de definiţie a axei centrale este $\overline{M}_P \parallel \overline{R}$, ceeace revine la $[\overline{M}_P , \overline{R}] = 0$, oricare ar fi punctul P, variabil pe axa centrală; $\overline{M}_O$ este evident, constant.

Inmulţind (14) vectorial cu $\overline{R}$, deducem

$$[\overline{M}_O , \overline{R}] = [[\bar{r}_P , \overline{R}], \overline{R}] = \overline{R}(\bar{r}_P \,.\, \overline{R}) - \bar{r}_P R^2, \tag{15}$$

de unde rezultă

$$\bar{r}_P = \frac{\overline{R}}{R^2}(\bar{r}_P \,.\, \overline{R}) + \frac{1}{R^2}[\overline{R}, \overline{M}_O],$$

ecuaţie, care exprimă locul geometric căutat.

Inmulţind (15) scalar cu un vector unitar $\bar{\sigma} \perp \overline{R}$ obţinem

$$\bar{r}_P \,.\, \bar{\sigma} = 0 + \frac{\bar{\sigma}}{R^2}[\overline{R}, \overline{M}_O] = \frac{1}{R^2}\overline{M}_O \,.\, [\bar{\sigma}, \overline{R}],$$

sau

$$\bar{r}_P \,.\, \bar{\sigma} = -\frac{1}{R}(\overline{M}_O \,.\, \bar{\mu}); \quad \text{unde } \bar{\mu} = \left[\frac{\overline{R}}{R}, \bar{\sigma}\right] \tag{16}$$

este vectorul unitar perpendicular pe $\bar{\sigma}$ şi pe $\overline{R}$, corespunzând sensului drept (care aduce pe $\overline{R} \to \bar{\sigma}$; fig. 23).

Permutând $\bar{\mu}$ cu $\bar{\sigma}$ şi schimbând semnul, deducem

$$\bar{r}_P \,.\, \bar{\mu} = \frac{1}{R}(\overline{M}_O \,.\, \bar{\sigma}). \tag{17}$$

Alegând axele $\bar{\sigma}$, $\bar{\mu}$, $\frac{\overline{R}}{R}$, ca sistem de x, y, z, rezultă din (16) şi (17), că P are coordonatele

$$\text{(18)} \quad a = -\frac{M_{Oy}}{R} \quad ; \quad b = \frac{M_{Ox}}{R} \quad ; \quad c = \text{nedeterminată}$$

Acest punct se va găsi, deci, pe dreapta paralelă şi de acelaş sens cu $\overline{R}$ (axa de z) trecând prin punctul de coordonate (a, b, c). Această dreaptă este locul geometric căutat. Ea se numeşte *axă centrală* a sistemului de vectori dat.

In cazul când rezultanta $\overline{R} = 0$, noţiunea de axă centrală îşi pierde înţelesul. Cum însă, după § 39, în acest caz, momen-

tul rezultant este independent de pol (devenind un vector liber), se poate defini drept axă centrală orice dreaptă arbitrară paralelă cu momentul rezultant luat în raport cu un punct oarecare din spaţiu.

42. Moment minim se numeşte momentul pentru care valoarea modùlului este minimă, când rezultanta e diferită de zero. Cum

$$M_P |\cos \alpha| = \frac{|I|}{R},$$

M_P va fi minim când $|\cos \alpha|$ va fi maxim, ceeace are loc pentru $\alpha = 0, \pi$. Dar atunci, $\overline{M}_P \parallel \overline{R}$. Aşadar, momentul rezultant este minim pentru toate punctele de pe axa centrală.

43. Axa centrală a unui sistem de vectori concurenţi. Fie un sistem de vectori concurenţi în punctul A. Rezultanta lor $\overline{R}$ (presupusă diferită de zero) fiind localizată în A, momentul lui $\overline{R}$ în raport cu A este nul, deci, el va fi nul pentru orice punct de pe axa ce trece prin A, în direcţia lui $\overline{R}$. Ori, această valoare a momentului fiind evident minimă, rezultă că axa centrală trece prin A şi are direcţia lui $\overline{R}$.

44. Drepte de moment nul, sunt dreptele pe care proiecţia momentului rezultant al unui sistem de vectori, în raport cu un *punct al dreptei*, este nul.

Fie $\bar{s}$ un vector unitar pe dreapta considerată şi $\bar{m}$ momentul acestui vector în raport cu un punct *exterior* dreptei, luat ca pol. Fie $\overline{R}$ rezultanta sistemului şi $\overline{M}$ momentul rezultant în raport cu polul ales.

După relaţia (12), dreptele cu proprietatea enunţată satisfac condiţiei

$$\bar{s} . \overline{M} + \bar{m} . \overline{R} = 0 . \tag{19}$$

In adevăr, relaţia precedentă fiind satisfăcută când schimbăm semnul lui $\bar{s}$ şi $\bar{m}$, rezultă că ea defineşte nu numai un segment orientat, ci o dreaptă (D).

Pentru a ilustra distribuţia în spaţiu a dreptelor D să considerăm polul P aşezat pe axa centrală a sistemului de vectori

dat, distinctă de dreapta D. In acest caz $\bar{M} = \alpha \bar{R}$ (fig. 24).

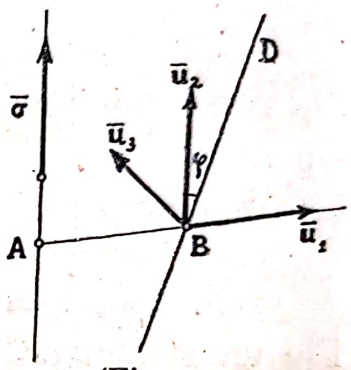
Relaţia de condiţie scrisă mai sus devine

$$\bar{R} . (\alpha \bar{s} + \bar{m}) = 0 ,$$

sau, excluzând cazul banal $R = 0$, trebue ca

$$\alpha \bar{s} + \bar{m} = 0 . \tag{20}$$

Fie AB perpendiculara comună axei centrale $\bar{\sigma}$ şi dreptei D. Fie $\bar{u}_1$ vectorul unitar al prelungirii lui AB, în punctul B; fie $\bar{u}_2$ vectorul unitar al axei centrale în B şi $\bar{u}_3 = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]$, vectorul ce completează triedrul drept, ortogonal, în B.



(Fig. 24

Cum $\bar{u}_1$ este perpendicular pe $\bar{\sigma}$ (deci, pe $\bar{u}_2$) şi pe $\bar{u}_3$, rezultă că dreapta D (perpendiculară pe $\bar{u}_1$) se află în planul determinat de $\bar{u}_2$ şi $\bar{u}_3$. Deci $\bar{s} = \bar{u}_2 \cos \varphi + \bar{u}_3 \sin \varphi$, unde φ este unghiul făcut de D şi $\bar{\sigma}$.

Fie $\beta = AB$ distanţa dreptei D la axă. Inmulţind relaţia (20) scalar cu $\bar{u}_2$, obţinem

$$\alpha (\bar{s} . \bar{u}_2) + (\bar{m} . \bar{u}_2) = 0 .$$

Dar,

$$\bar{m} = [\beta \bar{u}_1 , \bar{s}] = \beta (\bar{u}_3 \cos \varphi - \bar{u}_2 \sin \varphi).$$

Efectuând înmulţirea precedentă şi reducerile indicate, obţinem

$$\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi = 0 .$$

Rezultă

$$\overline{BA} \operatorname{tg} \varphi = \text{constant}, \tag{21}$$

relaţie, care defineşte fascicolul de drepte D în spaţiu. Unghiul φ este determinat, până la un multiplu de π, numai de distanţa lui D la axa centrală. Inclinarea dreptei D faţă de axă variază invers proporţional cu distanţa lui D la axa centrală. Alunecarea dreptei D pe direcţia ei însăşi, precum şi rotaţia acestei drepte în jurul axei centrale sunt operaţii care nu schimbă valoarea lui φ.

Este evident că fascicolul de drepte normale pe axa centrală a sistemului vectorial, constitue un ansamblu de drepte D.

44. Coordonatele lui PLÜCKER. In teoria sistemelor de drepte, Geometria analitică introduce, în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni, drept coordonate ale dreptei cele trei componente ale unui vector alunecător $\bar{R}$ (X, Y, Z) pe dreaptă, considerată ca dreaptă-suport, împreună cu cele trei componente ale momentului acestui vector $\bar{M}$ $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ faţă de polul fix O în spaţiu, luat ca origină a unui sistem de coordonate.

Fie A (x, y, z) coordonatele unui punct de pe o dreaptă din sistemul de drepte, considerat ca origină a vectorului $\bar{R}$ alunecător pe dreaptă. Avem, prin definiţia momentului,

$$(22) \quad Zy - Yz = \mathcal{L} \; ; \; Xz - Zx = \mathcal{M} \; ; \; Yx - Xy = \mathcal{N} \; .$$

Aceste ecuaţii constituesc ecuaţiile unei drepte (punctul A fiind considerat punct curent pe dreaptă). Ecuaţiile precedente sunt, evident, compatibile. In adevăr, vectorul $\bar{M}$ este, prin definiţie, perpendicular pe $\bar{R}$. Intre coeficienţii ecuaţiilor (22) are loc, prin urmare, relaţia

$$(23) \qquad \bar{R} \cdot \bar{M} = \mathcal{L}X + \mathcal{M}Y + \mathcal{N}Z = 0 \; .$$

Cele *şase* cantităţi $X, Y, Z, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ pot să fie aşadar considerate drept *coordonate omogene* ale dreptei. Ele poartă numele de *coordonatele lui* PLÜCKER. Dintre ele numai *cinci* pot fi alese arbitrar, din cauza relaţiei (23). Mai mult, ele nu sunt determinate decât până la aproximaţie de un factor constant, căci lungimea vectorului $\bar{R}$ este nedeterminată. In consecinţă, coordonatele plückeriene alcătuesc, de fapt, un ansamblu de *patru* parametri. Prin urmare, o dreaptă este determinată în spaţiu prin patru ecuaţii între cele şase coordonate plückeriene.

Dacă se dau numai *trei* ecuaţii între coordonatele plückeriene, rămâne arbitrar un singur parametru. Sistemul de drepte corespunzător formează o *serie riglată*. Se demonstrează în geometria sistemelor de drepte că locul geometric al dreptelor unei serii riglate este, în general, o suprafaţă desfăşurabilă.

Dacă se dau numai *două* ecuaţii între coordonatele plückeriene, dreptele alcătuesc o *congruenţă*. O congruenţă este formată, în general, de tangentele la două suprafeţe focale, care pot degenera în curbe. O *congruenţă liniară* este formată din dreptele care tae două drepte date.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se dă o singură ecuaţie între coordonatele plückeriene, rămân trei parametri arbitrari ; sistemul de drepte formează un *complex*. Dreptele unui complex, care trec printr'un punct dat, determină un *con*. Numărul dreptelor complexului, care trec printr'un punct dat şi sunt aşezate într'un plan dus prin punct, determină *ordinul* complexului : el este egal cu gradul conului relativ la punctul considerat.

45. Complexe liniare, se numesc complexele de *ordinul întâi :* conul relativ la un punct degenerează într'un plan. Un plan oarecare dus prin punct tae planul complexului după o dreaptă.

I. Se poate arăta că relaţia de condiţie între coordonatele plückeriene, care defineşte complexul liniar, este o *ecuaţie liniară şi omogenă* între cele şase coordonate plückeriene.

In adevăr, fie $P\ (x,y,z)$ şi $P'\ (x'.\ y',\ z')$ două puncte pe o dreaptă a complexului. Ele satisfac ecuaţiilor (22). Aşadar,

$$\mathcal{L} = \mathcal{Z}y' - \mathcal{Y}z' = \mathcal{Z}y - \mathcal{Y}z \quad ; \quad \mathcal{M} = \mathcal{X}z' - \mathcal{Z}x' = \mathcal{X}z - \mathcal{Z}x \quad ;$$
$$\mathcal{N} = \mathcal{Y}x' - \mathcal{X}y' = \mathcal{Y}x - \mathcal{X}y \quad ;$$

de unde

$$(24)\quad \frac{\mathcal{X}}{x'-x} = \frac{\mathcal{Y}}{y'-y} = \frac{\mathcal{Z}}{z'-z} = \frac{\mathcal{L}}{yz'-zy'} = \frac{\mathcal{M}}{zx'-xz'} = \frac{\mathcal{N}}{xy'-yx'} .$$

Relaţia căutată, care determină complexul liniar, va avea forma generală

$$f\ (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0 \ ,$$

sau, după (24),

$$(25)\quad f\ (x'-x, y'-y, z'-z, yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx') = 0 \ .$$

Dacă fixăm punctul P, atunci punctul P' trebue să descrie un plan (conul complexului liniar, relativ la P). Ecuaţia acestui plan, deci ecuaţia (25), va trebui să fie de gradul întâi în x', y', z'. Dacă fixăm punctul P', atunci punctul P va trebui să descrie planul complexului relativ la acest punct. Aşadar, ecuaţia (25) va trebui să fie de gradul întâi şi în x, y, z. In rezumat, ecuaţia (25) poate conţine numai termeni de forma

$$x, y, z,\ x', y', z',\ yz', zy', zx', xz', xy', yx' \ .$$

Pe de altă parte, ecuaţia (25) trebue să fie satisfăcută

identic pentru $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$. Ea va avea aşadar, forma

$$p(x'-x)+q(y'-y)+r(z'-z)+a(yz'-zy')+b(zx'-yz')+ \\ +c(xy'-yx')=0 \ ,$$

unde $a, b, c, p, q, r,$ sunt constante. După (24), ecuaţia precedentă devine relaţia de condiţie între coordonatele plückeriene, cătată

$$(26) \qquad pX+qY+rZ+aL+bM+cN=0 \ ,$$

aşadar, liniară şi omogenă în coordonatele plückeriene.

II. Să considerăm un vector $\alpha\bar{s}$, de versor $\bar{s}$ şi componente a, b, c. Vectorul unitar $\bar{s}$ să fie astfel ales încât momentul său în raport cu polul O să aibă componentele: $\frac{1}{\alpha}q$, $\frac{1}{\alpha}p$, $\frac{1}{r}r$, — ceeace este posibil dacă sunt satisfăcute relaţiile

$$(27) \qquad bz-cy=p \ ; \quad cx-az=q \ ; \quad ay-bx=r \ ,$$

unde (x, y, z) este un punct de pe dreapta-suport a lui $\bar{s}$; dreaptă, ale cărei ecuaţii sunt ecuaţiile (27).

In aceste condiţii, relaţia (26) se scrie

$$\alpha\bar{s}.\bar{M}+\alpha\bar{m}.\bar{R}=0 \ .$$

Această relaţie exprimă, după (19), condiţia ca dreapta (27) să fie dreaptă de moment nul. Aşadar, dreptele de moment nul alcătuesc un complex liniar de axă $\bar{s}$ şi parametru α şi reciproc. Ele sunt aşezate, după (27), în planul

$$(28) \qquad px+qy+rz=0 \ ,$$

care este planul complexului liniar relativ la punctul $(\frac{q}{c}, \frac{-p}{c}, 0)$.

Planul complexului liniar relativ la un punct O, numit *focar* sau *pol*, poartă numele de *plan focal*, sau *plan polar*.

III. Fiind date două puncte O şi O', dacă planul polar π relativ la O trece prin O', atunci planul polar π' relativ la O' trece prin O.

In adevăr, dacă π trece prin O', dreapta OO' aparţine complexului. Deci, π' conţine această dreaptă; el va trece prin O.

Drepte conjugate. Fie D o dreaptă OO' şi π, π' planele polare relative la punctele O şi O'. Ele se tae după o dreaptă Δ. Dreptele D şi Δ se numesc *drepte conjugate*.

IV. Planele polare π_1 şi π'_1 relative la două puncte O_1 şi O'_1 de pe Δ, se tae după dreapta D.

In adevăr, după III, planele π şi π' trecând prin O_1, planul π_1 va trece atât prin O cât şi prin O', deci prin D. De asemeni, π şi π', trecând prin O'_1, planul π'_1 va trece prin O şi O', deci prin D. Aşadar, π_1 şi π'_1 se tae după dreapta D.

Prin urmare, dreapta D se deduce din Δ aşa cum s'a dedus Δ din D.

Consecinţe. Planele polare relative la punctele unei drepte, trec prin dreapta conjugată ei.

Planul dus printr'o dreaptă D paralel cu conjugata ei Δ, are polul la infinit pe Δ.

Dreptele conjugate tuturor dreptelor duse printr'un punct O, sunt ajezate în planul polar relativ la O.

V. Orice dreaptă X care tae două drepte conjugate D şi Δ, face parte din complex şi reciproc, orice dreaptă din complex care tae pe D, va tăia şi pe Δ.

In adevăr, fie A punctul unde X tae pe D. Planul polar al lui A trece prin Δ; el conţine toate dreptele ce trec prin A şi toate punctele lui Δ; aşadar, va conţine şi dreapta X: ea face parte, deci, din complex. Reciproc, orice dreaptă din complex care tae pe D într'un punct A este conţinută în planul polar al lui A; aşadar, tae pe Δ.

VI. Dacă facem $\varphi = \frac{\pi}{2}$ în relaţia (21), rezultă $\overline{AB} = 0$.

Aşadar, dreptele complexului liniar care trec printr'un punct al axei centrale sunt perpendiculare pe axa centrală şi reciproc. Ele formează planul polar relativ la punctul A, plan, care este perpendicular pe axa centrală.

Luând două puncte pe axa centrală şi planele polare respective, ele se taie la infinit. Rezultă că dreapta conjugată axei centrale este dreapta de la infinit.

Axa centrală este locul focarelor paralele cu o direcţie dată (normală pe axa centrală).

Rezultă: orice dreaptă paralelă cu axa centrală îşi are conjugata la infinit. Deci, planul polar al punctului de la infinit este paralel cu axa centrală.

Orice dreaptă perpendiculară pe axa centrală face parte din complex.

Scanned with OKEN Scanner

VI. Planul P dus printr'o dreaptă D paralel cu conjugata ei Δ, este paralel cu axa centrală şi reciproc.

In adevăr, planul P întâlneşte pe Δ în punctul de la infinit. Aşadar, el este plan polar al punctului de la infinit şi deci, este paralel cu axa centrală (VI). Reciproc, planul P dus paralel cu axa centrală, prin D îşi are focarul la infinit (VI). Acest focar se va găsi deci pe Δ la infinit. Aşadar, planul P este paralel cu Δ.

VII. Perpendiculara comună a două drepte conjugate D şi Δ, este perpendiculară pe axa centrală.

In adevăr, perpendiculara comună X a axei centrale şi a dreptei D face parte din complex (VI). Deci, ea taie pe Δ (V). Planul dus prin D paralel cu axa centrală este, evident, perpendicular pe X. Dar acest plan este paralel cu conjugata Δ a lui D (VI). Aşadar, dreapta X este perpendiculară pe Δ.

VIII. *Reciprocitate polară.* Dacă o dreaptă D, care trece printr'un punct O, generează o figură în jurul punctului O, conjugata ei va genera o figură reciprocă în planul polar π relativ la O.

Această corespondenţă duală defineşte reciprocitatea polară.

Unui triedru cu vârful în O, îi corespunde o curbă înfăşurătoare a tangentelor ei în π.

Feţelor, muchilor şi vârfurilor unei figuri poliedrale cu vârful în O îi corespund respectiv, vârfurile, muchile şi feţele figurii poliedrale reciproce.

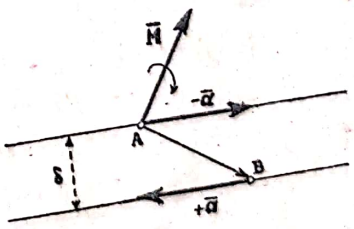
Această proprietate conduce la construcţii care-şi găsesc întinse aplicaţii în Statica grafică.

46. Sisteme particulare de vectori.

1. Un sistem de vectori este *nul*, sau în *echilibru*, când nu conţine nici un vector. Aşadar, condiţia necesară şi suficientă ca un sistem să fie nul, este

$$\bar{R}=0 \quad ; \quad \bar{M}_P = 0 \quad ; \tag{29}$$

oricare ar fi P.



(Fig. 25)

2. *Cuplu*, se numeşte sistemul format din *doi* vectori egali în valoare absolută, paraleli, dar de sensuri contrare (fig. 25). Planul determinat de cei doi vectori este *planul cu-*

plului. Distanța dintre cele două drepte-suport ale vectorilor se numește *brațul cuplului.*

Prin definiție, un cuplu este caracterizat, așadar, printr'o *rezultantă nulă* și un *moment rezultant diferit de zero,* invariabil când variază polul (după § 39), deci un vector liber numit *axul cuplului.*

Luăm ca pol punctul de aplicare A al unuia din vectori $+\bar{a}$ și fie B punctul de aplicare al celuilalt vector $-\bar{a}$; momentul este

$$\overline{M} = \left[\overrightarrow{AB}, \bar{a}\right], \tag{30}$$

și are modùlul egal cu produsul δa dintre brațul cuplului și valoarea absolută a vectorului dat $\bar{a}$; direcția axului cuplului este, după (30), perpendiculară pe planul cuplului, iar sensul pozitiv al momentului este definit prin sensul corespunzător rotației pozitive a cuplului în jurul direcției orientate a momentului, luată ca axă de rotație: un observator așezat cu picioarele în A și capul pe direcția pozitivă a axei va vedea cuplul rotindu-se de la stânga spre dreapta (§ 22).

3. *Torsor,* se numește sistemul alcătuit dintr'un vector $\overline{R} \neq 0$, și un cuplu având planul perpendicular pe $\overline{R}$ și momentul $\overline{M} \neq 0$. Dacă $R = 1$, torsorul se numește *șurub.*

Prin definiție torsorul are ca punct de aplicare, modùl, direcție și sens, aceleași câtimi corespunzătoare vectorului $\overline{R}$. Raportul

$$I : M = \overline{R} . \overline{M} : R^2 = M \cos(\overline{M}, \overline{R}) : R,$$

se numește *săgeata torsorului.*

47. Operațiile algebrice cu sistemele de vectori legați și alunecători.

Statica și Dinamica rigidului necesită considerarea sistemelor de vectori legați (distribuția vitezelor, accelerațiilor, etc.) precum și a sistemelor de vectori alunecători (distribuția forțelor), în ansamblul lor, făcând abstracție de fiecare individ în parte.

Un sistem de vectori legați sau alunecători, considerat ca entitate de sine stătătoare, este o mărime definită prin vecto-

rul rezultant $\overline{R}$ şi momentul rezultant $\overline{M}$ în raport cu un punct oarecare.

In unele probleme se poate adopta ca elemente de definiţie a unui sistem de vectori componentele lui $\overline{R}(X, Y, Z)$ şi $\overline{M}(L, M, N)$ faţă de un sistem de trei axe ortogonale; aşadar, prin coordonatele plückeriene (§ 44). Dreptele de moment nul ale sistemului alcătuesc, precum se ştie, un complex liniar (§ 45).

1. *Suma* a două sau mai multe sisteme de vectori

$$(S) + (S')$$

este sistemul rezultant format din mulţimea tuturor vectorilor sistemelor date. Ea are ca rezultantă, suma rezultantelor şi ca moment rezultant, suma momentelor rezultante ale celor două sisteme date, în raport cu un acelaş pol.

Operaţia de sumare a unui sistem de vectori posedă, evident, proprietăţile de comutativitate şi asociativitate.

2. *Produsul printr'un scalar.* Dacă înmulţim toţi vectorii ce compun sistemul de vectori aplicaţi sau alunecători prin acelaş scalar diferit de zero, este evident că rezultanta sistemului, precum şi momentul rezultant, se vor înmulţi prin scalarul dat.

In particular, înmulţirea unui sistem cu -1 produce *sistemul opus* sistemului dat. Suma a două sisteme opuse produce un sistem rezultant nul.

3. *Momentul relativ a două sisteme de vectori legaţi sau alunecători*, este definit prin suma momentelor relative ale tuturor vectorilor din primul sistem faţă de toţi vectorii din sistemul al doilea: $M_{SS'}$.

Fie sistemul (S) format dintr'un număr finit de n vectori $\bar{a}_i$ aplicaţi în punctele A_i şi sistemul (S') format dintr'un număr finit m de vectori $\bar{b}_i$ aplicaţi în punctele B_i, putând aluneca pe dreptele-suport corespunzătoare. După § 34, avem

$$M_{SS'} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ai}\, M_{bj} = \sum_i \bar{a}_i \,.\, \sum_j \overline{M}_P(\bar{b}_j) + \sum_j \bar{b}_j \,.\, \sum_i \overline{M}_P(\bar{a}_i);$$

sau,

$$M_{SS'} = \overline{R}_S \cdot \overline{M}_P(S') + \overline{R}_{S'} \,.\, \overline{M}_P(S), \tag{31}$$

expresie, invariantă la schimbarea polului P, după § 34.

Momentul relativ a două sisteme de vectori poate să fie

considerat ca un produs al celor două sisteme

$$M_{SS'} = (S) . (S') \ .$$

Proprietăţile de comutativitate şi asociativitate, sunt evident satisfăcute.

Invariantul unui sistem nu este altceva decât dublul produsului sistemului prin el însuşi

$$\overline{R} . \overline{M} = 2 (S) . (S) \ . \tag{32}$$

Momentul unui sistem (S) în raport cu un ax de vector unitar $\bar{s}$ este, prin definiţie, momentul relativ al sistemului (S) şi al unui sistem (U) format din vectorul unitar $\bar{s}$. Din relaţia (31) deducem

$$(S) . (U) = \bar{s} . \overline{M} + \bar{m} . \overline{R} \ ,$$

$\overline{M}$ fiind momentul sistemului în raport cu un punct exterior axului şi $\bar{m}$ momentul lui $\bar{s}$ în raport cu acelaş punct.

48. Sisteme „echivalente“ de vectori aplicaţi sau alunecători. Două sisteme de vectori (S) şi (S') sunt, prin definiţie, echivalente, când

$$(S) + (-S') = 0 \ ; \tag{33}$$

aşadar, când sistemul rezultant al unui sistem şi al opusului celuilalt, este nul. Pentru ca relaţia (33) să aibă loc, este necesar şi suficient, după condiţiile (29), ca sistemele echivalente (S) şi (S') să aibă:

a) rezultantele egale

$$\overline{R} = \overline{R'} \ ; \tag{34}$$

b) momentele rezultante, relative la un acelaş pol oarecare, egale

$$\overline{M}_P = \overline{M'}_P \ . \tag{35}$$

Relaţia (34) fiind satisfăcută, este suficient ca (35) să fie verificată pentru un singur pol P. In adevăr, cum

$$\overline{M}_{P'} = \overline{M}_P + \left[\overrightarrow{P'P}, \overline{R} \right] \ ; \quad \overline{M'}_{P'} = \overline{M'}_P + \left[\overrightarrow{P'P}, \overline{R'} \right] \ ,$$

se vede că (34) unită cu (35) atrage egalitatea $\overline{M}_{P'} = \overline{M'}_{P'}$.

49. Operaţii elementare de „reducere“ a unui sistem de vectort legaţi sau alunecători. Posibilitatea reducerii unui sistem de vectori la un sistem echivalent, precum şi operaţiile de reducere, se bazează pe următoarele operaţii simple, numite *operaţii statice, elementare :*

1. *Adunarea geometrică a vectorilor cari au acelaş punct de aplicare*, după legea compunerii vectorilor (§ 10) ; precum şi operaţia inversă : *descompunerea fiecărui vector în vectori componenţi*, cu acelaş punct de aplicare, după legile dela § 18.

Se vede imediat că prin aceste operaţii elementare se obţine un sistem echivalent : este, în adevăr, suficient să luăm punctul considerat ca pol.

Această operaţie permite să se înlocuiască unii dintre vectorii, cari formează sistemul de vectori concurenţi, printr'un singur vector, sau, la nevoe, să desfacem un vector al sistemului în mai mulţi vectori componenţi, aplicaţi în acelaş punct ca şi vectorul considerat.

2. *Unui sistem de vectori putem să-i adăogăm, sau să-i suprimăm, perechi de vectori opuşi.*

In adevăr, sistemul format dintr'o pereche de vectori opuşi este identic nul ; adăogarea sau suprimarea lui nu poate să influenţeze valoarea sistemului dat.

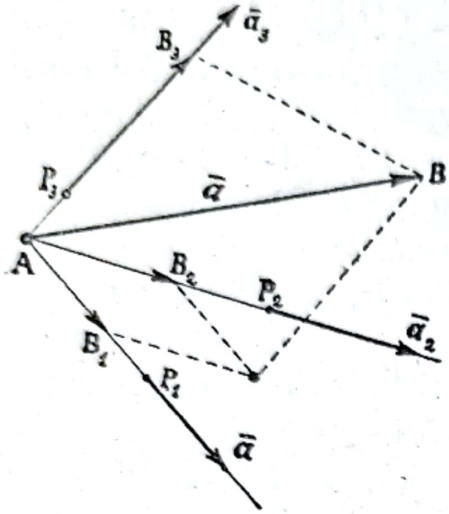
De altfel, se vede uşor că şi această operaţie transformă sistemul dat într'unul echivalent : este suficient să luăm polul pe dreapta-suport a vectorilor opuşi.

Cu ajutorul operaţiilor 1 şi 2 se poate efectua şi următoarea operaţie : *deplasarea unui vector pe propria sa dreaptă-suport.* In adevăr, fie un vector $\bar{a}$ din sistemul dat, aplicat în punctul P. Să-i adăogăm doi vectori având modùlii egali cu a şi aceiaşi direcţie cu $\bar{a}$, dar de sensuri contrare : unul aplicat tot în P şi de sens contrar lui $\bar{a}$, iar celălalt aplicat într'un punct P', pe direcţia lui $\bar{a}$, având acelaş sens cu $\bar{a}$. Compunând cei doi vectori din punctul P, obţinem rezultanta zero, astfel încât nu mai rămâne decât vectorul din P' egal cu $\bar{a}$. Acest vector apare drept vectorul $\bar{q}$ deplasat din P în P', pe propria sa dreaptă-suport.

50. Reducerea unui sistem de vectori legaţi sau alunecători la un sistem echivalent, mai simplu. Cu ajutorul ope-

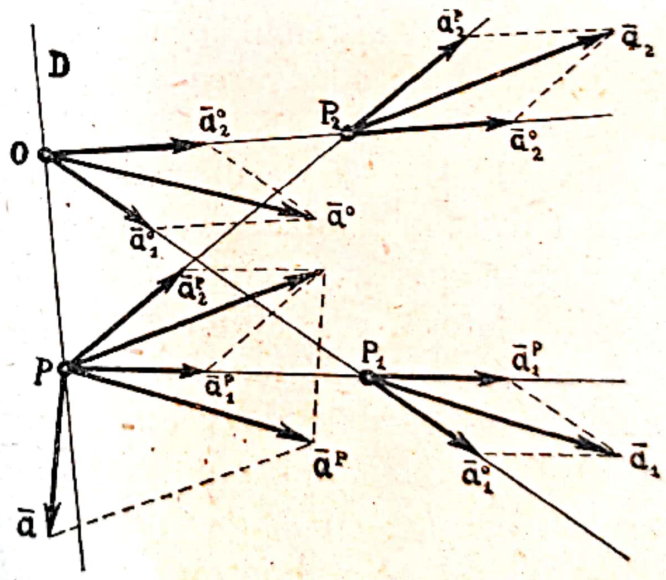
rațiilor elementare se poate reduce orice sistem de vectori (*S*) la unul din sistemele următoare.

1. Orice sistem de vectori poate să fie descompus, într'o infinitate de moduri, într'un sistem echivalent format din *trei* vectori cari au ca puncte de aplicație trei puncte date dinnainte $P_1, P_2 P_3$, necoliniare (fig. 26). In adevăr, fie A origina unuia din vectorii dați $\bar{a}$, neașezat în planul determinat de planul celor trei puncte P. După § 18, acest vector poate să fie descompus în trei vectori componenți $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_2}$, și $\overrightarrow{AB_3}$, pe dreptele AP_1, AP_2 și AP_3. Printr'o alunecare pe aceste drepte, putem aduce acești trei vectori cu originile respective în cele trei puncte P_1, P_2, P_3; obținem $\bar{a}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\bar{a}_2 = \overrightarrow{AB_2}$, $\bar{a}_3 = \overrightarrow{AB_3}$.



(Fig. 26)

Dacă însă se întâmplă ca unul dintre vectorii $\bar{a}$ să se găsească așezat în planul determinat de cele trei puncte date, el va fi descompus în *doi* vectori componenți, de exemplu, pe dreptele AP_1 și AP_2 (dacă aceste drepte sunt distincte); apoi se va proceda ca mai sus.



(Fig. 27)

Aplicând această proprietate fiecărui vector, succesiv, din vectorii cari alcătuesc sistemul de vectori dat (*S*), și efectuând rezultantele în fiecare din punctele P, am redus sistemul (*S*) la un sistem echivalent (*S'*) alcătuit numai din trei vectori aplicați în punctele date la voe P_1, P_2, P_3.

2. Orice sistem de vectori aplicați sau alunecători poate să fie descompus, într'o infinitate de moduri, într'un sistem

echivalent format din *doi* vectori necoplanari, dintre cari unul să fie aplicat într'un punct arbitrar P, dat dinnainte. (fig. 27).

In adevăr, fie P, P_1 şi P_2 trei puncte necoliniare luate arbitrar. Sistemul de vectori dat poate să fie descompus, după observaţia precedentă, în trei vectori $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ aplicaţi în P, P_1, P_2, respectiv. Fie π_1 planul determinat de punctul P şi vectorul $\bar{a}_1$; fie π_2 planul determinat de P şi vectorul $\bar{a}_2$. Planurile π_1 şi π_2 se vor tăia, în general după o dreaptă D care trece prin P, dar nu conţine punctele P_1 şi P_2.

Alegem pe dreapta D un punct oarecare O, distinct de P. Vectorul $\bar{a}_1$ cu origina în P_1 poate să fie descompus, în planul său π_1, după două direcţii $\overrightarrow{OP_1}$ şi $\overrightarrow{PP_1}$, în vectorii $\bar{a}_1^O$ şi $\bar{a}_1^P$. Deasemeni, vectorul $\bar{a}_2$ poate să fie descompus, în planul său π_2, după două direcţii $\overrightarrow{OP_2}$ şi $\overrightarrow{PP_2}$, în vectorii $\bar{a}_2^O$ şi $\bar{a}_2^P$, respectiv.

Transportăm vectorii $\bar{a}_1^O$ şi $\bar{a}_2^O$ cu punctele de aplicaţie în O şi construim vectorul rezultant

$$\bar{a}^O = \bar{a}_1^O + \bar{a}_2^O \quad ;$$

transportăm vectorii $\bar{a}_1^P$ şi $\bar{a}_2^P$ cu origina în P şi construim rezultanta celor trei vectori aplicaţi în P; anume

$$\bar{a}^P = \bar{a} + \bar{a}_1^P + \bar{a}_2^P \quad .$$

Obţinem, în acest mod doi vectori: $\bar{a}^O$, aplicat în punctul O şi $\bar{a}^P$, aplicat în punctul dat dinnainte P.

Efectuând această operaţie cu fiecare dintre vectorii ce formează sistemul dat $(\bar{a}_i)$ obţinem un sistem echivalent alcătuit din doi vectori

$$\bar{a}^O = \sum_i \bar{a}_i^O \quad ; \quad \bar{a}^P = \sum_i \bar{a}_i^P \quad .$$

Prin aceasta, proprietatea enunţată este stabilită.

Observăm că punctul O este conţinut în planul polar al punctului dat P, faţă de complexul liniar al sistemului. In adevăr, fie $\bar{s}$ vectorul unitar al lui $\overrightarrow{OP}$ (dreapta D). Momentul rezultant faţă de axul $\bar{s}$, al sistemului celor trei vectori daţi, este

$$M_s = \bar{s} \cdot \left[\overrightarrow{OP_2}, \bar{a}_2\right] + \bar{s} \cdot \left[\overrightarrow{OP_1}, \bar{a}_1\right] + \bar{s} \cdot \left[\overrightarrow{OP}, \bar{a}\right] \quad .$$

Ultimul produs este evident nul. Primul produs se scrie $\bar{a}_2 . \left[\overrightarrow{OP_2}, \bar{s}\right]$; el este nul, căci vectorii $\bar{a}_2$, $\overrightarrow{OP_2}$ şi $\bar{s}$ sunt în acelaş plan: cei doi vectori, cari formează factorii produsului sunt, în adevăr, perpendiculari. Acelaş lucru se poate spune şi despre al doilea termen din expresia de mai sus. Aşadar, M_s este nul. Rezultă că dreptele D sunt drepte de moment nul. Ele formează complexul sistemului dat. Punctul O se găseşte în planul polar al punctului dat P.

Caz particular. Dacă planele π_1 şi π_2 coincid, putem duce în acest plan o dreaptă D prin P şi unul din punctele P_1 sau P_2. Pentru a fixa ideile, să presupunem că ducem dreapta D prin P şi P_1. In aceste condiţii, se poate proceda ca şi în cazul general, observând că rolul punctului O din construcţia precedentă, îl joacă acum punctul P_1.

3. Fiind dat un vector axial există o infinitate de cuple care au acest vector ca moment.

In adevăr, într'un plan perpendicular pe vectorul axial dat $\overline{M}$ considerăm două drepte paralele pe care aplicăm doi vectori arbitrari $+\bar{a}$ şi $-\bar{a}$, astfel încât să fie satisfăcută relaţia

$$M = a\,\delta \,, \tag{36}$$

unde δ este distanţa, aleasă la voe, dintre cele două drepte paralele. In aceste condiţii, este evident că rezultanta cuplului este nulă şi că momentul rezultant este egal cu vectorul dat $\overline{M}$, fiind independent de pol. Cum distanţa dintre cele două drepte şi, prin urmare, după relaţia de condiţie (36), modùlul vectorului component al cuplului, sunt arbitrari, reducerea precedentă se poate efectua într'o infinitate de moduri.

51. Reducerea unui sistem de vectori la un vector rezultant şi un cuplu.

Orice sistem de vectori aplicaţi sau alunecători (S) se poate reduce, într'o infinitate de moduri, la un sistem echivalent

$$(S') = S'(\overline{R}, \overline{M}),$$

format din vectorul rezultant (presupus diferit de zero) $\overline{R}$, aplicat pe anumită dreaptă, şi dintr'un cuplu având momentul egal cu momentul rezultant (diferit de zero) $\overline{M}$, ai lui (S).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a stabili acest lucru, să alegem un centru de reducere arbitrară P şi să formăm rezultanta generală $\overline{R}$ a lui (S) aplicată în P, precum şi momentul rezultant al lui (S) în raport cu P, vectorul $\overline{M}_P$.

După § 50, no. 3, se poate găsi un cuplu admiţând vectorul moment $\overline{M}_P$. Sistemul (S'), format din $\overline{R}$ şi acest cuplu, are ca rezultantă pe $\overline{R}$, căci cuplul are rezultanta nulă. Pe de altă parte, sistemul (S') are ca moment rezultant, faţă de P, pe $\overline{M}_P$, căci momentul lui $\overline{R}$ în raport cu P este nul ($\overline{R}$ trecând prin acest punct).

Rezultă aşadar, că sistemul (S') este echivalent cu sistemul dat (S). Cum alegerea centrului de reducere P este arbitrară, reducerea se poate efectua într'o infinitate de moduri. Putem enunţa, aşadar, următoarea teoremă: *„orice sistem de vectori aplicaţi sau alunecători, având rezultanta şi momentul rezultant diferiţi de zero, poate să fie redus, într'o infinitate de moduri, la un vector şi un cuplu“.*

Dacă centrul de reducere este pe axa centrală a sistemului (S), atunci sistemul echivalent (S') este un torsor.

52. Sisteme degenerate. 1. Dacă $\overline{R}=0$ şi $\overline{M}=0$, în acelaş timp, sistemul (S) este identic nul. 2. Dacă numai unul dintre aceşti doi vectori este nul, deci dacă

$$\text{a) } \overline{R}\neq 0\ ;\ \overline{M}_P=0\ ;\quad \text{sau}\quad \text{b) } \overline{R}=0\ ;\ \overline{M}_P\neq 0\ ,$$

sistemul echivalent (S') se reduce la un singur vector. In acest caz, putem enunţa teorema: *„condiţia necesară şi suficientă ca un sistem de vectori necoplanari să fie echivalent cu un singur vector, polar (cazul* a*) sau axial (cazul* b*), este ca invariantul scalar al sistemului să fie nul“,*

$$I=\overline{R}.\overline{M}=0\ . \tag{37}$$

Condiţia este necesară. In adevăr, dacă cel puţin unul din vectorii $\overline{R}$ sau $\overline{M}$ este nul, atunci produsul scalar (37) este evident nul, iar sistemul se reduce fie la un vector rezultant, fie la un cuplu.

Condiţia este suficientă. Dacă $I=0$, oricare ar fi polul P,

Scanned with OKEN Scanner

fără ca $\bar{R}$ sau $\bar{M}$ să fie nuli, din (37) rezultă că $\bar{R}$ şi $\bar{M}_P$ trebue să fie perpendiculari. Să alegem, în particular, polul P aşezat pe axa centrală. Pentru această poziţie, $\bar{M}$ trebue să fie paralel cu $\bar{R}$. Aceste două condiţii simultane fiind contradictorii, rezultă că cel puţin unul din cei doi vectori $\bar{R}$ sau $\bar{M}$ trebue să fie nul.

53. Teoremă. *„Orice sistem de vectori nedegenerat* ($\bar{R} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$), *poate să fie redus la un sistem echivalent, de doi vectori polari, necoplanari".*

Unul din vectori poate să fie aşezat pe o dreaptă dată arbitrar D, care însă să nu fie nici dreaptă de moment nul şi nici paralelă cu axa centrală a sistemului vectorial dat.

Fie $\bar{s}$ vectorul unitar pe dreapta considerată D şi $\bar{m}$ momentul acestui vector unitar în raport cu un punct oarecare P neaşezat pe D.

Este evident că

$$\bar{s} \,.\, \bar{m} = 0 \quad . \tag{38}$$

Trebue să arătăm că sistemul S ($\bar{R}$, $\bar{M}$) se poate reduce la sistemul (D) format din vectorul $\alpha\,\bar{s}$ (unde α este un scalar, diferit de zero, ce urmează a fi determinat) şi la un sistem degenerat (S_0) format dintr'un singur vector $\alpha'\,\bar{s}'$, necoplanar cu $\bar{s}$.

Pentru a găsi această descompunere observăm că

$$(S_0) = (S) - (D) \quad .$$

Aşadar, sistemul degenerat (S_0) este definit prin rezultanta $\bar{R} - \alpha\,\bar{s}$ şi momentul rezultant $\bar{M} - \alpha\,\bar{m}$ faţă de P. Pentru ca (S_0) să fie un vector (nu un cuplu), trebue ca $\bar{R} - \alpha\,\bar{s} \neq 0$.

Cum momentul este perpendicular pe vector, avem condiţia necesară

$$(\bar{R} - \alpha\,\bar{s}) \,.\, (\bar{M} - \alpha\,\bar{m}) = 0 \quad ; \tag{39}$$

de unde deducem, ţinând seamă de (38),

$$\bar{R} \,.\, \bar{M} - \alpha\,(\bar{s} \,.\, \bar{M} + \bar{m} \,.\, \bar{R}) = 0 \quad . \tag{40}$$

Prin ipoteză, sistemul nu este degenerat, iar dreapta D nu este dreaptă de moment nul; aşadar, atât primul termen cât

şi paranteza ce înmulţeşte pe α, sunt diferiţi de zero. Relaţia precedentă determină pe α, deci vectorul căutat, aşezat pe dreapta D. Fie α_1 această valoare.

De asemeni, am presupus prin ipoteză că D nu este paralelă cu axa centrală a sistemului dat, adică $\bar{s}$ nu este paralel cu $\bar{R}$; deci $\bar{R} - \alpha_1 \bar{s} \neq 0$.

Din aceste consideraţii rezultă că sistemul (S_0) se compune dintr'un singur vector, pe care-l putem scrie

$$\alpha' \bar{s}' = \bar{R} - \alpha_1 \bar{s} \ ,$$

şi al cărui moment în raport cu punctul P este

$$\alpha' \bar{m}' = \bar{M} - \alpha_1 \bar{m} \ ;$$

aici, α' este un scalar determinat, $\bar{s}'$ este vectorul alunecător unitar al dreptei care poartă vectorul S_0, iar $\bar{m}'$ este momentul lui $\bar{s}'$ în raport cu P. Rămâne să mai verificăm că $\bar{s}$ şi $\bar{s}'$ nu sunt coplanari. Acest lucru se constată din faptul că momentul relativ al acestor doi vectori

$$\alpha \bar{s}' . \bar{m} + \bar{s} . \alpha' \bar{m}' = \bar{s} . (\bar{M} - \alpha_1 \bar{m}) + \bar{m} . (\bar{R} - \alpha_1 \bar{s}) = \bar{m} . \bar{R} + \bar{s} . \bar{M} ,$$

este diferit de zero, prin ipoteză.

Caz particular. Dacă dreapta D este paralelă cu axa centrală a sistemului dat (S), sistemul vectorial se reduce la un vector rezultant de direcţie D şi la un cuplu (§ 51).

In adevăr, atunci $\bar{s}$ este paralel cu $\bar{R}$. Aşadar, putem scrie $\bar{s} = \lambda \bar{R}$. Relaţia (40) devine, în acest caz,

$$\bar{R} . \bar{M} - \alpha (\lambda \bar{R} . \bar{M}) = 0 \ ,$$

căci $\lambda \bar{m} . \bar{R} = \bar{m} . \bar{s} = 0$. Din această relaţie rezultă $\alpha = \frac{1}{\lambda}$. Rezultanta sistemului S_0 este, aşadar,

$$\bar{R} - \alpha \bar{s} = \bar{R} - \frac{1}{\lambda} (\lambda \bar{R}) \equiv 0 \ ,$$

fără ca momentul rezultant să fie nul. S_0 se reduce atunci, la un cuplu.

54. Sisteme speciale de vectori.

1. *Sistemele de vectori coplanari* au invariantul scalar identic nul. In adevăr, dacă luăm un centru de reducere P în

planul vectorilor, rezultanta sistemului (dacă nu este nulă) va fi aşezată în planul vectorilor şi aplicată în P. Atunci momentul rezultant în raport cu P va fi un vector perpendicular pe planul vectorilor coplanari daţi. Rezultanta şi momentul rezultant fiind doi vectori perpendiculari, produsul lor scalar, deci invariantul scalar al sistemului, va fi nul. Această proprietate ne arată că sistemul de vectori coplanari se poate reduce totdeauna, fie la un singur vector, fie la un cuplu, fie la un sistem identic nul (după § 51).

2. *Sistemele de vectori concurenţi*, într'un punct A, au o rezultantă care (dacă nu este nulă) trece prin punctul A şi un moment rezultant nul în raport cu A. Aceste sisteme se reduc aşadar, deasemenea, fie la un vector unic, fie la un sistem identic nul.

Aplicaţie. Dacă un sistem de trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ aplicaţi în trei puncte A, B, C este echivalent cu un sistem nul (îşi fac echilibru), atunci cei trei vectori sunt concurenţi. In adevăr, ca sistemul să fie nul, trebue ca momentul rezultant să fie nul. Deci momentul lui $\bar{b}$ în raport cu punctul A trebue să fie egal şi de sens contrar cu momentul lui $\bar{c}$ în raport cu A (căci momentul lui $\bar{a}$ în raport cu A este evident nul). Rezultă că $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ sunt în acelaş plan cu AB şi AC şi sunt concurenţi într'un punct O.

Rezultanta sistemului trebue să fie şi ea nulă. Ori, vectorii $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ au o rezultantă aplicată în punctul lor de concurs. Va trebui ca această rezultantă să fie egală ca modùl, direcţie, dar de sens contrar cu vectorul $\bar{a}$, spre a da o rezultantă generală nulă. Urmează că vectorul $\bar{a}$ trebue să treacă şi el prin punctul O de întâlnire a vectorilor $\bar{b}$ şi $\bar{c}$.

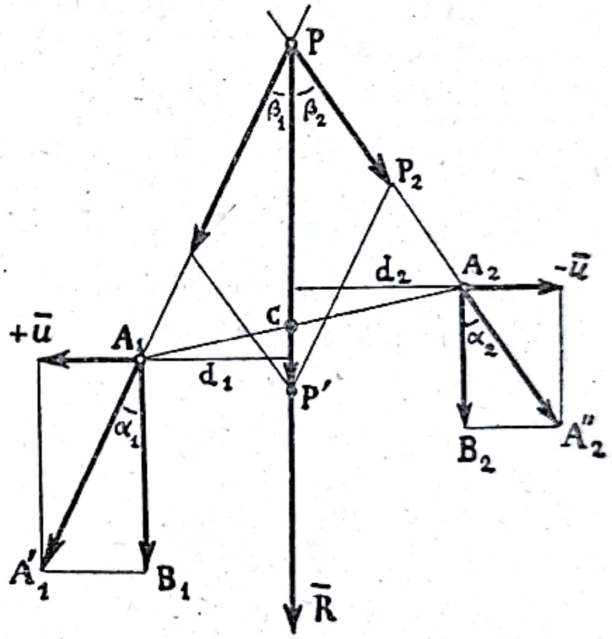
3. *Sisteme de vectori paraleli.* Rezultanta unui astfel de sistem (dacă nu este nulă) este paralelă cu direcţia comună a vectorilor. Momentul rezultant este, prin definiţie, perpendicular pe direcţia comună a vectorilor daţi, fiecare din momentele componente satisfăcând acestei proprietăţi. Invariantul scalar al sistemului este, aşadar, identic nul. Sistemul de vectori paraleli este reductibil deci, fie la un singur vector, fie la un cuplu, fie la un sistem identic nul.

a) Să considerăm, mai întâi, *doi vectori paraleli*, orientaţi

în acelaş sens $\bar{a}_1 = A_1 B_1$ şi $\bar{a}_2 = \overrightarrow{A_2 B_2}$, aplicaţi în punctele A_1 şi A_2. (fig. 28). Pentru a construi rezultanta să adăogăm un sistem identic nul alcătuit din vectorii $+\bar{u}$ şi $-\bar{u}$. Formăm rezultantele parţiale $\overrightarrow{A_1 A'_1}$ şi $\overrightarrow{A_2 A'_2}$, care se întâlnesc în punctul P. Le transportăm în P şi obţinem $\overrightarrow{PP_1}$ şi $\overrightarrow{PP_2}$. Suma lor $\overrightarrow{PP'}$ este rezultanta sistemului, căci

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{A_1 A'_1} + \overrightarrow{A_2 A'_2} =$$
$$(\bar{a}_1 + \bar{u}) + (\bar{a}_2 - \bar{u}) = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{R} .$$

Este uşor să dovedim că $\overrightarrow{PP'}$ este paralelă cu direcţia comună a vectorilor daţi. In adevăr, din triunghiurile $A_1 A'_1 B_1$, $A_2 A'_2 B_2$ şi $PP_1 P'$, scriind teorema rapoartelor dintre sinusuri şi laturile opuse, prin transformări elementare, deducem egalitatea unghiurilor $\alpha_1 = \beta_1$ şi $\alpha_2 = \beta_2$. Rezultanta este, aşadar, paralelă direcţiei comune a vectorilor daţi, fiind conţinută în planul acestor vectori. Dreapta de direcţie a rezultantei va întâlni dreapta $A_1 A_2$ într'un punct C aşezat între A_1 şi A_2 punct, care va putea să fie considerat ca punct de aplicare a rezultantei, dacă va putea să fie determinat fără ambiguitate din dătele problemei, ceeace se face precum urmează.



(Fig. 28)

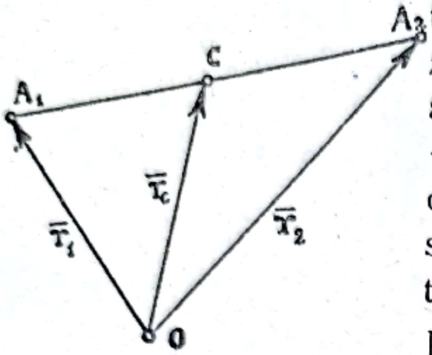
Momentul rezultantei în raport cu punctul C este, evident, nul; deci şi momentul sistemului de vectori dat, în raport cu C, va fi nul. Acest moment se compune, însă, din momentele vectorilor $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$, în raport cu C. Aşadar,

$$0 = \bar{M} = \left[\overrightarrow{CA_1}, \bar{a}_1\right] + \left[\overrightarrow{CA_2}, \bar{a}_2\right] , \qquad (41)$$

fiecare moment component fiind perpendicular pe planul vectorilor dați. Din (41) rezultă

$$\frac{\overline{A_1 C}}{\overline{C A_2}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{d_1}{d_2} \qquad (42)$$

unde d_1 și d_2 sunt distanțele lui C la dreptele celor doi vectori. Relația (42) determină, unic, poziția punctului C pe segmentul $A_1 A_2$ așezat *între* A_1 și A_2.



(Fig. 29)

În modul acesta, sistemul dat de doi vectori paraleli este redus la un singur vector rezultant aplicat în punctul C, numit *centru*, determinat unic prin (42).

Fie $\bar{r}_C$, $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ vectorii de poziție ai punctelor C, A_1 și A_2 față de un pol oarecare O din spațiu (fig. 29). Avem,

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_C + \overrightarrow{CA_1} \quad ; \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_C + \overrightarrow{CA_2} \; .$$

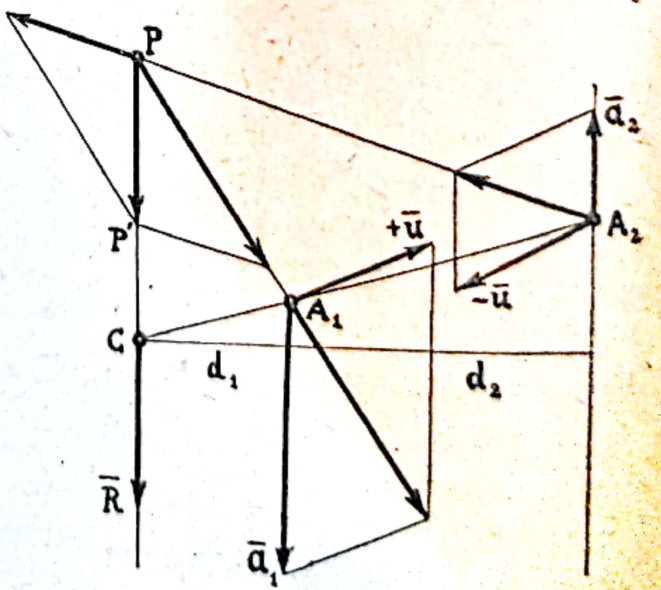
Inmulțind prima relație cu a_1 și a doua cu a_2, adunând și ținând seamă de (42), obținem

$$\bar{r}_C = \frac{a_1 \bar{r}_1 + a_2 \bar{r}_2}{a_1 + a_2} \; . \qquad (43)$$

b) Să considerăm acum doi vectori paraleli, însă orientați în sensuri contrare (fig. 30).

Dacă vectorii sunt egali, rezultanta lor este nulă, iar sistemul se reduce la un cuplu.

Dacă vectorii sunt diferiți, printr'o construcție similară celei din cazul precedent, vom obține rezultanta paralelă direcției comune a vectorilor dați, aplicată într'un punct C, care acum se va găsi așezat *în afara* segmentului $A_1 A_2$, și determinat de relația



(Fig 30)

(44) $$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA_2}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{d_1}{d_2} \quad ,$$

d_1 şi d_2 însemnând distanţele lui C la dreptele-suport ale celor doi vectori.

In mod analog, vectorul de poziţie al centrului C faţă de un pol oarecare din spaţiu se găseşte exprimat printr'o relaţie identică lui (43).

c) In cazul general, când avem un număr oarecare n, finit, de vectori paraleli, orientaţi în acelaş sens sau în sensuri contrare, vom putea determina, repetând succesiv construcţia efectuată în cazurile a doi vectori, poziţia punctului C de aplicare a rezultantei sistemului (dacă nu este nulă), prin relaţia, generalizantă a relaţiei (43),

(45) $$\bar{r}_C = \frac{\Sigma_i a_i \bar{r}_i}{\sum_i a_i} \quad ,$$

care raportată la un sistem de axe O, x, y, z, se descompune în

(45′) $$\xi = \frac{\Sigma a_i x_i}{\Sigma a_i} \quad , \quad \eta = \frac{\Sigma a_i y_i}{\Sigma a_i} \quad , \quad \zeta = \frac{\Sigma a_i z_i}{\Sigma a_i} \quad ,$$

unde x_i, y_i, z_i, sunt coordonatele punctului de aplicare a vectorului $\bar{a}_i$, iar ξ, η, ζ, sunt coordonatele *centrului vectorilor paraleli*, legaţi în punctele lor de aplicare. Acest punct este punctul de aplicare a rezultantei sistemului; poziţia sa depinde de valorile absolute şi de poziţiile originilor vectorilor paraleli daţi. Formulele (45′) arată că poziţia lui C nu depinde de ordinea vectorilor componenţi.

Dacă lăsăm vectorii paraleli să alunece pe dreptele lor suport, centrul se va deplasa pe dreapta

(46) $$\frac{x-\xi}{\alpha} = \frac{y-\eta}{\beta} = \frac{z-\zeta}{\gamma} \quad ,$$

unde α, β, γ, sunt cosinusurile directoare ale direcţiei comune vectorilor daţi. Rezultanta va aluneca, evident, pe dreapta (46), care este *axa centrală* a sistemului dat. Această definiţie nu stă în contradicţie cu definiţia axei centrale dată la § 41, căci momentul rezultant al sistemului, faţă de punctele dreptei (46), sunt nule.

Dacă rezultanta sistemului este nulă, sistemul se reduce la un cuplu sau la un sistem nul.

Scanned with OKEN Scanner

d) Aplicaţie: *Centru de greutate (baricentru).* 1. Să considerăm un sistem de n puncte materiale (v. *Mecanica* § 159) $A_i(\bar{r}_i)$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ caracterizate, respectiv, prin parametrii (pozitivi) de massă m_i $(i = 1, 2, \ldots n)$. Lăsăm sistemul material sub acţiunea câmpului gravitaţional de forţe paralele. Fiecare massă m_i va fi solicitată de o forţă, reprezentată printr'un vector $m_i \bar{g}$, unde $\bar{g}$ este vectorul de acceleraţie al gravităţii în locul de pe pământ unde se află sistemul material.

Mulţimea acestor forţe alcătueşte, aşadar, un sistem de vectori paraleli orientaţi în acelaş sens. După consideraţiile precedente, există un punct unic, anume, centrul sistemului, dat de formula (45), sub forma

$$\bar{r}_G = \frac{1}{m} \Sigma m_i \bar{r}_i \quad , \tag{47}$$

unde $m = \Sigma m_i$ este massa totală a sistemului material considerat.

Acest punct G se numeşte *centrul de greutate* sau *baricentrul* sistemului. Cum poziţia lui G depinde numai de configuraţia sistemului şi de massele punctelor constituente, el mai este numit *centru de massă.*

2. Dacă distribuţia de puncte materiale este *continuă* în spaţiu, ocupând o regiune finită V, massa unei particule conţinută în elementul de volum $\delta\tau$, în jurul punctului $\bar{r}(x, y, z)$ din V este

$$\delta m = \mu(\bar{r})\ \delta\tau + \varepsilon\,\delta\tau \quad ,$$

unde $\mu(\bar{r})$ este o funcţie integrabilă de poziţie, numită *densitate* şi $\varepsilon\,\delta\tau$ tinde către zero cu volumul ocupat de particulă. Massa totală a sistemului este $\int_V \mu\, d\tau$; astfel încât formula (47), care dă poziţia centrului de greutate, devine, în acest caz,

$$\bar{r}_G = \left(\int_V \bar{r}\,\mu\, d\tau\right) : \int_V \mu\, d\tau \quad .$$

Scanned with OKEN Scanner

CAP. IV

Diferenţierea vectorilor. Aplicaţie la curbe şi suprafeţe.

A. Derivarea şi integrarea funcţiilor vectoriale.

55. Funcţii vectoriale. In Analiza matematică se defineşte o funcţie scalară $f(t)$ de o variabilă independentă t, într'un domeniu dat, drept o corespondenţă între mulţimea liniară a valorilor pe care le ia $f(t)$ pentru mulţimea valorilor parametrului t, în domeniul

(1) $$t_0 \leq t \leq t_1 \quad .$$

Fie $a_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, un număr de n funcţii scalare, distincte, reprezentând componentele unui vector în spaţiul cu n dimensiuni, $\bar{s}_i$ (n vectori unitari independenţi între ei şi nevariabili cu t). Reprezentarea vectorului drept mărime extensivă, prin

(2) $$\bar{a}(a_1, a_2, \ldots a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\bar{s}_i = \bar{a}(t) \quad ,$$

permite definirea, în domeniul considerat, a vectorului, drept *funcţie vectorială* de variabila independentă t: $\bar{a} = \bar{a}(t)$. Înţelegem prin aceasta, mulţimea vectorilor $\bar{a}$, corespunzători mulţimii punctuale t, în domeniul considerat (1).

Această definiţie permite extinderea noţiunilor analitice cunoscute, de la funcţiile scalare la funcţiile vectoriale.

Funcţia (2) este *finită* dacă se poate găsi un număr finit N, destul de mare, astfel încât $|\bar{a}(t)| \leq N$.

Noţiunea de *limită* pentru o funcţie vectorială se defineşte precum urmează. Avem

(3) $$\lim_{t \to t'} \bar{a}(t) = \bar{L} \quad ,$$

dacă, pentru un număr pozitiv oricât de mic ε dat, vom putea găsi un număr pozitiv η, astfel încât să avem

$$|\bar{a}(t) - \bar{L}| < \varepsilon \quad , \tag{4}$$

când $|t - t'| < \eta$, cu satisfacerea relației (1) și $t_0 < t' < t_1$.

Considerând în această definiție numai intervalul (t_0, t'), avem noțiunea de *limită la stânga*:

$$L_- = \lim_{t \to t' - 0} \bar{a}(t) \quad ,$$

(t tinzând către t' prin valori mai mici ca t'); deasemeni, considerând intervalul (t', t_1), avem noțiunea de *limită la dreapta*:

$$L_+ = \lim_{t \to t' + 0} \bar{a}(t) \quad ,$$

(t tinzând către t' prin valori mai mari ca t').

Dacă

$$L_+ = L_- = \bar{a}(t') \quad ,$$

atunci

$$|\bar{a}(t) - \bar{a}(t')| < \varepsilon \quad , \tag{5}$$

pentru $|t - t| < \eta$. In acest caz, funcția vectorială (2) este continuă în t'.

Dacă $\bar{L}_+$ și $\bar{L}_-$ există, dar sunt diferite, funcția $\bar{a}(t)$ posedă în t' o *discontinuitate propriu zisă.*

Dacă $\bar{L}_+ = \bar{L}_- \neq \bar{a}(t')$, avem de a face cu o *discontinuitate improprie* în t'.

Noțiunile precedente asupra limitelor se pot deduce, evident, din reprezentarea scalară (2) cu ajutorul componentelor a_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, aplicând teorema cunoscută: limita unei sume cu un număr finit de termeni este egală cu suma limitelor termenilor.

Prin aceasta, relația (3) este echivalentă cu relațiile

$$\lim_{t \to t'} a_i(t) = L_i \quad ; \qquad (i = 1, 2, \ldots n$$

astfel încât

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} L_i \bar{s}_i \quad .$$

In adevăr, aceasta rezultă din relația

$$\bar{L} = \lim \bar{a}(t) = \Sigma \lim a_i(t)\,\bar{s}_i = \Sigma L_i \bar{s}_i \quad .$$

Se pot defini, în mod analog, funcţii vectoriale de mai mulţi parametri variabili (în număr finit)

$$\bar{a} = \bar{a}(q_1, q_2, \ldots q_n) \quad ,$$

aplicând fiecăruia în parte definiţiile de mai sus. Dacă cei n parametri sunt interpretaţi drept coordonatele unui punct într'un spaţiu generalizat, sau numai într'o regiune din acest spaţiu, funcţia $\bar{a}(q_i)$ este o *funcţie de punct.*

O altă noţiune importantă este aceea de *funcţie scalară de un vector:* este anume, o funcţie ale cărei argumente $q_1, \ldots q_n$ sunt componentele unui vector $\bar{r}$ într'un spaţiu cu n dimensiuni

$$\varphi = \varphi(q_1, q_2, \ldots q_n) \quad .$$

Dacă alegem un pol din care să ducem toţi vectorii echipolenţi vectorului variabil $\bar{r}(q_1, \ldots q_n)$, relaţia precedentă defineşte o funcţie scalară de punct

$$\varphi = \varphi(\bar{r}) \quad .$$

56. Derivarea unui vector variabil. Fie $\bar{a}(t)$ un vector funcţie continuă şi finită de variabila independentă reală t, în intervalul (1).

Unei creşteri Δt dată unei valori determinate a variabilei, în intervalul (1), va corespunde, conform condiţiei de continuitate şi finitudine, o creştere pentru vectorul dat, astfel încât diferenţa vectorială

$$\bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t) = \Delta \bar{a}(t) \quad , \tag{6}$$

tinde către zero odată cu Δt.

Diferenţa (6) este un vector determinat, funcţie de creşterea Δt, în domeniul (1). Impărţind relaţia (6) cu Δt şi trecând la limită, pentru $\Delta t \to 0$, obţinem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} = \frac{d\bar{a}(t)}{dt} \quad , \tag{7}$$

dacă această limită există.

Numim vectorul definit prin relaţia (7), *derivata* vectorului $\bar{a}(t)$ şi o notăm prin $\bar{a}'$ (când parametrul t reprezintă timpul, derivata precedentă se notează şi cu $\dot{\bar{a}}$, după Newton).

Din (7) rezultă că diferența

$$\frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} - \bar{a}' = \bar{\varepsilon} \quad , \tag{8}$$

este un *vector infinitesimal*, de același ordin ca și Δt, definit prin

$$\lim_{\Delta t \to 0} \bar{\varepsilon} = 0 \quad .$$

Înmulțind (8) cu Δt, avem

$$\Delta \bar{a} - \bar{a}' \Delta t = \bar{\varepsilon} . \Delta t \quad ,$$

care, prin generalizarea noțiunei corespondente din calculul infinitesimal, este o câtime infinitesimală vectorială de ordin superior lui Δt. De asemenea, numim câtimea

$$\bar{a}' \, dt = d\bar{a}(t) \quad ,$$

diferențiala vectorului $\bar{a}(t)$, prin generalizarea noțiunii curente din calculul cu funcțiile scalare.

Este clar că relația vectorială (7) se poate proiecta pe axele de coordonate și obține ecuațiile corespunzătoare pentru componentele vectorului dat, astfel încât, pentru un sistem cartesian x, y, z, avem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_x}{\Delta t} = \frac{da_x}{dt} \; ; \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_y}{\Delta t} = \frac{da_y}{dt} \; ; \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_z}{\Delta t} = \frac{da_z}{dt} \; .$$

Dacă funcția vectorială dată este funcție de un scalar, care la rândul său este funcție de o variabilă independentă $\bar{a}(s(t))$, atunci

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad ,$$

după regulile derivării funcțiilor de funcții.

Din definiție, rezultă imediat

$$\frac{d}{dt}(\bar{a} + \bar{b} + \ldots) = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt} + \ldots \; ;$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha \, \bar{a}) = \frac{d\alpha}{dt} \bar{a} + \alpha \frac{d\bar{a}}{dt} \quad ,$$

dacă α este un scalar diferit de zero, funcție de t.

Scanned with OKEN Scanner

Scriind vectorul $\bar{a} = a\,\bar{u}$, spre a pune în evidenţă versorul său, avem, după relaţia precedentă,

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\bar{u} + a(t)\frac{d\bar{u}}{dt} .$$

Derivata parţială a funcţiei vectoriale, continuă şi finită în toate variabilile $\bar{a} = \bar{a}(q_1, q_2, \ldots q_n)$ se obţine tratând funcţia pentru fiecare variabilă în parte, ca şi cum ar fi o funcţie de o singură variabilă.

Fie $(\Delta\bar{a})_i$ variaţia funcţiei când variabila q_i suferă variaţia Δq_i. Derivata parţială se defineşte prin

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_i} = \lim_{\Delta q_i \to 0} \frac{(\Delta\bar{a})_i}{\Delta q_i} , \tag{9}$$

când limita există.

Derivate succesive. Funcţia derivată în raport cu o variabilă q_i, este o nouă funcţie (9) de parametrii $q_1, q_2, \ldots q_n$, în general. Derivând din nou această funcţie, în raport cu o variabilă q_j, dacă limita respectivă există, se obţine derivata doua

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial q_i \partial q_j} . \tag{10}$$

şi aşa mai departe, pentru derivatele de ordin superior, când acestea există.

Diferenţială totală. Fie $\bar{a}(q_1, q_2, \ldots q_n)$ o funcţie continuă şi finită de toate variabilele q_i, admiţând derivate parţiale în raport cu aceste variabile. După (10), putem scrie

$$\frac{(\Delta\bar{a})_i}{\Delta q_i} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial q_i} + \bar{\varepsilon}_i \quad ; \qquad (\lim_{\Delta q_i \to 0} \bar{\varepsilon} = 0) .$$

deci

$$(\Delta\bar{a})_i = \frac{\partial\bar{a}}{\partial q_i}\Delta q_i + \bar{\varepsilon}_i \Delta q_i .$$

Din diferenţa vectorială

$$\Delta\bar{a} = \bar{a}(q_1 + \Delta q_1, \ldots q_n + \Delta q_n) - \bar{a}(q_1, \ldots q_n) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta\bar{a})_i ,$$

deducem

$$\Delta\bar{a} = \Sigma\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_i}\Delta q_i + \Sigma\bar{\varepsilon}_i \Delta q_i .$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecând la limită, când $\bar{\varepsilon}$ tinde către zero, dacă această limită există, obţinem diferenţiala totală a funcţiei vectoriale considerate

$$(11) \qquad d\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{a}}{\partial q_i} dq_i \quad .$$

Din această relaţie obţinem derivata unei funcţii de mai multe variabile

$$(12) \qquad \frac{d\bar{a}}{dt} = \Sigma \frac{\partial \bar{a}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \quad .$$

57. Desvoltare în serie Taylor. Dacă funcţia $\bar{a}(t)$ este continuă şi finită, şi admite derivate finite şi continue până la derivata de ordinul n, are loc formula lui Taylor:

$$(13) \qquad \bar{a}(t+h) = \bar{a}(\,) + \frac{h}{1}\frac{d\bar{a}(t)}{d} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2\bar{a}(\,)}{dt^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{h^n}{n!}\left(\frac{d^n\bar{a}(t)}{dt^n} + \bar{\varepsilon}\right) \quad ,$$

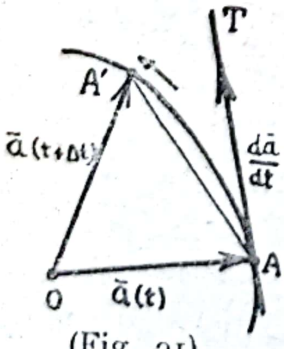
unde $\bar{\varepsilon}$ este un vector infinitesimal: $\lim_{h \to 0} \bar{\varepsilon} = 0$.

Dacă funcţia $\bar{a}(t)$ admite o desfăşurare (13) în serie Taylor, ea se numeşte, prin analogie cu funcţiile scalare, *funcţie analitică.*

58. Reprezentarea geometrică a derivatei (fig. 31). Să considerăm un vector (legat) cu originea în punctul fix O,

$$\bar{r} = \bar{a}(t) \quad ,$$

funcţie de t finită, continuă şi diferită de zero în intervalul (1).



(Fig 31)

Ecuaţia precedentă reprezintă o curbă. Două puncte pe curbă, infinitesimal vecine, ale căror poziţii corespund valorilor t şi $t+dt$ limitează un *element de arc* dat de

$$(14) \qquad ds^2 = d\bar{r}^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad ,$$

într'un sistem de coordonate tridreptunghiular. Integrala elementului de arc (existentă în condiţiile preconizate)

$$(15) \qquad s = \int_{s_0}^{s} ds = \int_{r_0}^{r} \sqrt{d\bar{r}^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

reprezintă lungimea arcului de curbă cu extremităţile în punctele corespunzătoare valorilor t_0 şi t. Când t variază, s este o funcţie crescătoare de t, anume $s = s(t)$ (având derivata pozitivă), care se anulează pentru $t = t_0$; punctul corespunzător acestei valori se numeşte *origina* arcelor de curbă. O schimbare de parametru poate schimba origina arcelor şi sensul acestora.

Funcţia $\bar{a}(t)$ fiind derivabilă, avem

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} = \lim_{A' \to A} \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta} = \overrightarrow{AT} \quad . \tag{16}$$

Dreapta AT de direcţie $\frac{d\bar{r}}{dt}$, prin punctul A, este *tangenta geomeirică* în punctul A, la curbă.

Din ecuaţia (15), având în vedere ipotezele admise, cum admitem că funcţia $s(t)$ are derivată continuă, deducem

$$\overrightarrow{AT} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = s'\bar{t} \quad , \tag{17}$$

unde vectorul

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} \quad , \tag{18}$$

însemnează, precum se vede, vectorul unitar al tangentei la curbă, orientat ca şi $\overrightarrow{AT}$, în sensul arcelor crescătoare. In adevăr, după (14) şi (18), avem $t^2 = 1$; şi din (15) rezultă $s' > 0$.

Câtimile

$$\frac{dx}{ds} = \alpha \, , \quad \frac{dy}{ds} = \beta \, , \quad \frac{dz}{ds} = \gamma \, , \tag{19}$$

fiind proiecţiile lui $\bar{t}$ pe axele de coordonate, reprezintă cosinusurile directoare ale tangentei. Ele verifică relaţia

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \, .$$

59. Proprietăţi. *Derivata produsului scalar.* După definiţia derivatei, avem

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}.\bar{b}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{a}(t+\Delta t).\ \bar{b}(t+\Delta t) - \bar{a}(t).\ \bar{b}(t)}{\Delta t} \, .$$

Observăm că se poate scrie, după (6),

$$\bar{a}(t+\Delta t)=\bar{a}(t)+\Delta\bar{a}$$
$$\bar{b}(t+\Delta t)=\bar{b}(t)+\Delta\bar{b},$$

unde $\Delta\bar{a}$ şi $\Delta\bar{b}$ sunt doi vectori care tind la zero cu Δt. Înlocuind, avem

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}.\bar{b})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\bar{a}(t)+\Delta\bar{a}).(\bar{b}(t)+\Delta\bar{b})-\bar{a}(t).\bar{b}(t)}{\Delta t}\ .$$

Deoarece produsul scalar este distributiv, rezultă

$$\frac{d}{dt}(\bar{a},\bar{b})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{a}.\bar{b}(t)+\Delta\bar{b}.\bar{a}(t)+\Delta\bar{a}.\Delta\bar{b}}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t}\bar{b}(t)+\frac{\Delta\bar{b}}{\Delta t}\bar{a}(t)+\Delta\bar{a}.\frac{\Delta\bar{b}}{\Delta t}\right.=\bar{b}(t)\frac{d\bar{a}}{dt}+\bar{a}(t)\frac{d\bar{b}}{dt}\ .$$

Deci, regula de derivare a unui produs de scalari se aplică şi unui produs scalar de doi vectori.

Derivata produsului vectorial se obţine absolut la fel; vom fi însă atenţi la ordinea factorilor (deoarece produsul vectorial este anticomutativ). Se obţine

$$\frac{d}{dt}[\bar{a},\bar{b}]=\left[\frac{d\bar{a}}{dt},\ \bar{b}\right]+\left[\bar{a},\frac{d\bar{b}}{dt}\right]\ .$$

La fel urmează, de exemplu :

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}.[\bar{b},\bar{c}])=\frac{d\bar{a}}{dt}.[\bar{b},\bar{c}]+\bar{a}.\left[\frac{d\bar{b}}{dt},\bar{c}\right]+\bar{a}.\left[\bar{b},\frac{d\bar{c}}{dt}\right]\ .$$

60. Integrale vectoriale. Fiind dată o funcţie vectorială de parametrul t, definit într'un interval (1), putem să definim integrala vectorială

$$\bar{A}(t)=\int_{t_0}^{t}\bar{a}(t)\,dt\ , \tag{20}$$

ca şi în cazul curent al funcţiilor scalare, ca o limită de forma

$$\bar{A}=\lim_{\Delta t\to 0}\Sigma\,\bar{a}(\ )\Delta t\ , \tag{21}$$

admiţând că această limită există şi este independentă de modul de divizionare a intervalului (t_0, t) în subintervale Δt.

Zicem, în aceste condiţii, că vectorul $\bar{a}(t)$ este integrabil în intervalul considerat.

Deasemenea, vom exprima integrala nedefinită vectorială (funcţia primitivă vectorială)

$$(22) \qquad \int \bar{a}(t)\, dt = \bar{A}(t) + \text{vector independent de } t,$$

prin condiţia

$$(23) \qquad \bar{a}(t) = \frac{d\bar{A}(t)}{dt} .$$

Funcţia $\bar{A}(t)$ definită de relaţia (20) este o funcţie primitivă pentru $\bar{a}(t)$. Invers, dacă $\bar{A}(t)$ este o funcţie primitivă pentru $\bar{a}(t)$, avem

$$\int_{t_0}^{t} \bar{a}(t) = \bar{A}(t) - \bar{A}(t_0) .$$

Definiţia (21) arată că din ecuaţia vectorială (20), prin proiecţie pe axele de coordonate, invariabile cu t, se obţin ecuaţii scalare, înlocuind vectorii $\bar{a}(t)$ şi $\bar{A}(t)$ prin componentele lor. Rezultă că, pentru ca $\bar{a}(t)$ să fie o funcţie integrabilă în intervalul considerat, este necesar şi suficient ca proiecţiile a_x, a_y, a_z să fie funcţii integrabile. Din aceste consideraţii se vede că un vector $\bar{a}(t)$, continuu, este o funcţie vectorială integrabilă.

62. Integrale de linie, de suprafaţă şi de volum. Să considerăm într'un spaţiu sau într'un domeniu dintr'un spaţiu n dimensional funcţia vectorială de punct $\bar{a} = \bar{a}(q_1, q_2, \ldots q_n)$ continuă şi finită, de variabilele ce figurează în argument. Fie (λ) un domeniu determinat din spaţiul considerat, în care funcţia satisface condiţiilor enunţate de continuitate şi finitudine. Acest domeniu poate să fie o porţiune de *curbă*, pe care s'o considerăm rectificabilă; sau o *suprafaţă* regulată sau o regiune de *volum* fără singularităţi.

Dacă

$$(24) \qquad \lim_{\Delta\lambda \to 0} \Sigma\, \bar{a}\, \Delta\lambda = \bar{A}$$

există şi este independentă de modul de subdivizionare a do-

meniului (λ) în elemente $\Delta\lambda$, zicem că $\bar{A}$ este o integrală vectorială:

1. *curbilinie*

$$\int_C \bar{a}\, ds \quad ,$$

dacă integrala este extinsă dealungul unei curbe rectificabile C, ds însemnând elementul de arc pe curbă;

2. *superficială*

$$\int_S \bar{a}\, d\sigma \quad ,$$

$d\sigma$ însemnând un element superficial din suprafaţa S asupra căreia este extinsă integrala;

3. *de volum*

$$\int_V \bar{a}\, d\tau \quad ,$$

dacă $d\tau$ este un element de volum în domeniul considerat V.

Este evident că, raportând aceste definiţii la o reprezentare analitică faţă de un sistem de axe de coordonate, fixe, putem să definim fiecare componentă în parte, după teoremele cunoscute ale Analizei infinitesimale, prin

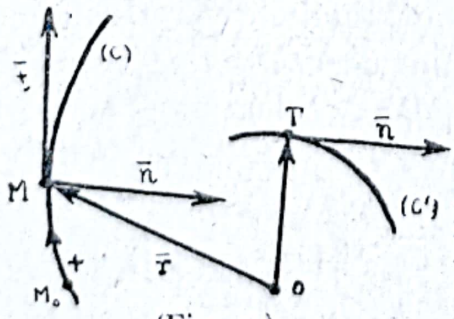
$$A_i = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \Sigma\, a_i\, \Delta\lambda = \int_{(\lambda)} a_i\, d\lambda$$

şi folosi această relaţie pentru justificarea definiţiei (24).

B. Câteva proprietăţi de-ale curbelor, formulate vectorial.

Nefiind în intenţia mea de a prezenta o expunere de „Geometrie diferenţială", voi reda numai câteva proprietăţi de-ale curbelor şi suprafeţelor, care găsesc aplicaţii în Mecanică şi Fizică.

63, Indicatoarea sferică (fig. 32). Fie o curbă oarecare strâmbă (C) pe care se deplasează un punct M, a cărui poziţie este determinată de lungimea arcului de curbă s, măsurat de la o origină fixă M_0 pe curbă, într'un sens ales ca sens pozitiv de circulaţie, anume sensul arcului crescător.



(Fig. 32)

Faţă de un punct O ales ca pol, sau ca origină a axelor de coordonate, punctul M, presupus că

este un punct *regulat* al curbei, este determinat de vectorul de poziție $\bar{r} = \bar{r}(s)$, funcție continuă, uniformă și derivabilă de câte ori este nevoe, de s.

Tangenta la (C) în M va fi determinată de vectorul unitar (v. § 58)

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} , \tag{25}$$

$\bar{r} = \bar{r}(s)$ exprimând ecuația parametrică a curbei (C).

Pe sfera de rază egală cu unitatea, având centrul în punctul O, construim curba care e locul geometric al punctelor T date de condiția $\overrightarrow{OT} = \bar{t}$. Această curbă poartă numele de *indicatoare sferică* (C') a curbei (C). Vom însemna elementul vectorial de arc al curbei (C) prin $d\bar{s} = ds.\bar{t}$.

64. Curbura. Când punctul M este deplasat pe curba (C), punctul T se deplasează pe curba (C') astfel încât arcul s de pe (C) crescând, și arcul s_1 de pe (C') să crească. Așadar, s_1 poate să fie considerat ca funcție crescătoare de s : $s_1 = s_1(s)$.

Unghiul format de tangenta geometrică în M cu tangenta geometrică în punctul infinit vecin M_1 se numește *unghi de contingență*. El este măsurat prin Δs_1.

Expresia

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ds_1}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta s} \tag{26}$$

se numește *curbura* curbei (C) în punctul M, iar ρ se numește *rază de curbură*. Admițând, cum am făcut mai sus, că arcele s_1 și s variază în același sens, curbura este pozitivă; dacă arcele variază în sens contrar, curbura este negativă. Pentru a fixa ideile, vom face ipoteza că ne găsim în primul caz.

65. Normala principală. Avem, evident, după (25) și (26),

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{ds_1}\,\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\frac{d\bar{t}}{ds_1} \tag{27}$$

unde vectorul $d\bar{t} : ds_1$ este tangent în T la curba (C') și este un vector unitar. Să-l însemnăm cu

$$\bar{n} = \frac{d\bar{t}}{ds_1} , \tag{28}$$

Vectorul $\bar{n}$ fiind tangent în T la (C'), curbă aşezată pe o sferă, rezultă că este perpendicular pe $\overrightarrow{OT}$, deci pe $\bar{t}$, adică normal în M la (C). Sensul lui $\bar{n}$ fiind al arcelor s_1 (şi deci s) crescătoare, el va fi îndreptat spre concavitatea curbei în fiecare punct M. Acest vector $\bar{n}$ se numeşte *normala principală* la curba (C) în punctul M.

66. Planul osculator la curba (C) în punctul M este planul determinat de vectorii unitari $\bar{t}$ şi $\bar{n}$ în M. Acest plan este planul limită al planului format de tangenta în M şi de un punct M_1, vecin lui M pe (C), când M_1 tinde spre M pe curba (C). Fie

$$\bar{r}_1=\bar{r}(t+h)=\bar{r}(t)+\frac{h}{1}\bar{r}'(t)+\frac{h^2}{2!}\bar{r}''(t)+\frac{h^3}{3!}\bar{r}'''(t)+\dots$$

vectorul de poziţie al punctului M_1 pe curbă. După definiţia de mai sus, planul osculator va fi determinat de vectorul $\bar{r}'$ şi de vectorul

$$\bar{a}=\frac{\bar{r}(t+h)-\bar{r}(t)}{h}=\bar{r}'(t)+\frac{h}{2!}\bar{r}''(t)+\frac{h^2}{3!}\bar{r}'''(t)+\dots\ ,$$

ceeace revine a spune că planul osculator este determinat de vectorul $\bar{r}'(t)$ şi de vectorul

$$\frac{2}{h}(\bar{a}-\bar{r}')=\bar{r}''(t)+\frac{h}{3}(\dots)\ ,$$

când $h\to 0$. Aceasta însemnează că planul osculator este planul format de vectorii $\bar{r}'(t)$ şi $\bar{r}''(t)$, admiţând că sunt distincţi. Fie $\bar{R}$ poziţia unui punct din planul osculator faţă de O; vectorul $\bar{R}-\bar{r}$ se va găsi în acest plan. Urmează că vectorii $\bar{R}-\bar{r}$, $\bar{r}'$ şi $\bar{r}''$ trebue să fie coplanari. Aşadar, ecuaţia planului osculator se deduce din condiţia ca cei trei vectori să fie în acelaş plan, anume ca determinantul format cu componentele acestor trei vectori să fie nul

$$(\bar{R}-\bar{r},\bar{r}',\bar{r}'')=0\ , \tag{29}$$

ecuaţie, care reprezintă planul osculator.

Acest plan poate să fie definit şi prin trei puncte infinit vecine sau prin două tangente infinit vecine, după cum se ştie din teoria curbelor.

Scanned with OKEN Scanner

67. Raza de curbură fiind definită prin relaţia (22), deducem din relaţiile (16) şi (17)

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n} \tag{30}$$

sau

$$d\bar{t} = \frac{ds}{\rho}\bar{n};$$

sau încă, derivând relaţia (21) în raport cu s,

$$d^2\bar{r}.\ ds - d^2s.\ d\bar{r} = \frac{ds^3}{\rho}\bar{n},$$

şi ridicând la patrat,

$$\left(\frac{ds^3}{\rho}\right)^2 = (d^2\bar{r})^2\, ds + (d^2s)^2\, dr^2 - 2\, ds.\, d^2s.\, d\bar{r}.\, d^2\bar{r}\ .$$

Pe de altă parte avem, precum se ştie, $d\bar{r}^2 = ds^2$; de unde $d\bar{r}.\ d^2\bar{r} = ds.\ d^2s$. Rezultă că

$$\left(\frac{ds^3}{\rho}\right)^2 = (d^2\bar{r})^2.(a\bar{r})^2 + (d^2s.\ ds)^2 - (ds.\ a^2s)^2 - (d^2\bar{r}.\ d\bar{r})^2 = [d^2\bar{r}, d\bar{r}]^2$$

după identitatea lui LAGRANGE.

Prin urmare,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{ds^3}\sqrt{[d\bar{r}, d^2\bar{r}]^2}\ .$$

68. Prima serie de formule FRENET este dată de relaţia vectorială (30)

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}, \qquad (F_1)$$

unde $\bar{t}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ şi $\bar{n}\,(\alpha', \beta', \gamma')$. Cîtimile (α, β, γ) şi $(\alpha', \beta', \gamma')$ sunt cosinusurile directoare ale tangentei, respectiv normalei principale, la (C) în M. Formula (F_1) se exprimă analitic astfel:

$$\alpha' = \rho\frac{d\alpha}{ds};\ \beta' = \rho\frac{d\beta}{ds};\ \gamma' = \rho\frac{d\gamma}{ds}.$$

69. Binormala, este vectorul care împreună cu tangenta şi normala principală formează în punctul M al curbei (C) un tiedru tridreptunghiu drept. Ea este deci perpendiculară pe

planul osculator în M. Să luăm pe binormală un vector unitar $\bar{b}$. Vom avea prin definiţie

$$\bar{b} = [\bar{t}, \bar{n}]. \tag{31}$$

Cu ajutorul binormalei putem construi o altă indicatoare sferică (C_2), la fel cum am construit şi indicatoarea (C') cu ajutorul tangentei. Fie $s_2 = s_2(s)$ arcul de indicatoare (C_2), crescător odată cu arcul s.

Avem

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{d\bar{b}}{ds_2}\,\frac{ds_2}{as}\,, \tag{32}$$

unde $d\bar{b} : ds_2$ este, prin construcţie, vectorul unitar al tangentei la (C_2), în punctul corespunzător lui M pe (C). Se verifică imediat că acest vector are aceiaşi direcţie cu $\bar{n}$. In adevăr, prin definiţie, rezultă

$$\bar{b}^2 = 1\ ;\ \bar{b}.\,\bar{t} = 0\ ;\ \bar{b}.\,\bar{n} = 0\ ;\ \text{deci}\ \bar{b}.\,d\bar{b} = 0\ . \tag{33}$$

Inmulţind relaţia (F_1) scalar cu $\bar{b}$ obţinem

$$\bar{b}.\,\bar{n}\,\frac{ds}{\rho} + \bar{t}.\,d\bar{b} = 0\,, \tag{34}$$

ţinând seamă de derivata celei de a doua relaţie (33). Din a treia relaţie (33) şi relaţia (34), sub ipoteza că ρ nu este nul, rezultă

$$\bar{t}.\,d\bar{b} = 0\ ;$$

deci $d\bar{b}$ este perpendicular pe $\bar{t}$ şi $\bar{b}$. Atunci,

$$\frac{d\bar{b}}{ds_2} = \varepsilon\,\bar{n}\ . \qquad (\varepsilon = \pm 1)\ . \tag{35}$$

Planul normal este planul vectorilor $\bar{n}$ şi $\bar{b}$; planul format de vectorii $\bar{t}$ şi $\bar{b}$ se numeşte *plan rectificant*.

70. Torsiunea. Raza de torsiune. Din (20) şi (23) deducem

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \varepsilon\,\frac{ds_2}{ds}\,\bar{n}\ . \tag{36}$$

Scalarul $\varepsilon\,\frac{ds_2}{as}$ joacă un rol analog curburei. El se numeşte *torsiunea* curbei (C) în punctul considerat M, şi se notează cu

(37) $$\frac{1}{\tau} = \varepsilon \frac{ds_2}{ds}$$

unde τ reprezintă *raza de torsiune.*

71. A doua serie de formule FRENET. Din (35) şi (36(rezultă

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\bar{n} . \qquad (F_2)$$

Acesta este seria a doua de formule FRENET.

72. Calculul razei de torsiune. Inlocuind în relaţia (31) pe $\bar{t}$ şi $\bar{n}$ cu diferenţialele vectorului $\bar{r}$, deducem, ţinând seamă că $\bar{b}$ e vector unitar,

$$\bar{b} = \frac{1}{|[d\bar{r}, d^2\bar{r}]|}[d\bar{r}, d^2\bar{r}].$$

Pentru uşurarea scrisului, să notăm pentru moment $\bar{a} = [a\bar{r}, a^2\bar{r}]$. Vom avea, derivând relaţia precedentă,

$$d\bar{b} = \frac{\bar{a}^2 . d\bar{a} - \bar{a}(\bar{a} . d\bar{a})}{(\bar{a}^2)^{3/2}} ,$$

sau încă

(38) $$d\bar{b} = \frac{1}{(\bar{a}^2)^{3/2}}[\bar{a}, [d\bar{a}, \bar{a}]] .$$

Pe de altă parte

$$[d\bar{a}, \bar{a}] = [d\bar{a}, [d\bar{r}, d^2\bar{r}]] = (d\bar{a}, d^2\bar{r})\, d\bar{r} \ ; \text{ căci } d\bar{a} . d\bar{r} = 0 .$$

Relaţia (38) devine

$$db = \frac{1}{(\bar{a}^2)^{3/2}}(d\bar{a} . d^2\bar{r})[\bar{a}, d\bar{r}] \ ;$$

deci

(39) $$\frac{d\bar{b}}{as} = \frac{d\bar{a} . d^2\bar{r}}{\bar{a}^2}\bar{n} ,$$

căci

$$[\bar{a}, d\bar{r}] = \sqrt{\bar{a}^2} . as\, [\bar{b}, \bar{t}] .$$

Făcând

$$d\bar{a} = [d\bar{r}, d^3\bar{r}]$$

şi substituind în (F_2), obţinem, din (39),

(40) $$\frac{1}{\tau} = -\frac{(d\bar{r}, d^2\bar{r}, d^3\bar{r})}{[d\bar{r}, d^2\bar{r}]^2} .$$

Scanned with OKEN Scanner

73. A treia serie de formule FRENET. Să calculăm pe $\frac{d\bar{n}}{ds}$ din relaţia (31) avem

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \left[\frac{d\bar{b}}{ds}, \bar{t}\right] + \left[\bar{b}, \frac{d\bar{t}}{ds}\right] = \frac{1}{\tau}[\bar{n}, \bar{t}] + \frac{1}{\rho}[\bar{b}, \bar{n}],$$

sau, în definitiv :

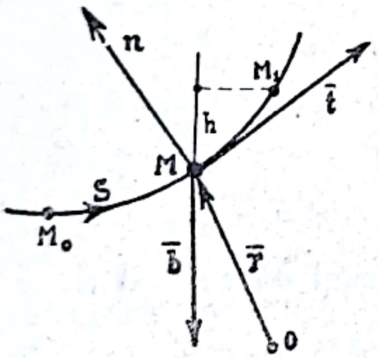
$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\bar{t} - \frac{1}{\tau}\bar{b}, \qquad (F_3)$$

care constitue a treia serie de formule Frenet.

In rezumat, *formulele lui* FRENET, sunt :

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n} \; ; \; \frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\bar{n} \; ; \; \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\bar{t} - \frac{1}{\tau}\bar{b}.$$

74. Interpretare geometrică pentru semnul torsiunii (fig. 33). Planul osculator al unei curbe *plane* rămâne invariabil, vectorul $\bar{b}$ fiind mereu paralel cu el însuşi : torsiunea este nulă, în fiecare punct al curbei. O curbă strâmbă traversează, în fiecare punct al ei M, planul osculator respectiv ; torsiunea este diferită de zero (afară de puncte excepţionale). Să analizăm sensul în care curba traversează planul osculator: acest sens depinde de semnul torsiunii în fiecare punct M al curbei.



(Fig. 33)

In acest scop, vom distinge cele două regiuni în care planul osculator desparte spaţiul, în vecinătatea punctului M, precum urmează : *regiunea pozitivă* este regiunea în care se găseşte semidreapta pozitivă a direcţiei vectorului $\bar{b}$; *regiunea negativă* este regiunea în care se găseşte semidreapta negativă a direcţiei vectorului $\bar{b}$.

Dacă torsiunea este diferită de zero în punctul M, presupus punct regulat al curbei, aceasta va traversa planul osculator în acest punct şi va trece dintr'o regiune în cealaltă.

Fie $\bar{r}(s)$ vectorul de poziţie al punctului $M(s)$ de pe curba dată, faţă de un pol O. Fie M_1 un punct vecin lui M pe curbă, astfel încât $MM_1 = h$ să fie pozitiv. Curba să fie continuă în M.

Desvoltând în serie TAYLOR vectorul de poziţie, obţinem

$$\bar{r}(s+h)-\bar{r}(s)=\Delta\bar{r}=\frac{h}{1}\frac{d\bar{r}}{ds}+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}+\varepsilon\right)\ ;$$

unde ε tinde către zero.

După (25) și (F_1), putem scrie

$$\Delta\bar{r}=h\bar{t}+\frac{h^2}{2\rho}\bar{n}+\frac{h^3}{6}\left(\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}+\bar{\varepsilon}\right). \tag{41}$$

Dar, din

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\bar{n}\ .$$

derivând încă odată în raport cu s, obținem

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=\bar{n}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{n}}{ds}\ ;$$

și, după (F_3),

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=\bar{n}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\left(-\frac{1}{\rho}\bar{t}-\frac{1}{\tau}\bar{b}\right). \tag{42}$$

Poziția curbei în vecinătatea lui M, față de planul osculator, va fi cunoscută dacă se poate determina poziția unui punct M_1 infinit vecin lui M pe curbă, față de planul osculator, ceeace revine, față de direcția vectorului $\bar{b}$ (perpendicular pe planul osculator). Să considerăm, în acest scop, proiecția segmentului de curbă MM_1 pe direcția lui $\bar{b}$ în M. Această proiecție este evident egală cu $\Delta\bar{r}.\bar{b}$. Să înmulțim atunci ecuația (41) scalar cu $\bar{b}$. Obținem

$$\text{Pr.}\,MM_1=\bar{b}.\,\Delta\bar{r}=\frac{h^3}{6}\left(\bar{b}.\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}+\bar{b}.\bar{\varepsilon}\right), \tag{43}$$

căci celelalte produse sunt nule, în virtutea relațiilor (33). Să înmulțim relația (42) scalar cu $\bar{b}$. Obținem

$$\bar{b}.\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=-\frac{1}{\rho\tau}\ , \tag{44}$$

căci celelalte produse sunt nule, după (33).

Al doilea termen în paranteza din membrul al doilea al relației (43) este neglijabil față de primul, căci $\varepsilon\ll 1$. Așadar, introducând valoarea (44) în (43), se obține

$$\text{Pr.}\,\overline{MM_1}=-\frac{h^3}{6\rho\tau}(1+\bar{\varepsilon}'),\ \text{cu}\ \bar{\varepsilon}'\to 0\ \text{și}\ \text{sgn.}\,\text{Pr.}\,\overline{MM_1}=-\text{sgn}\,\frac{1}{\tau}\ ,$$

căci primul factor este pozitiv (am presupus $h>0$).

Punctul M_1 se va găsi în regiunea pozitivă sau negativă după cum τ este negativ sau pozitiv. Aceste raporturi se inversează dacă $h < 0$.

Deci, curba descrisă în sensul arcelor crescătoare traversează planul osculator în M trecând din regiunea negativă în cea pozitivă, în cazul întâi (curba se numeşte *sinistrorsum* în M); sau din regiunea pozitivă în cea negativă, în cazul al doilea (curba se numeşte *destrorsum* în M).

Trebue observat că această interpretare este independentă de alegerea sensului arcelor crescătoare (după cum reese şi din expresia lui τ), căci dacă schimbăm acest sens se schimbă şi sensul lui $\bar{t}$ şi deci al lui $\bar{b}$.

75. Centrul de curbură. Să ducem o sferă de rază a prin trei puncte, infinit vecine punctului M al curbei (C), având centrul determinat prin vectorul de poziţie $\bar{R}_c$. Ecuaţia acestei sfere

$$(\bar{r}(s) - \bar{R}_c)^2 - a^2 = 0 \ ,$$

considerată ca o ecuaţie în s, trebue să poseadă o rădăcină triplă pentru valoarea lui s corespunzătoare punctului M. Aşadar, derivatele de ordinul întâi şi al doilea al funcţiei în s din primul membru al ecuaţiei sferei, trebue să se anuleze:

$$(\bar{r} - \bar{R}_c) \cdot \bar{t} = 0 \ ,$$

$$1 + (\bar{r} - \bar{R}_c) \cdot \frac{\bar{n}}{\rho} = 0 \ . \tag{45}$$

Din prima ecuaţie (45) deducem că vectorul $\bar{r} - \bar{R}_c$ trebue să fie perpendicular pe $\bar{t}$; aşadar, acest vector va fi conţinut în planul normal la curbă. Să admitem că el se află chiar în planul osculator. Din a doua ecuaţie (45) rezultă că proiecţia vectorului $\bar{r} - \bar{R}_c$ pe normala principală este egală cu raza de curbură ρ, în punctul M. Ori, intersecţia planului normal cu planul osculator fiind normala principală, rezultă că centrul sferei construită mai sus se va găsi chiar pe normala principală. Fie C acest punct, pe care îl numim centru de curbură. Poziţia lui va fi dată, deci, de a doua ecuaţie (45) sub forma

$$\bar{R}_c = \bar{r} + \rho \, \bar{n} \ . \tag{46}$$

După cum ρ este pozitiv sau negativ, raza de curbură

este îndreptată spre centrul de curbură sau în sens contrar.

Ridicând a doua ecuație (45) la patrat și comparând cu ecuația (44) rezultă că $a = \rho$.

76. Sfera osculatoare. Să ducem prin patru puncte infinit vecine unui punct M al curbei (C) o sferă de rază a, cu centrul în $O\ (\bar{R}_0)$. Dacă aceste patru puncte sunt aduse să se confunde cu M, obținem *sfera osculatoare*, posedând ecuația

$$(\bar{r}(s) - \bar{R}_0)^2 - a^2 = 0 \ , \tag{47}$$

care trebue să aibă o rădăcină de ordinul al patrulea în s pentru valoarea corespunzătoare punctului M. Așadar, trebue ca derivatele de ordinul întâi, doi și trei, în raport cu s, a funcției din membrul întâi al ecuației (47) să se anuleze; prin urmare

$$(\bar{r} - \bar{R}_0) \cdot \bar{\mathbf{t}} = 0 \ ,$$

$$1 + (\bar{r} - \bar{R}_0) \cdot \frac{\bar{\mathbf{n}}}{\rho} = 0 \ , \tag{48}$$

$$(\bar{r} - \bar{R}_0) \frac{1}{\rho} \left(- \frac{\bar{\mathbf{b}}}{\tau} - \frac{\bar{\mathbf{t}}}{\rho} \right) - (\bar{r} - \bar{R}_0) \rho' \frac{\bar{\mathbf{n}}}{\rho^2} = 0 \ .$$

Dacă ținem seamă de primele două ecuații (48), ultima din ecuațiile (48) se reduce la

$$(\bar{R}_0 - \bar{r}) \cdot \bar{\mathbf{b}} + \rho' \tau = 0 \ . \tag{49}$$

Prima ecuație (48) ne spune că centrul sferei trebue să fie așezat în planul normal al curbei. A doua ecuație (48) și ecuația (49) ne spun că, în planul normal, vectorul $\bar{R}_0 - \bar{r}$ este descompus după direcția $\bar{\mathbf{n}}$ a normalei principale, având componenta ρ, și după binormala $\bar{\mathbf{b}}$, având componenta $-\rho'\tau$.

In aceste condiții, compunând vectorul $\bar{R}_0 - \bar{r}$, în planul normal, vom obține

$$\bar{R}_0 - \bar{r} = \rho \bar{\mathbf{n}} - \rho' \tau \bar{\mathbf{b}} \ ;$$

de unde rezultă că poziția centrului sferei osculatoare este dată de vectorul

$$\bar{R}_0 = \bar{r} + \rho \bar{\mathbf{n}} - \rho' \tau \bar{\mathbf{b}} \ . \tag{50}$$

Ridicând a doua ecuație (48) și ecuația (49) la patrat și adunând, se obține raza sferei osculatoare

$$a^2 = \rho^2 + \rho'^2 \tau^2 \ . \tag{51}$$

Din ecuaţiile (50) şi (51) se constată că sfera osculatoare are numai în cazul curbelor plane torsiunea nulă ($\tau = 0$); în cazul curbelor strâmbe de curbură constantă ($\rho' = 0$), raza sferei osculatoare este egală cu raza de curbură, iar centrul ei se găseşte în centrul de curbură.

C. Câteva proprietăţi de-ale suprafeţelor, formulate vectorial. [1])

Ca şi în cazul curbelor vom stabili câteva din proprietăţile esenţiale de-ale suprafeţelor, în special acele proprietăţi care găsesc aplicaţii în Mecanică şi Fizică, mai cu deosebire, în legătură cu introducerea spaţiilor generalizate în Teoria relativităţii.

77. Coordonatele curbilinii ale lui Gauss. Presupunem, cu Gauss, că ecuaţia unei suprafeţe (sau bucăţi de suprafaţă) se poate scrie sub forma parametrică

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2) \quad , \tag{52}$$

unde $\bar{r}$ este o fuucţie analitică de parametrii variabili, reali, din argument; aşadar, funcţie continuă şi finită, cu un număr arbitrar de derivate deasemenea continue şi finite, într'un domeniu dat, desfăşurabilă în serie Taylor. Numim parametrii u_1 şi u_2 *coordonate curbilinii Gauss-iene.*

Pentru $u_1 = u_1^0$ (constant) şi $u_2 = u_2^0$ (constant), se obţin două familii de curbe aşezate pe suprafaţa (52) şi date de ecuaţiile

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2^0) \quad ; \quad \bar{r} = \bar{r}(u_1^0, u_2) \; ; \tag{53}$$

numite *curbe parametrice.*

Putem să introducem doi vectori (derivatele parţiale)

$$\bar{r}'_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \quad , \quad \bar{r}'_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} \quad , \tag{54}$$

cari, după definiţia însăşi a derivatei, sunt paraleli cu tangentele curbelor parametrice (53).

Prin fiecare punct $P(u_1^0, u_2^0)$ de pe suprafaţă trece câte o

1) v. W. Blaschke, *Differentialgeometrie*, I, Springer, Berlin, 1924.

singură curbă (53) din fiecare familie, anume, $u_2 = u_1^0$ şi $u_1 = u_2^0$. Cele două direcţii tangenţiale (54) la aceste curbe, în fiecare punct P, sunt distincte dacă produsul vectorial

$$[\bar{r}'_1, \bar{r}'_2] \neq 0 \ .$$

In cele ce urmează vom face întotdeauna această ipoteză. Ea însemnează că ecuaţiile (52) reprezintă o suprafaţă (şi nu o curbă).

Condiţia pentru ca cele două familii de curbe (53) să fie ortogonale, în fiecare punct, este:

$$(\bar{r}'_1 \cdot \bar{r}'_2) = 0 \ . \tag{55}$$

O curbă oarecare de pe suprafaţă poate fi reprezentată, în coordonate curbilinii, prin ecuaţii de forma

$$u_1 = u_1(t) \ ; \quad u_2 = u_2(t) \ ,$$

unde t este un parametru real. Tangenta în P la o asemenea curbă va fi dată de vectorul

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{du_1}{dt}\right)_P \bar{r}'_1 + \left(\frac{du_2}{dt}\right)_P \bar{r}'_2 \ , \tag{56}$$

care este aşezat în planul format de vectorii $\bar{r}'_1$ şi $\bar{r}'_2$, *tangent* la suprafaţă în punctul P.

78. Prima formă patratică fundamentală. Elementul de arc de curbă, pentru o curbă oarecare

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1(t), u_2(t))$$

aşezată pe suprafaţa (52) este, după (56), determinat de relaţia

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = \bar{r}'^2_1 \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2_P + 2\bar{r}'_1 \bar{r}'_2 \left(\frac{du_1}{dt}\right)_P \left(\frac{du_2}{dt}\right)_P + \bar{r}'^2_2 \left(\frac{du_2}{dt}\right)^2_P \ .$$

Gauss introduce notaţiile

$$E = \bar{r}'^2_1 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}\right)^2_P \ ; \quad G = \bar{r}'^2_2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2}\right)^2_P \ ; \tag{57}$$

$$F = \bar{r}'_1 \cdot \bar{r}'_2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}\right)_P \left(\frac{d\bar{r}}{du_2}\right)_P \ .$$

unde E, F, G sunt funcţii de coordonatele punctului dat P, astfel încât expresia elementului de arc se deduce din forma pa-

tratică fundamentală

$$\Phi_1 = ds^2 = E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2 \quad , \tag{58}$$

bine cunoscută în teoria suprafeţelor.

O altă notaţie, introdusă de RIEMANN, comodă pentru extindere la spaţiile cu un număr oarecare de dimensiuni, este

$$E = g_{11} \quad ; \quad F = g_{12} = g_{21} \quad ; \quad G = g_{22} \quad ; \tag{59}$$

unde g_{ij} sunt funcţii simetrice, finite, de coordonatele punctului ales pe curbă; astfel, încât forma patratică (58) se scrie

$$\Phi_1 = ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,du_i\,du_j \quad . \tag{60}$$

Vom adopta această ultimă notaţie, întrebuinţată curent în aplicaţiile fizice.

Este clar că E şi G, deci g_{11} şi g_{22}, sunt esenţiali pozitivi.

Se verifică uşor că

$$EG - F^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \|g\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = [\bar{r}'_1, \bar{r}'_2]^2. \tag{61}$$

După (55), discriminantul formei Φ_1 este deci pozitiv şi, prin urmare, $g_{11} > 0$ şi $g_{22} > 0$. Această formă este, deci, *pozitiv definită*.

79. Introducerea vectorilor unitari. Elementul liniar. Am definit vectorul unitar $\bar{t}$ al tangentei la o curbă prin relaţia (25). Să aplicăm această definiţie la curbele superficiale. Vom avea

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{as} = \sum_{1}^{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\frac{du_i}{as} = \sum_{1}^{2} \bar{r}'_i \frac{du_i}{as} \quad , \tag{62}$$

unde ds este elementul de arc al curbei, definit prin ecuaţia (60), iar $\bar{r}'_i$ sunt date de relaţiile (57).

Numim *element liniar de arc* vectorul $\bar{t}\,ds$: produsul dintre vectorul unitar al tangentei la arcul de curbă şi elementul de arc.

Elementul unui arc de curbă pe curbele parametrice $u_1 = u_1^0$ şi $u_2 = u_2^0$, se deduce din expresia (60). Avem, făcând succesiv $du_1 = 0$ şi $du_2 = 0$,

$$ds_1 = \sqrt{g_{22}}\,du \quad ; \quad ds_2 = \sqrt{g_{11}}\,du_1 \quad . \tag{63}$$

Vectorii unitari ai tangentelor la curbele parametrice vor fi, după (48) şi (62),

$$\bar{t}_1 = \frac{d\bar{r}}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} \quad ;$$

(64)

$$\bar{t}_2 = \frac{d\bar{r}}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \quad .$$

Ţinând seamă de (57) şi (59), unghiul φ, format de curbele parametrice va fi dat de relaţiile

$$\cos \varphi = (\bar{t}_1 . \bar{t}_2) = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} (\bar{r}'_1 . \bar{r}'_2) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \quad , \tag{65}$$

alegând unghiul φ mai mic de cât π. In acest caz,

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{g_{11} g_{22} - g_{11}^2}{g^1_1 \, g_{22}}} \tag{66}$$

Unghiul Θ a două curbe (C_1) şi (C_2) aşezate pe suprafaţă şi trecând prin acelaş punct P de pe suprafaţă, este definit prin unghiul tangentelor la cele două curbe în punctul P al suprafeţei. Fie $\bar{t}^{(1)}$ şi $\bar{t}^{(2)}$ vectorii unitari ai tangentelor la (C_1) şi (C_2) în P ; $du_i^{(1)}$, $du_j^{(2)}$ diferenţialele coordonatelor dealungul celor două curbe şi $ds^{(1)}$, $ds^{(2)}$, elementele de arce corespunzătoare. Avem

$$\bar{t}^{(1)} . \bar{t}^{(2)} = \frac{d\bar{r}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds^{(2)}} = \Sigma \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i} \frac{du_i^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_j} \frac{du_j^{(2)}}{ds^{(2)}}$$

aşadar,

$$\cos \Theta = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i^{(1)}}{ds^{(1)}} \frac{du_j^{(2)}}{ds^{(2)}} \quad , \tag{67}$$

unde g_{ij} sunt funcţii numai de coordonatele punctului P.

Unghiul făcut de o curbă (C) cu una din curbele parametrice se obţine ca un caz particular, ţinând seamă de relaţiile (63). Astfel, în cazul unei linii $u_1 =$ constant, unghiul este dat de

$$\cos \theta_1 = \bar{t}_1 . \bar{t} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left(g_{12} \frac{du_1}{ds} + g_{22} \frac{du_2}{ds} \right) \quad , \tag{68}$$

căci $du_1 : ds_1 = 0$ şi după (63), $du_2 : ds_1 = 1 : \sqrt{g_{22}}$.

Din (68) deducem

$$\sin^2\theta_1 = 1 - \cos^2\theta_1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{g_{22}}\left\{g_{22}^2\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + 2g_{12}\,g_{22}\,\frac{du_1}{ds}\,\frac{du_2}{ds} + g_{22}^2\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2\right\};$$

sau, ținând seamă de (60) și de (61), putem scrie

$$\sin\theta_1 = \sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\left|\frac{du_1}{ds}\right| \tag{69}$$

pentru determinarea unghiului mai mic de cât π. Barele care marchează în formula precedentă valoarea absolută se suprimă, dacă unghiul este măsurat algebric față de sensul pozitiv de rotație determinat de vectorii $\bar{r}'_3$ și $\bar{r}'_3$.

Orice vector aplicat într'un punct P al suprafeței și conținut în planul tangent la suprafață în P, se zice că *aparține* suprafeței. Este evident că putem exprima un astfel de vector prin

$$\bar{a} = a\,\bar{t}\ ,$$

unde $\bar{t}$ este vector unitar pentru tangenta la o curbă oarecare de pe suprafață trecând prin P.

După formula (62) avem

$$\bar{a} = a\sum_{i=1}^{2}\bar{r}'_i\frac{du_i}{ds} = \Sigma\,\bar{r}'_i\,(a\,\frac{du_i}{ds}) = \Sigma\,\bar{r}'_i\,a^i\ . \tag{70}$$

Câtimile

$$a^i = a\,\frac{du_i}{ds} \tag{71}$$

se numesc *componentele gaussiene* ale vectorului superficial $\bar{a}$ Valoarea absolută a vectorului se deduce din relația (70)

$$a^2 = \bar{a}^2 = \sum_{i,j=1}^{2}\bar{r}'_i\,.\,\bar{r}'_j\,a^i\,a^j\ ,$$

sau

$$a^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,a^i\,a^j\ ; \tag{72}$$

relație, care exprimă modùlul vectorului în funcție de componentele sale.

79. Elementul de arie pe suprafață este dat de aria patrulaterului curbiliniu elementar determinat pe suprafață de elementele de arce ds_1 și ds_2 luate pe două curbe (C_1) și (C_2) duse prin punctul P pe suprafață. Până la câtimi infinitesimale de ordin superior, putem înlocui acest patrulater prin paralelogramul format, în planul tangent la suprafață în P, de elementele liniare $\bar{t}_1\, ds_1$ și $\bar{t}_2\, ds_2$, unde $\bar{t}_1$ și $\bar{t}_2$ sunt vectori unitari ai tangentelor în P la cele două curbe.

Așadar, elementul de arie pe suprafață este

$$(73) \qquad d\sigma = \left|\left[\bar{t}_1\, ds_1, \bar{t}_2\, ds_2\right]\right| = \sin\theta\, ds_1\, ds_2 . \qquad (0<\theta<\pi)$$

Să calculăm $\sin\theta$. Fie θ_1 și θ_2 unghiurile făcute de curbele (C_1) și (C_2) cu una din curbele coordonate, de ex. cu $u_1 = \text{const.}$ Avem, după relațiile (68) și (69)

$$(74) \qquad \sin\theta = \sin(\theta_2 - \theta_1) = \sqrt{g}\ \text{mod.} \begin{vmatrix} \frac{du_2}{ds_1} & \frac{du_2}{ds_2} \\ \frac{du_1}{ds_1} & \frac{du_1}{ds_2} \end{vmatrix} .$$

Inlocuind în (73) această valoare, se obține

$$(75) \qquad d\sigma = \sqrt{g}\ \text{mod.} \begin{vmatrix} \frac{du_2}{ds_1} & \frac{du_2}{ds_2} \\ \frac{du_1}{ds_1} & \frac{du_1}{ds_2} \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 ;$$

sau, dacă se iau pentru (C_1) și (C_2) liniile parametrice, avem

$$d\sigma = \sqrt{g}\, du_1\, du_2 .$$

Vectorul unitar al normalei la suprafață este definit prin ecuația

$$\bar{p} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\bar{t}_1, \bar{t}_2\right] = \frac{1}{\sin\theta}\sum\left[\bar{r}'_i, \bar{r}'_j\right]\frac{du_i}{ds_1}\frac{du_j}{ds_2} ;$$

sau

$$\bar{p} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\bar{r}'_1, \bar{r}'_2\right]\left(\frac{du_2}{ds_1}\frac{du_1}{ds_2} - \frac{du_2}{ds_2}\frac{du_1}{ds_1}\right) ,$$

căci modulul produsului $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ este evident egal cu $\sin\theta$. In-

Scanned with OKEN Scanner

locuind valoarea lui sin 0 din (74) se obţine

$$\bar{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{g}} [\bar{r}'_1, \bar{r}'_2] \,. \tag{76}$$

Sensurile sunt astfel alese încât triedrul format de $\bar{\mathrm{t}}_1, \bar{\mathrm{t}}_2, \bar{\mathrm{p}}$, să fie drept.

80. A doua formă fundamentală. Dealungul unei curbe aşezate pe suprafaţă, relaţia

$$\bar{\mathrm{t}} \,.\, \bar{\mathrm{p}} = 0 \,,$$

este satisfăcută identic. Să derivăm această expresie în raport cu s, ţinând seamă de formulele lui FRENET (§ 73)

$$\bar{\mathrm{t}} \,.\, \frac{d\bar{\mathrm{p}}}{ds} + \bar{\mathrm{p}} \,.\, \frac{\bar{\mathrm{n}}}{\rho} = 0 \,, \tag{77}$$

unde $\bar{\mathrm{n}}$ este vectorul unitar al normalei principale şi ρ raza de curbură a curbei superficiale considerate.

Expresia

$$\Phi_2 = - d\bar{r} \,.\, d\bar{\mathrm{p}} = - (\bar{r}'_1 \, du_1 + \bar{r}'_2 \, du_2)(\bar{\mathrm{p}}'_1 \, du_1 + \bar{\mathrm{p}}'_2 \, du_2) \tag{78}$$

sau

$$\Phi_2 = L \, du_1^2 + 2 \, M \, du_1 \, du_2 + N \, du_2^2 , \tag{79}$$

constitue *a doua formă patratică fundamentală*. In (79) am pus

$$L = - \bar{r}'_1 \cdot \frac{\partial \bar{\mathrm{p}}}{\partial u_1} \quad ; \quad M = - \bar{r}'_1 \cdot \frac{\partial \bar{\mathrm{p}}}{\partial u_2} = - \bar{r}'_2 \cdot \frac{\partial \bar{\mathrm{p}}}{\partial u_1} \quad ; \tag{80}$$

$$N = - \bar{r}'_2 \cdot \frac{\partial \bar{\mathrm{p}}}{\partial u_2} \quad ; \quad \bar{\mathrm{p}}'_i = \frac{\partial \bar{\mathrm{p}}}{\partial u_i} \,,$$

în notaţiile lui GAUSS. Expresiile lui M sunt calculate mai jos (vezi formulele 84). Intrebuinţând notaţiile riemanniene, să punem

$$G_{ij} = - \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \bar{\mathrm{p}}}{\partial u_j} = - \bar{r}'_i \,.\, \bar{\mathrm{p}}'_j \,; \tag{81}$$

rezultă pentru expresia (77) forma

$$\Phi_2 = \sum_{i,j=1}^{2} G_{ij} \, du_i \, du_j \,, \tag{82}$$

analoagă primei forme fundamentale (60). Coeficienţii G_{ij} sunt funcţii finite de coordonatele punctului generic al curbei.

Mărimile (80), respectiv (81), pot să fie puse sub o formă interesantă şi comodă, precum urmează.

Observăm că dealungul curbelor coordonate avem identic

$$\bar{r}'_1 \cdot \bar{\mathfrak{p}} = 0 \quad ; \quad \bar{r}'_2 \cdot \bar{\mathfrak{p}} = 0 \, .$$

Să derivăm aceste ecuaţii în raport cu u_2, respeetiv u_1. Obţinem

$$\bar{r}''_{12} \cdot \bar{\mathfrak{p}} + \bar{r}'_1 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_2 = 0 \quad ; \quad \bar{r}''_{21} \cdot \bar{\mathfrak{p}} + \bar{r}'_2 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_1 = 0 \, ;$$

aşadar,

$$M = G_{12} = G_{21} = - \bar{r}'_1 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_2 = - \bar{r}'_2 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_1 = \bar{r}''_{12} \cdot \bar{\mathfrak{p}} \, .$$

Derivând relaţiile (83) în raport cu u_1 şi u_2, respectiv, avem,

$$\bar{r}''_{11} \cdot \bar{\mathfrak{p}} + \bar{r}'_1 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_1 = 0 \quad ; \quad \bar{r}''_{22} \cdot \bar{\mathfrak{p}} + \bar{r}'_2 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_2 = 0 \, ;$$

aşadar,

$$G_{11} = L = \bar{r}''_{11} \cdot \bar{\mathfrak{p}} \quad ; \quad G_{22} = N = \bar{r}''_{22} \cdot \bar{\mathfrak{p}} \, .$$

Inlocuind în (84) şi (85) valoarea lui $\bar{\mathfrak{p}}$ din relaţia (76) rezultă în definitiv

$$(86) \qquad G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\bar{r}''_{ij}, \bar{r}'_1, \bar{r}'_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_j} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u_i \, \partial u_j} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u_i \, \partial u_j} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_1} & \dfrac{\partial y}{\partial u_1} & \dfrac{\partial z}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_2} & \dfrac{\partial y}{\partial u_2} & \dfrac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix} .$$

81. Teoreme. Din relaţia (76), ţinând seamă de (25), (60) şi (82), obţinem

$$(87) \qquad \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\bar{\mathfrak{n}} \cdot \bar{\mathfrak{p}}}{\rho} = \frac{L \, du_1^2 + 2 \, M \, du_1 \, du_2 + N \, du_2^2}{E \, du_1^2 + 2 \, F \, du_1 \, du_2 + G \, du_2^2} \, ;$$

sau, în notaţiile adoptate

$$(88) \qquad \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\cos \Theta}{\rho} = \frac{\Sigma \, G_{ij} \, du_i \, du_i}{\Sigma \, g_{ij} \, du_i \, du_j} = \Sigma \, G_{ij} \, \frac{du_i}{ds} \, \frac{du_j}{ds} \, .$$

Forma (88), dată raportului dintre cele două forme practice fundamentale, permite stabilirea următoarelor teoreme.

Teorema I. „Toate curbele superficiale, care posedă într'un punct P aceiaşi tangentă şi acelaş plan osculator, au aceiaşi curbură".

In adevăr, coeficienţii G_{ij}, fiind funcţii numai de coordonatele punctului P, nu depind de direcţiile care trec prin P. In schimb, derivatele $du : ds$ variază cu direcţiile diferite care trec prin P. După relaţiile (68) şi (69), aceste câtimi se exprimă cu ajutorul unghiului Θ făcut de curba considerată cu una dintre coordonatele curbilinii, de ex. $u_1 = u_1^0$. Dacă ϑ rămâne invariabil pentru curbele superficiale care trec prin P, atunci, ultimul membru al relaţiei (88) rămâne acelaş pentru aceste curbe. Raza de curbură ρ va depinde atunci numai de unghiul Θ al planului osculator cu normala la suprafaţă. Dacă şi acest unghi rămâne neschimbat pentru curbele care trec prin P, atunci, pentru aceste curbe, raza de curbură rămâne invariabilă, deci aceiaşi pentru toate aceste curbe.

Teorema II. „Raza de curbură a unei curbe superficiale care trece prin P este egală cu raza de curbură a curbei plane obţinută prin tăierea suprafeţei cu planul osculator al curbei date, în P“.

In adevăr, curba superficială considerată şi curba plană obţinută prin secţionarea suprafeţei cu planul osculator al primei au acelaş plan osculator, anume, planul de secţiune. Cum acest plan determină şi tangentele, în P, la cele două curbe, tangentele vor fi aceleaşi, anume, intersecţia planului osculator de secţiune cu planul tangent la suprafaţă în P. In aceste condiţii, teorema II rezultă în virtutea teoremei I.

82. Teorema lui Meusnier. Pentru curbele superficiale, care posedă aceiaşi tangentă în punctul P, rezultă, din relaţia (88)

$$\frac{\cos \Theta}{\rho} = \text{constant.} \tag{89}$$

Să considerăm curba de *secţiune normală*, obţinută tăind suprafaţa prin planul normal în P la suprafaţă. Pentru o astfel de curbă, normala la suprafaţă se confundă cu normala principală a curbei, aşa încât $\Theta = 0$.

Fie $1 : R$ curbura curbei de secţiune normală în P. Din (89) rezultă

$$\frac{\cos \Theta}{\rho} = \frac{1}{R} \quad ; \quad \text{deci,} \quad \rho = R \cos \Theta . \tag{90}$$

Această relaţie exprimă teorema lui Meusnier, care se gă-

seşte în literatură formulată în diverse moduri. Redăm două din aceste formulări.

I. *Raza de curbură a unei curbe superficiale, care trece prin punctul P, este egală cu proiecţia pe planul său osculator a razei de curbură ce aparţine curbei de secţiune normală în P, având aceiaşi tangentă în P ca şi curba dată.*

II. *Centrul de curbură al unei curbe superficiale, care trece prin P, este dat de proiecţia pe planul osculator al curbei, în P, a centrului de curbură care aparţine curbei de secţiune normală având aceiaşi tangentă în P.*

Aceste teoreme reduc studiul distribuţiei curburilor pentru curbele aşezate pe o suprafaţă, într'un punct al acesteia, la studiul curburilor secţiunilor normale în punctul considerat pe suprafaţă.

83. Indicatoarea lui Dupin. **Clasificarea punctelor suprafeţei. Formula lui** Euler. Pentru o secţiune normală, vectorii $\bar{n}$ şi $\bar{p}$ se confundă ca direcţie. Să-i alegem aşafel încât să poseadă şi acelaş sens. Atunci, produsul lor scalar va fi egal cu $+1$. In aceste condiţii, relaţia (88) devine, pentru secţiunile normale

$$\frac{1}{R} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \tag{91}$$

unde semnul lui R depinde numai de semnul celei de a doua formă patratică Φ_2, în punctul considerat P. In adevăr $\Phi_1 = ds^2$ este esenţial pozitiv.

Pentru a studia forma şi alte proprietăţi ale suprafeţei în vecinătatea punctului P, este convenabil să o referim la un sistem de axe de coordonate cartesian x, y, z cu origina în punctul P şi să luăm ca parametri coordonatele x, y. Fie $x = u_1$ $y = u_2$; $z = f(u_1, u_2)$.

Să exprimăm relaţia (91) în această reprezentare (alegând pentru moment ca origină un punct oarecare). Să facem notaţiile bine cunoscute din geometria diferenţială

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q ; \tag{92}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t .$$

Relaţiile (57) şi (59) ne dau, în aceste condiţii,

(93) $g_{11}=1+p^2\,;\ g_{22}=1+q^2\,;\ g_{12}=pq\,;\ g=1+p^2+q^2\,;$

iar după relaţiile (86)

(94) $$G_{11}=r\ \ ;\ \ G_{22}=s\ \ ;\ \ G_{12}=t\,.$$

Pentru valorile de mai sus, relaţia (91) devine

(95) $$\frac{1}{R}=r\cos^2\alpha+2\,s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta\,,$$

unde $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\cos\beta$, sunt cosinusurile directoare ale tangentei în P la curba de secţiune normală, cu axele de coordonate x şi y.

Pentru simplificare, să alegem origina axelor de coordonate chiar în punctul P al suprafeţei, astfel încât planul x,y să fie planul tangent la suprafaţă în P. In aceste condiţii $\beta=90^\circ-\alpha\ ;\ p=0\ ;\ q=0\ ;$ şi deci,

(96) $$\frac{1}{R}=r\cos^2\alpha+2\,s\sin\alpha\cos\alpha+t\sin^2\alpha\,.$$

Dacă facem notaţiile

$$\sqrt{|R|}\cos\alpha=X\ \ ;\ \ \sqrt{|R|}\sin\alpha=Y\,,$$

ecuaţia (96) devine

(97) $$r\,X^2+2\,s\,X\,Y+t\,Y^2=\pm\,1\,,$$

dacă $\bar{\mathbf{n}}$ şi $\bar{\mathbf{p}}$ au acelaş sens sau sensuri opuse.

Considerând pe X şi Y drept coordonate curente, ecuaţia (97) reprezintă două conice care formează *indicatoarea lui* Dupin. Putem să distingem următoarele cazuri:

1. *Presupunem că* $rt-s^2$ *este pozitiv;* ceeace revine a admite, după (94), că $G_{11}\,G_{22}-G_{12}^2$ este pozitiv. Punctul P este un *punct eliptic:* conicile (97) sunt *elipse* cu centrul în P, dintre care una este reală; ele aproximează secţiunile suprafeţei, în vecinătatea lui P, cu plane $z=\text{const}$ pentru $|\,z\,|$ foarte mic.

Raportând elipsa (97) la axele principale, ecuaţia (96) devine

(98) $$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\alpha}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha}{R_2}\,,$$

unde R_1 şi R_2 sunt *razele de curbură principale* ale secţiuni-

lor normale principale. Curbura normală are acelaş semn cu cele două curburi principale, dintre care una este maximă iar cealaltă este minimă. Semnul curburilor se determină cu ajutorul observaţiei următoare.

Planul tangent (plan de x, y) în P (ales ca origină a sistemului de coordonate) la suprafaţă, lasă suprafaţa în întregime deoparte sau de cealaltă, în vecinătatea lui P. In adevăr, să desvoltăm ecuaţia suprafeţei în vecinătatea lui P (presupunând x, y, z foarte mici),

(99) $$z = f(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2 + \text{termeni de ordin superior.}$$

Secţiunile suprafeţei cu planele $z = \text{const.}$ (valori foarte mici) se vor afla, după (96), deoparte sau cealaltă a planului de secţiune (x, y). Suprafaţa va prezenta unei regiuni determinate, fie concavitatea, fie convexitatea. Convenim să alegem semi-axa pozitivă Pz în concavitatea suprafeţei. In membrul al doilea al ecuaţiei (97) vom lua atunci semnul plus.

Exemplu de suprafaţă care posedă astfel de puncte este *elipsoidul.*

2. *Presupunem* $rt - s^2$ *negativ* (deci, $G_{11}G_{22} - G_{12} < 0$) într'un punct P al suprafeţei. Acest punct se numeşte *iperbolic.* Indicatoarea lui Dupin este o pereche de *iperbole conjugate.*

Planul tangent traversează suprafaţa în vecinătatea imediată a lui P. In ecuaţia (98) cele două raze de curbură principale R_1 şi R_2 au semne diferite. In acest caz, R va fi pozitiv între $\alpha = 0$ şi $\alpha_1 = \text{arctg}\sqrt{\frac{-R_1}{R_2}}$. Pentru $\alpha = \alpha_1$, raza de curbură R devine infinită. Incepând de la această valoare, raza de curbură R devine negativă până la $\alpha = 180^\circ - \alpha_1$, pentru care se anulează. Intre $\alpha = 180^\circ - \alpha_1$ şi $180^\circ + \alpha_1$, R devine pozitiv.

Exemplu de suprafaţă caracteristică posedând puncte iperbolice este *iperboloidul cu o pânză.*

Relaţia (98), valabilă în ambele cazuri 1 şi 2, poartă numele de *formula lui* Euler.

3. Se numesc *ombilice* punctele suprafeţei pentru care cele două curburi principale sunt egale. In acest caz, din (98), re-

zultă pentru curbura unei secţiuni normale o valoare egală cu valoarea comună a curburilor principale.

Exemplu de suprafaţă ale cărei puncte sunt toate ombilice este *sfera*. Elipsoidul posedă şase ombilice : extremităţile axelor.

4. *Presupunem* $rt - s^2 = 0$. Punctele suprafeţei pentru care este satisfăcută această relaţie se numesc *puncte parabolice*. Curbura nu-şi schimbă semnul. Există o singură direcţie pentru care curbura se anulează.

Aceasta este una din direcţiile principale, pentru care să zicem că $1 : R_2 = 0$.

Formula lui EULER se reduce la

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} .$$

Razele de curbură ale secţiunilor normale sunt de acelaş semn şi anume, au semnul comun al curburii principale. Secţiunile normale au concavitatea îndreptată spre aceiaşi regiune prin raport la planul tangent.

Suprafeţele *cilindrice* posedă astfel de puncte. De asemeni în general, suprafeţele desfăşurabile posedă puncte parabolice.

84. Curbura totală şi curbura medie. Pentru o valoare peterminată a lui R, din ecuaţia (88) deducem ecuaţia patratică pentru valorile raportului $du_1 : du_2$ care determină direcţia curbei pe suprafaţă :

$$(100) \qquad (RG_{11} - g_{11})\, du_1^2 + 2\,(RG_{12} - g_{12})\, du_1\, du_2 + (RG_{22} - g_{22})\, du_2^2 = 0.$$

Valorile lui $1 : R$ pentru cari ecuaţia (100) posedă o rădăcină dublă sunt *curburile principale* ale suprafeţei şi corespund direcţiilor principale deduse cu ajutorul indicatoarei lui DUPIN. In adevăr, valorile semiaxelor elipsei sau iperbolei lui DUPIN se obţin exprimând condiţia ca discriminantul ecuaţiei (100) să se anuleze. Aşadar,

$$(101) \qquad (g_{11}\, g_{22} - g_{11}^2)\, \frac{1}{R^2} - (g_{11}\, G_{22} - 2\, g_{12}\, G_{12} + g_{22}\, G_{11})\, \frac{1}{R} + (G_{11}\, G_{22} - G_{12})^2 = 0 .$$

Relaţiile dintre coeficienţii şi rădăcinile acestei ecuaţii ne

permit să scriem (dacă R_1 şi R_2 sunt rădăcinile ecuaţiei (101), deci razele de curbură principale)

$$(102) \qquad K = \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} = \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2};$$

$$(103) \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{g_{11}G_{22} - 2g_{12}G_{12} + g_{22}G_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Mărimea K se numeşte *curbura totală* a lui GAUSS; mărimea H poartă numele de *curbura medie* a suprafeţei. Aceste două mărimi caracterizează suprafaţa în ceeace priveşte curbura, după cum mărimea unică $1/\rho$ caracterizează curbele, din acelaş punct de vedere.

Ecuaţia (101) se scrie, cu notaţiile (102) şi (103),

$$(104) \qquad \frac{1}{R^2} - H\frac{1}{R} + K = 0.$$

Pentru punctele de curbură eliptică, $K > 0$; pentru punctele de curbură iperbolică, $K < 0$; pentru punctele de curbură parabolică, $K = 0$. Ombilicele sunt caracterizate prin condiţia ca ecuaţia (104) să aibă o rădăcină dublă, deci

$$H^2 - 4K = 0.$$

85. Linii de curbură: *Curbele superficiale tangente, în fiecare punct al lor, la una din secţiunile principale, se numesc „linii de curbură".*

Cum în fiecare punct al suprafeţei (exceptând ombilicele) se pot duce câte două direcţii principale, rezultă că prin fiecare punct al suprafeţei se pot duce două linii de curbură ortogonale.

Pentru a găsi ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură, să considerăm ecuaţia (101) care determină direcţia unei curbe trasă pe suprafaţă. Să supunem această ecuaţie la condiţia ca direcţiile curbelor să fie direcţii principale, în punctul considerat. Aceasta înseamnează că ecuaţia (100) trebue să posedă o rădăcină dublă; prin urmare, trebue să fie satisfăcut sistemul dedus prin derivarea ecuaţiei (100) în raport cu du_1 şi du_2.

Obţinem

$$(105) \qquad \begin{aligned} R(G_{11}du_1 + G_{12}du_2) - (g_{11}du_1 + g_{12}du_2) &= 0, \\ R(G_{12}du_1 + G_{22}du_2) - (g_{12}du_1 + g_{22}du_2) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminând pe R, obținem ecuația

$$\begin{vmatrix} G_{11}\,du_1 + G_{12}\,du_2 & g_{11}\,du_1 + g_{12}\,du_2 \\ G_{12}\,du_1 + G_{22}\,du_2 & g_{12}\,du_1 + g_{22}\,du_2 \end{vmatrix} = 0,$$

sau încă,

$$(106)\quad (G_{11}g_{12} - G_{12}g_{11})\,du_1^2 + (G_{11}g_{22} - G_{22}g_{11})\,du_1\,du_2 + (G_{12}g_{22} - G_{22}g_{12})\,du_2^2 = 0;$$

ceeace se mai poate scrie

$$(107)\quad \begin{vmatrix} du_2^2 & -du_1\,du_2 & du_1^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ G_{11} & G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

care este ecuația diferențială a liniilor de curbură pe suprafața dată.

Proprietăți.

1. *Normalele la suprafață în punctele unei linii de curbură formează o suprafață desfășurabilă.*

In adevăr, dacă normalele de vector unitar $\bar{\mathbf{p}}$ la suprafața dată formează o suprafață desfărabilă, ele vor înfășura, în general, o curbă. Fie $\bar{r}^*$ vectorul de poziție al punctului unde normala la suprafața dată în punctul $P(\bar{r})$ atinge curba înfășurătoare. Vom avea

$$\bar{r}^* = \bar{r} + R\,\bar{\mathbf{p}};$$

sau, diferențiind

$$(108)\quad d\bar{r}^* = d\bar{r} + R\,d\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}\,dR.$$

Observăm că vectorul $d\bar{r}^*$ este tangent la curba înfășurătoare a normalelor $\bar{\mathbf{p}}$ (care, prin definiție, sunt și ele tangente la curba înfășurătoare, în același punct). Rezultă că cei doi vectori: $d\bar{r}^*$ și $\bar{\mathbf{p}}$ sunt coliniari; ei depind, așadar, liniar unul de celălalt. In aceste condiții, ecuația (108) va putea să fie scrisă sub forma

$$(109)\quad d\bar{r} + R\,d\bar{\mathbf{p}} = \lambda\bar{\mathbf{p}},$$

und λ este un scalar. Să înmulțim (109) scalar cu $\bar{\mathbf{p}}$. Rezultă

$$(110)\quad \bar{\mathbf{p}}\,.\,d\bar{r} + R\,\bar{\mathbf{p}}\,.\,d\bar{\mathbf{p}} = \lambda.$$

Dar primul termen al ecuației precedente este nul, căci cei doi vectori ai produsului scalar sunt perpendiculari; al doilea ter-

men al ecuației este de asemeni nul, căci $\bar{p}$ este un vector unitar. Rezultă că scalarul λ este identic nul. Ecuația (109) se reduce astfel, la

$$d\bar{r} + R\, d\bar{p} = 0\,, \tag{111}$$

expresii, numite *formulele lui* Olinde Rodrigues.

Formulele lui Rodrigues permit să scriem ecuațiile liniilor de pe suprafață, care satisfac la condiția enunțată (exprimată tocmai prin numitele relații). In acest scop, este suficient să înmulțim (111) scalar cu $\bar{r}'_1$ și $\bar{r}'_2$; rezultă imediat ecuațiile (105) din care am dedus, în paragraful precedent, ecuațiile liniilor de curbură sub forma (106).

2. *Liniile de curbură ale unei suprafețe de revoluție sunt curbele meridiane și cercurile paralele.*

In adevăr, normalele la suprafața considerată, dea-lungul acestor curbe formează suprafețe riglate: normalele dea-lungul meridianelor întâlnesc axa de revoluție; normalele dea-lungul paralelilor formează un con de revoluție în jurul axei de revoluție a suprafeței.

3. *Liniile de curbură sub formă parametrice.* Pentru simplificare, să alegem aceste curbe drept linii coordonate: $u_1 = \text{const.}$ $u_2 = \text{const.}$ Ortogonalitatea acestor curbe se exprimă prin condiția

$$\bar{r}'_1 \,.\, \bar{r}'_2 = 0 = g_{12}\,.$$

In acest caz, ecuația (106) devine pentru $u_1 = \text{const.}$: $G_{12}\, g_{11}\, du_1^2 = 0$; iar pentru $u_2 = \text{const.}$: $G_{12}\, g_{22}\, du_2^2 = 0$. Cum g_{11} și g_{22} nu pot sa fie nule, urmează că trebuc să avem

$$g_{12} = 0 \quad ; \quad G_{12} = 0\,. \tag{112}$$

4. *Liniile de curbură în ombilice* nu pot să fie distinse, deoarece într'un astfel de punct direcțiile principale sunt nedefinite. In special, pe suprafețele formate numai din puncte care sunt ombilice, orice linie este o linie de curbură, iar $R_1 = R_2 = R$, în fiecare punct al suprafeței. Să căutăm ecuația unei astfel de suprafețe. Pentru aceasta, observăm că formulele lui Rodrigues devin

$$\bar{r}'_1 + R\,\bar{p}'_1 = 0 \quad ; \quad \bar{r}'_2 + R\,\bar{p}'_2 = 0\,. \tag{113}$$

Derivând prima formulă în raport cu u_2 și a doua în raport

cu u_1 şi scăzând, obţinem

$$R'_{u1}\,\bar{p}'_1 = R'_{u2}\,\bar{p}'_2\,, \tag{114}$$

relaţie, care cootrazice relaţia (113), căci pretinde ca vectorii $\bar{p}'_1$ şi $\bar{p}'_2$ să fie coliniari; ceeace ar însemna, după (113), că şi $\bar{r}'_1$ şi $\bar{r}'_2$ să fie coliniari. Rezultă că (114) este posibilă numai pentru

$$R'_{u1} = R'_{u2} = 0\,;$$

ceeace duce la condiţia $R =$ constant. Dar atunci, integrând sistemul (113), avem

$$\bar{r} = -\,R\,\bar{p} + \bar{c}\,, \tag{115}$$

unde $\bar{c}$ este vectorul de poziţie constant al unui punct arbitrar fix C. Ecuaţia (115) reprezintă o sferă cu centrul în C şi cu raza egală cu R.

Pentru $1/R = 0$, în fiecare punct al suprafeţei, rezultă, din (113) $\bar{p} =$ constant. Integrând ecuaţia evidentă

$$\bar{p}\,.\,d\bar{r} = 0\,,$$

în aceste condiţii, obţinem $\bar{p}\,.\,\bar{r} =$ constant; ceeace reprezintă ecuaţia unui plan perpendicular pe vectorul constant $\bar{p}$.

Urmează aşadar, că suprafeţele ale căror puncte sunt toate ombilice, sunt sferele şi planele.

86. Liniile asimptotice pe o suprafaţă sunt definite prin condiţia ca în fiecare punct al lor să fie tangente unei direcţii asimptotice a indicatoarei, pe suprafaţa dată. Din definiţie, rezultă că pentru suprafeţele de curbură iperbolică, prin fiecare punct, trec două linii asimptotice; pe suprafeţele de curbură parabolică există, în fiecare punct, numai câte o singură linie asimptotică; iar pentru suprafeţele de curbură eliptică, liniile asimptotice sunt imaginare.

Prin definiţie liniile, asimptotice trebuind să fie tangente direcţiilor de curbură nulă (asimptotice) urmează că, în relaţia (91) mărimea $1/R$ trebue să fie nulă. Rezultă că a doua formă patratică trebue să fie deasemenea nulă. Aşadar, pentru suprafeţele cu dublă curbură ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice se scrie

$$r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0\,. \tag{116}$$

Se poate uşor demonstra că liniile asimptotice se mai pot defini şi prin următoarea proprietate: *curbele asimptotice au planul osculator tangent la suprafaţă, în punctul consideral.*

In adevăr, din relaţia (116), având în vedere relaţia (87), urmează

$$\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d\bar{p}}{ds} = 0,$$

sau, ceeace este tot una,

$$\bar{t} \cdot \frac{d\bar{p}}{ds} = 0. \tag{117}$$

Derivând relaţia evidentă

$$\bar{p} \cdot \bar{t} = 0,$$

(care spune că normala la suprafaţă este perpendiculară pe o tangentă la suprafaţă), obţinem

$$\bar{t} \cdot \frac{d\bar{p}}{ds} + \bar{p} \cdot \frac{d\bar{p}}{ds} = 0,$$

sau, după (117) şi relaţiile lui FRENET (§73), urmează

$$\bar{p} \cdot \bar{n} = 0,$$

pentru raza de curbură ρ a curbei, diferită de zero. Ori, această relaţie arată că normala la suprafaţă este perpendiculară nu numai pe tangenta la curbă, dar şi pe normala principală a curbei în punctul considerat; aşadar, ea este perpendiculară pe planul osculator al curbei în punctul considerat. Rezultă că planul osculator se confundă cu planul tangent, în punctul considerat, la suprafaţă.

87. Theorema egregium (C. F. GAUSS): *curbura totală K se poate exprima numai cu ajutorul câtimilor g_{ij} şi al derivatelor lor până la ordinul al doilea.*

Inlocuind în relaţia de definiţie (102) valorile câtimilor G_{ij} din formulele (86), putem scrie

$$K = \frac{G_{11}\,G_{22} - G_{12}^2}{g^2} = \frac{1}{g^4}\left\{(\vec{r}''_{11}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)\,(\vec{r}''_{22}, \vec{r}_1, \vec{r}_2) - (\vec{r}''_{12}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)^2\right\}. \tag{118}$$

Derivând în raport cu u_1 şi u_2 relaţiile (57), cu notaţiile

(59), obţinem

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}''_{11} = \frac{1}{2} g'_{11,1} \quad ; \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}''_{12} = \frac{1}{2} g'_{11,2} \; ;$$

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{r}''_{22} = \frac{1}{2} g'_{22,2} \quad ; \quad \vec{r}_2 \cdot \vec{r}''_{12} = \frac{1}{2} g'_{22,1} \; ; \tag{119}$$

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{r}''_{11} = g'_{12,1} - \frac{1}{2} g'_{11,2} \quad ; \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}''_{22} = g'_{12,2} - \frac{1}{2} g'_{22,1} \; .$$

Derivând a patra relaţie (119) în raport cu u_1 şi a cincea în raport cu u_2, se obţine

$$\vec{r}''_{11} \cdot \vec{r}''_{22} - \vec{r}''^{\,2}_{12} = -\frac{1}{2} g''_{11,22} + g''_{12,22} - \frac{1}{2} g''_{22,11} \; , \tag{120}$$

unde derivatele sunt însemnate cu accente, iar numerile aşezate *după virgulă*, la indici, reprezintă parametrul în raport cu care s'a derivat: numărul 1 pentru u_1 şi numărul 2 pentru u_2.

Dacă aplicăm regulele de înmulţire determinanţilor cari figurează în relaţia (118) se obţine

$$g^4 K = \begin{vmatrix} \vec{r}''_{11} \cdot \vec{r}''_{22} & \vec{r}''_{11} \cdot \vec{r}'_1 & \vec{r}''_{11} \cdot \vec{r}'_2 \\ \vec{r}'_1 \cdot \vec{r}''_{22} & g_{11} & g_{12} \\ \vec{r}'_2 \cdot \vec{r}''_{22} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{r}''^{\,2}_{12} & \vec{r}''_{12} \cdot \vec{r}'_1 & \vec{r}''_{12} \cdot \vec{r}'_2 \\ \vec{r}''_{12} \cdot \vec{r}'_1 & g_{11} & g_{12} \\ \vec{r}''_{12} \cdot \vec{r}'_2 & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} ,$$

sau,

$$g^4 K = \begin{vmatrix} \vec{r}''_{11} \cdot \vec{r}''_{22} - \vec{r}''^{\,2}_{12} & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} ,$$

unde punctele marchează că în locurile respective figurează aceleaşi elemente ca şi în determinantele de deasupra.

Inlocuind valorile (120) în expresia precedentă obţinem formula care exprimă teorema fundamentală din teoria suprafeţelor, cunoscută sub numele de *Theorema egregium* şi datorită lui C. F. Gauss:

$$g^4 K = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}g''_{11,22}+g''_{12,22}-\frac{1}{2}g''_{22,11} & \frac{1}{2}g'_{11,1} & g'_{12,1}-\frac{1}{2}g'_{11,2} \\ g'_{12,2}-\frac{1}{2}g''_{22,1} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}g'_{22,2} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}g'_{11,2} & \frac{1}{2}g'_{22,1} \\ \frac{1}{2}g'_{11,2} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}g'_{22,1} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

88. Formule pentru derivate de primul ordin (J. Weingarten). Formulele stabilite de Weingarten exprimă derivatele parţiale ale vectorului $\bar{\mathrm{p}}$ normal la suprafaţă, în raport cu parametrii u_1 şi u_2. Din aceste relaţii se trag concluzii interesante.

Pentru stabilirea numitelor formule, observăm mai întâi că vectorii $\bar{\mathrm{p}}'_1$ şi $\bar{\mathrm{p}}'_2$ se află aşezaţi în planul tangent la suprafaţă. In adevăr, derivând relaţia evidentă $\bar{\mathrm{p}}^2 = 1$ în raport cu u_1 şi u_2, obţinem

$$\bar{\mathrm{p}} \cdot \bar{\mathrm{p}}'_1 = \bar{\mathrm{p}} \cdot \bar{\mathrm{p}}'_2 = 0.$$

Cele două derivate parţiale ale lui $\bar{\mathrm{p}}$ se vor exprima ca funcţii liniare de două direcţii aşezate în planul tangent la suprafaţă, de exemplu,

$$(121) \qquad \bar{\mathrm{p}}'_1 = \alpha \bar{r}'_1 + \beta \bar{r}'_2 \quad ; \quad \bar{\mathrm{p}}'_2 = \gamma \bar{r}'_1 + \nu \bar{r}'_2 .$$

Inmulţind prima relaţie scalar cu $\bar{r}'_1$ şi a doua cu $\bar{r}'_2$ şi ţinând seamă de relaţiile (59) şi (83-85), rezultă sistemul algebric

$$\begin{aligned} -G_{11} &= \alpha g_{11} + \beta g_{12} \quad ; \quad -G_{12} = \gamma g_{11} + \nu g_{12} ; \\ -G_{12} &= \alpha g_{12} + \beta g_{22} \quad ; \quad -G_{22} = \gamma g_{12} + \nu g_{22} . \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem în raport cu α, β, γ şi ν, şi înlocuind valorile astfel găsite în (121), obţinem *formulele lui* Weingarten:

$$(122) \qquad \begin{aligned} g^2 \bar{\mathrm{p}}'_1 &= (g_{12} G_{12} - g_{22} G_{11}) \bar{r}'_1 + (g_{12} G_{11} - g_{11} G_{12}) \bar{r}'_2 ; \\ g^2 \bar{\mathrm{p}}'_2 &= (g_{12} G_{22} - g_{22} G_{12}) \bar{r}'_1 + (g_{12} G_{12} - g_{11} G_{22}) \bar{r}'_2 . \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicații. 1. *Suprafețele pentru care toate liniile sunt linii asimptotice sunt suprafețe plane.*

In adevăr, pentru ca toate liniile suprafeței să fie linii asimptotice, trebue ca a doua formă fundamentală să fie peste tot identic nulă. Aşadar, trebue ca toți G_{ij} să fie nuli. Dar atunci, din (122) rezultă că $\bar{\mathfrak{p}}'_1 = 0$ și $\bar{\mathfrak{p}}'_2 = 0$, ceeace înseamnă că $\bar{\mathfrak{p}} =$ constant. Integrând apoi relația evidentă $\bar{\mathfrak{p}} . d\bar{r} = 0$, obținem $\bar{\mathfrak{p}} . \bar{r} =$ constant, ceeace reprezintă un plan.

2. *Suprafețele pentru care toate punctele sunt parabolice, sunt suprafețe desfășurabile.*

Punctele parabolice sunt definite prin condiția $K = 0$, care trebue să fie satisfăcută, deci, pe toată suprafața. Aceasta înseamnează, după (102),

$$G_{11} G_{22} - G_{12}^2 = 0 . \tag{123}$$

Ori, această expresie este tocmai discriminantul celei de a doua formă patratică Φ_2, care va fi, în acest caz, un patrat perfect. Ecuația liniilor asimptotice ($\Phi_2 = 0$) devine

$$(\sqrt{G_{11}}\, du_1 + \sqrt{G_{22}}\, du_1)^2 = 0 .$$

Avem, deci, numai o singură familie de linii asimptotice. Să le luăm ca linii parametrice $u_2 =$ constant, deci $du_2 = 0$. Vom avea atunci, $G_{11} = 0$ şi din (123) rezultă $G_{12} = 0$. Prima formulă (122) ne dă, în acest caz, $\bar{\mathfrak{p}}'_1 = 0$; deci $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}(u_2)$. Dar atunci

$$\bar{r}_1 . \bar{\mathfrak{p}} = \frac{d}{du_1}(\bar{r} . \bar{\mathfrak{p}}) = 0 .$$

Aşadar,

$$\bar{r} . \bar{\mathfrak{p}}(u_2) = f(u_2) ,$$

ecuație, care pentru $u_2 = u^0_2$ (constant) reprezintă un plan tangent suprafeței dealungul curbei $u_2 = u_2^0$. Făcând pe u_2^0 să varieze vedem că suprafața dată este înfășurătoarea unei familii de plane, adică, o suprafață desfășurabilă.

89. Simbolii lui E. B. Christoffel sunt nişte expresii diferențiale formate cu derivatele de primul ordin ale coeficienților g_{ij}, care figurează în prima formă fundamentală. Ei servesc la exprimarea comodă şi simetrică a derivatelor de ordin superior ale vectorului de poziție.

Christoffel introduce două feluri de notații, numind

simbol de specia întâia, expresia

$$(124) \qquad \Gamma_{ij,k} = \begin{bmatrix} i & j \\ k & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right\};$$

şi *simbol de specia a doua*, expresia

$$(125) \qquad \Gamma^l_{ij} = \begin{Bmatrix} i & j \\ l & \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} g^{lk} \begin{bmatrix} i & j \\ k & \end{bmatrix};$$

unde se notează cu g^{lk} cătimile definite precum urmează

$$(126) \qquad g^{11} = \frac{1}{g} g_{22}\ ;\ g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{g} g_{12}\ ;\ g^{22} = \frac{1}{g} g_{11}\ ;$$

pe care le vom numi *coeficienţi asociaţi* coeficienţilor g_{ij}. Ei sunt minorii determinantului g, împărţiţi cu acest determinant. Se verifică uşor că mărimile (126) satisfac relaţiei

$$\sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, g^{jk} = \delta^k_i\ ,$$

unde δ^k_i este *simbolul lui* KRONECKER, şi anume, egal cu $+1$ pentru $i = k$, şi egal cu zero, pentru $i \neq k$.

Expresia (124) poate să fie pusă sub o formă care arată imediat posibilitatea folosirii ei în exprimarea derivatelor de ordin superior. In adevăr, punând în (124) pentru g_{ij} valorile (57), obţinem

$$\begin{bmatrix} i & j \\ k & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_j}(\bar{r}'_i \,.\, \bar{r}'_k) + \frac{\partial}{\partial u_i}(\bar{r}'_j \,.\, \bar{r}'_k) - \frac{\partial}{\partial u_k}(\bar{r}'_i \,.\, \bar{r}'_j)\right\}\ .$$

Desvoltând derivatele şi efectuând reducerile evidente, rezultă imediat

$$(127) \qquad \begin{bmatrix} i & j \\ k & \end{bmatrix} = (\bar{r}''_{ij} \,.\, \bar{r}'_k)\ .$$

90. Formulele lui GAUSS pentru derivatele de ordinul al doilea sunt formule care exprimă derivatele de ordinul al doilea ale vectorului de poziţie al punctelor de pe suprafaţa $\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2)$ în raport cu parametrii variabili ce figurează în argument, ca funcţii de derivatele de ordinul întâi ale aceluiaş vector.

Să alegem în spaţiu (suntem mereu în spaţiul eucludian

cu trei dimensiuni) trei direcţii distincte, spre exemplu $\bar{r}'_1, \bar{r}'_2$ şi $\bar{p}$, şi să exprimăm vectorul care ne dă derivatele de ordinul al doilea în funcţie liniară de aceste trei direcţii alese:

$$\bar{r}''_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{ij,k} \bar{r}'_k + \beta_{ij} \bar{p} \quad . \tag{128}$$

Să exprimăm coeficienţii α şi β. In acest scop, observăm că derivând identitatea

$$\bar{r}'_i \cdot \bar{p} = 0 \quad , \tag{129}$$

în raport cu u_j, avem

$$\bar{r}''_{ij} \cdot \bar{p} = -\bar{r}'_i \cdot \bar{p}'_j = G_{ij} \quad . \tag{130}$$

Inmulţind ecuaţia (128) scalar cu $\bar{p}$ şi ţinând seama de relaţiile (130), urmează

$$\beta_{ij} = G_{ij} \quad . \tag{131}$$

Pentru calcularea coeficienţilor α, din (128), să înmulţim această ecuaţie vectorial cu $\bar{r}'_1$, iar rezultatul să-l înmulţim scalar cu $\bar{p}$. Observând regulele produsului mixt (§ 27), putem scrie

$$\left\{ \bar{r}''_{ij}, \bar{r}', \bar{p} \right\} = \alpha_{ij,k} \left\{ \bar{r}'_1, \bar{r}'_k, \bar{p} \right\} \quad . \tag{132}$$

Observăm că, după formulele (76), coeficientul lui α din membrul al doilea este egal cu $\pm \sqrt{g}$.

Inmulţind ambii membrii ai relaţiei (132) cu coeficientul lui α obţinem

$$\left\{ \bar{r}''_{ij}, \bar{r}', \bar{p} \right\} \cdot \left\{ \bar{r}'_1, \bar{r}'_k, \bar{p} \right\} = \alpha_{ij,k} \, g \, . \tag{133}$$

Efectuând produsul din primul membru, după regula de înmulţire a determinanţilor, şi ţinând seamă de (129), căpătăm

$$\alpha_{ij,k} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \bar{r}''_{ij} \cdot \bar{r}'_k & \bar{r}''_{ij} \cdot \bar{r}'_1 \\ g_{lk} & g_{ll} \end{vmatrix} \quad .$$

Dar, după formulele (127), relaţia precedentă devine

$$\alpha_{ij,k} = \frac{1}{g} g_{ll} \begin{bmatrix} i & j \\ k & \end{bmatrix} - \frac{1}{g} g_{lk} \begin{bmatrix} i & j \\ l & \end{bmatrix} \quad ,$$

şi după (126)

$$\alpha_{ij,k} = \sum_{l=1}^{2} g^{lk} \begin{bmatrix} i & j \\ l & \end{bmatrix} ;$$

de unde, după (125), rezultă valoarea căutată

$$\alpha_{ij,k} = \begin{Bmatrix} i & j \\ k & \end{Bmatrix} .$$

Inlocuind această valoare precum şi expresia lui β_{ij} din (131) în relaţia (128), obţinem *formulele lui* GAUSS

$$\bar{r}''_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \begin{Bmatrix} i & j \\ k & \end{Bmatrix} \bar{r}'_k + G_{ij}\,\bar{p} . \tag{134}$$

Aceste formule îşi găsesc aplicare în diferite probleme de Fizică; în deosebi, în Mecanică, la studierea mişcării unui punct material pe o suprafaţă (vezi *Mecanica*, pag. 104).

91. Curbura geodezică. Fie o curbă superficială (C)

$$\bar{r} = \bar{r}\,(u_1(s), u_2(s)) ,$$

care trece prin punctul P al suprafeţei

$$r = r\,(u_1, u_2) .$$

Să considerăm planul tangent la suprafaţă în punctul P. Să proiectăm ortogonal, pe acest plan tangent, curba (C). Vom obţine o curbă (C_0). Alegem ca sens pozitiv pe curba (C_0) sensul pozitiv al tangentei în P la (C).

Fie $\frac{1}{\rho_g}$ curbura lui (C_0) în punctul P. Această mărime se numeşte *curbura geodezică* a suprafeţei, în punctul P. Să căutăm expresia acestei mărimi în funcţie de elementele cunoscute pe curbă în punctul P. Fie $\bar{n}_0$ normala principală la (C_0) în P. Ea va fi aşezată în planul tangent la suprafaţă.

Teoremă. „Centrul de curbură al curbei (C_0) este dat de proiecţia pe planul tangent la suprafaţă a centrului de curbură al lui (C)".

In adevăr, curbele (C) şi (C_0) se găsesc pe acelaş cilindru proiectant al curbei (C) pe planul tangent în P la suprafaţă. Putem considera, atunci, curba (C_0) ca fiind secţiunea normală a cilindrului prin planul tangent la suprafaţă în P, având aceiaşi tangentă în P cu (C). Teorema lui MEUSNIER ne

dă atunci,

$$\rho = \rho_g \cos\theta \ , \tag{135}$$

unde θ este unghiul făcut de normala principală $\bar{n}$ la curba dată (C), cu normala la suprafaţa pe care se găseşte curba (C_0), (adică, în cazul de fată, la cilindrul proiectant) care este conţinută în planul tangent la suprafaţa dată ; ea se confundă deci cu $\bar{n}_0$. Aşadar, în (135) avem $\theta =$ ungh. $(\bar{n}, \bar{n}_0)$.

Prin urmare, unghiul θ este egal cu unghiul format de planul tangent la suprafaţă (plan determinat de $\bar{t}$ şi $\bar{n}_0$) cu planul osculator la curbă (plan determinat de $\bar{t}$ şi $\bar{n}$). Rezultă deci că θ este egal cu unghiul făcut de perpendiculara pe planul tangent la suprafaţă (vectorul unitar $\bar{p}$) şi perpendiculara pe planul osculator (binormala $\bar{b}$).

Din cele ce preced, rezultă că

$$\cos\theta = (\bar{n} \,.\, \bar{n}_0) = (\bar{b} \,.\, \bar{p}) \ . \tag{136}$$

Să considerăm expresia (unde $\bar{s}$ este arcul de curbă pe (C)),

$$(\vec{r}_s \,, \vec{r}_{ss} \,, \bar{p})$$

şi să arătăm că este egală curburei geodezice. In adevăr, expresia precedentă devine, aplicând relaţiile lui FRENET,

$$\frac{1}{\rho}(\bar{t}, \bar{n}, \bar{p}) = \frac{1}{\rho}\bar{p} \,.\, [\bar{t}, \bar{n}] = \frac{1}{\rho}(\bar{p} \,.\, \bar{b}) = \frac{\bar{n} \,.\, \bar{n}_0}{\rho} = \frac{1}{\rho_g} \ . \tag{137}$$

Prin urmare, afirmaţia de mai sus se găseşte dovedită, şi avem formula

$$\frac{1}{\rho_g} = (\vec{r}_s, \vec{r}_{ss}, \bar{p}) \ , \tag{138}$$

pentru expresia curburii geodezice în punctul $P(\bar{r})$ al suprafeţei.

Formula (138) se simplifică în cazul când curba considerată este una din curbele de coordonate, precum urmează. Fie, $u_2 =$ const. După (63), pentru această curbă,

$$ds = \sqrt{g_{11}} \,.\, du_1 \ ;$$

aşadar,

$$\vec{r}'_s = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\vec{r}_1 \ ; \quad \vec{r}''_{ss} = \frac{1}{g_{11}}\vec{r}''_{11} - \frac{1}{2(g_{11})^{3/2}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}\vec{r}'_1 \ .$$

Formula (138) se scrie, în acest caz,

$$\frac{1}{\rho_{g2}} = \frac{1}{g_{11}^{3/2}} \bar{p} \cdot \left[\vec{r}_1, \vec{r}''_{11} - \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \vec{r}'_1 \right] ,$$

sau, cum produsul cu ultimul termen dispare, şi ţinând seamă de relaţia (76) unde, pentru cazul de faţă, trebue să punem $g = g_{11} g_{22}$, avem

$$\frac{1}{\rho_{g2}} = \frac{1}{g_{11}^2 \sqrt{g_{22}}} \left[\vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \right] \cdot \left[\vec{r}_1, \vec{r}''_{11} \right] \tag{139}$$

$$= \frac{1}{g_{11}^2 \sqrt{g_{22}}} \left\{ (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1)(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}''_{11}) - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}''_{11})(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1) \right\}$$

Pentru curbele de coordonate *ortogonale*

$$\vec{r}'_1 \cdot \vec{r}'_2 = 0 . \tag{140}$$

Avem apoi,

$$\vec{r}'_1 \cdot \vec{r}'_1 = g_{11} . \tag{141}$$

Ultimul termen al relaţiei (139) dispare. Derivând relaţia (140) în raport cu u_1, obţinem

$$\vec{r}''_{11} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}''_{12} = 0 . \tag{142}$$

Dar, derivând (141), în raport cu u_2, avem

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}''_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} . \tag{143}$$

Aşadar, expresia (139) devine, după (140) şi (141),

$$\frac{1}{\rho_{g2}} = \frac{1}{g_{11} \sqrt{g_{22}}} (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}''_{11}) ,$$

sau încă, având în vedere relaţiile (142) şi (143),

$$\frac{1}{\rho_{g2}} = - \frac{1}{\sqrt{g_{11}\, g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} ; \tag{144}$$

şi în mod analog, pentru $u_1 = \text{const}$,

$$\frac{1}{\rho_{g1}} = - \frac{1}{\sqrt{g_{11}\, g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1} . \tag{145}$$

92. Linii geodezice pe suprafață. Să considerăm. pe suprafața dată, o curbă rectificabilă (C) pe care să alegem două puncte P_1 și P_2. Să aplicăm, pe suprafață, o deplasare infinitesimală arbitrară porțiunii de curbă cuprinsă între punctele P_1 și P_2, care să rămână fixe. Fie

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = \delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ij}\, du_i\, du_j} \quad ,$$

variația lungimii curbei (C), datorită *deplasării arbitrare* δ, pe suprafață. Dacă această variație este nulă, deci dacă

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0 \quad , \tag{146}$$

așadar, dacă integrala care figurează în (146) este *staționară*, curba (C) este o *linie geodezică* pe suprafața dată. Căutarea ecuației diferențiale la care trebue să satisfacă (C) pentru ca relația de condiție (146) să fie împlinită, este o problemă fundamentală de calculul variațiilor. In tratatul de *Mecanică*, § 357, pagina 424, am expus soluția analitică a acestei probleme. Curba extremală, care satisface relației (146), este o curbă integrală a ecuațiilor diferențiale ale lui EULER.

Ecuațiile curbei (C) pe suprafață, fiind

$$u_1 = u_1(s) \quad , \quad u_2 = u_2(s) \quad , \tag{147}$$

unde s este arcul de curbă, putem să punem elementul diferențial de arc sub forma adecvată calculului variațional, anume, $\left(u'_i = \frac{du_i}{ds}\right)$,

$$\sqrt{f(s; u_1, u_2; u'_1, u'_2)}\, ds = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, u'_i\, u'_j}\, ds \quad . \tag{148}$$

Problema variațională (146) cere să determinăm curba de-a-lungul căreia integrala

$$\int_{P_1}^{P_2} \sqrt{f(s; u_1, u_2; u'_1, u'_2)}\, ds$$

este un extremum. Răspunsul la această chestiune este, după

Mecanica, l. c. : curba extremală trebue să fie o curbă integrală a ecuaţiilor lui EULER :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial u'_i}\right) - \frac{\partial\sqrt{f}}{\partial u_i} = 0\,, \qquad (i=1,2) \tag{149}$$

unde funcţia f este dată de (148). Avem succesiv,

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} u'^2_1 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} u'_1 u'_2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} u'^2_2 \;;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u'_1} = 2(g_{11}u'_1 + g_{12}u'_2) \;;$$

$$\frac{d}{ds}(g_{11}u'_1 + g_{12}u'_2) = g_{11}u''_1 + g_{12}u''_2 +$$

$$+ \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} u'^2_1 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} u'_1 u'_2 + \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} u'^2_2 \;.$$

Inlocuind în (149), grupând termenii şi ţinând seamă de relaţiile care definesc simbolii lui CHRISTOFFEL (§ 89), putem scrie următoarele două ecuaţii

$$\sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} u''_\beta + \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} \left[\begin{matrix}\beta & \gamma \\ & \alpha\end{matrix}\right] u'_\beta u'_\gamma = 0\,. \qquad (\alpha=1,2). \tag{150}$$

Aceste ecuaţii reprezintă curbele (147) care satisfac ecuaţiei (146) şi sunt, prin urmare, ecuaţiile diferenţiale ale curbelor geodezice pe suprafaţa considerată. Ecuaţiile (150) se scriu sub o formă mai convenabilă prin rezolvarea lor în raport cu fiecare derivată secundă în parte. In acest scop, introducem simbolii lui CHRISTOFFEL de speţa doua (125).

Inmulţim ecuaţia (150) cu $g_{K\alpha}$ şi sumăm pe α. Obţinem, ţinând seamă de simbolul lui KRONECKER (§ 89) şi de expresiile (125),

$$u''_k + \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} \left\{\begin{matrix}\beta & \gamma \\ & k\end{matrix}\right\} u'_\beta u'_\gamma = 0\,. \qquad (k=1,2) \tag{151}$$

93. Liniile geodezice sunt linii pentru care curbura geodezică este nulă. Să considerăm o linie geodezică drept una din liniile de coordonate *ortogonale*, pe suprafaţa dată; de ex. $u_1 = \text{const.}$ In acest caz, punând în ecuaţia respectivă (151) $u'_1 = 0$, $u''_1 = 0$, rezultă

$$\left\{\begin{matrix}2 & 2 \\ & 1\end{matrix}\right\} = 0\,.$$

Inlocuind în expresia precedentă valorile (125) şi (126) şi observând că $g_{12}=0$, din cauza ortogonalităţii, obţinem

$$\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1}=0 \ ,$$

pentru o astfel de linie (geodezică, $u_1=\text{const.}$).

Ţinând seamă de expresia curburii geodezice sub forma (145), rezultă

$$\frac{1}{\rho_{g1}}=0 \ ,$$

deci : *curbura geodezică, dealungul unei curbe geodezice, este mereu nulă.*

Reciproca este, evident, adevărată.

Consecinţe. 1. Linia geodezică are normala principală, în fiecare punct al ei, identică cu normala la suprafaţă, în punctul respectiv.

In adevăr, după (137), curbura geodezică fiind nulă, rezultă

$$\bar{n}\,.\,\bar{n}_0=0 \ ,$$

$\bar{n}$ fiind normala principală la curbă, iar $\bar{n}_0$ fiind conţinut în planul tangent la suprafaţă. Prin urmare, normala principală a unei geodezice este perpendiculară pe planul tangent la suprafaţă, deci paralelă, în fiecare punct al geodezicei, cu normala la suprafaţă.

2. Curbele superficiale care sunt, în acelaş timp, linii geodezice şi linii de curbură ale suprafeţei, sunt curbe plane.

In adevăr, în calitate de linii geodezice, normalele lor principale se confundă cu normalele la suprafaţă ; în calitate de linii de curbură, aceste normale la suprafaţă, în fiecare punct al liniei, formează o suprafaţă riglată. Ori, dacă normalele principale la o curbă înfăşură o suprafaţă riglată, curba este plană.

Exemplu : meridianele şi paralelii suprafeţelor de revoluţie sunt şi geodezice şi linii de curbură ; ele sunt curbe plane, după cum se ştie.

3. Planul osculator al unei linii geodezice trece prin normala la suprafaţă. Această proprietate este o consecinţă imediată a faptului că normalele principale ale geodezicilor sunt paralele cu normalele respective, la suprafaţă.

CAP. IV

Vectorii Electrotechnicii şi calculul cu expresiile imaginare.

94. Definiţii. Metodele grafice cu care se operează în Electrotechnică (teoria curenţilor alternativi), în Mecanica tehnică (studiul sistemelor plane de forţe concurente), în Optică şi Acustică (fenomenele periodice), conduc la un calcul şi o reprezentare particulară a numitelor fenomene, folosind o categorie de vectori coplanari, cari posedă un caracter specific.

Este vorba anume de nişte vectori figuraţi *în plan* prin segmente orientate, coiniţiale (cu acelaş punct de aplicare) astfel încât, variabilitatea lor se reduce la rotaţii în jurul punctului fix şi la variaţia relativă a lungimilor lor.

Intru cât cel mai caracteristic domeniu de aplicare a acestor vectori îl oferă studiul curenţilor alternativi, în Electrotechnică, am denumit aceşti vectori — ale căror caractere le vom analiza mai jos — „vectorii Electrotechnicii".

Vom constata, în cele ce urmează, că regulele de calcul cu aceşti vectori se reduc, în fond, la cunoscutul calcul algebric cu *cantităţi imaginar-complexe*. Din această cauză, vectorii speciali cu care operează Electrotechnica pot să fie consideraţi, mai curând, drept nişte „operatori", mărimi ajutătoare de calcul, decât vectori reprezentativi ai mărimilor fizice de natură vectorială, cum sunt vectorii definiţi în capitolele precedente.

Să lămurim această noţiune prin exemplul caracteristic din Electrotechnică: fie o bobină de inducţie de rezistenţă ohmică R şi coeficient de inducţie L, căreia i se aplică la extremităţi forţa electromotrice

$$v = V_0 \cos \omega t \quad . \tag{1}$$

Electrodinamica ne spune că prin spirele bobinei va curge un curent electric

$$j = J_0 \cos(\omega t + \varphi) \,, \tag{2}$$

unde V_0 şi J_0 sunt *valorile maxime* ale forţei electromotrice şi curentului electric, iar *impedanţa* şi *decalajul în timp* sunt date de relaţiile cunoscute

$$V_0 = J_0 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \quad ; \quad tg\,\varphi = \frac{L\omega}{R} \,.$$

Cunoaşterea *valorilor momentane* (1) şi (2) nu prezintă un interes prea mare în Electrotechnică. Pe de altă parte, *valorile medii* ale acestor mărimi, pentru o perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$, sunt

$$\hat{v} = \frac{V_0}{T} \int_0^T \cos \omega t \; dt = 0 \,,$$

şi analog, $\hat{j} = 0$.

De aceia, electrotechnicienii operează cu *valorile eficace*, definite prin „rădăcina patrată a mediei patratelor valorilor momentane".

Aşadar, avem

$$v_{ef}^2 = \frac{V_0^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, . \, dt = \frac{V_0^2}{2}$$

deci,

$$V = v_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 \quad ; \tag{3}$$

şi analog,

$$J = j_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 \,. \tag{3'}$$

De asemenea, se defineşte *puterea eficace* (unii fizicieni români întrebuinţează denumirea de *putinţă*, în loc de „putere"), prin

$$\widehat{vj} = V_0 J_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \, dt = \frac{1}{2} V_0 J_0 \cos \varphi \quad ;$$

ceace se poate scrie, după (3) şi (3'),

$$P_{ef} = \widehat{vj} = VJ \cos \varphi \,. \tag{4}$$

In unele probleme este nevoe să se calculeze *puterea*

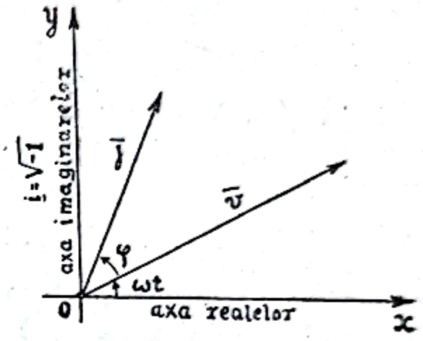
reactivă, dată de relaţia

$$\frac{1}{\omega}\,\widehat{v\,\frac{dj}{dt}} = \frac{V_0 J_0}{T\omega}\int_0^T \cos\omega t \cdot \sin(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{2}V_0 J_0 \sin\varphi\,,$$

aşadar, după (3) şi (3′), puterea reactivă este dată de expresia

$$P = \frac{1}{\omega}\widehat{vj} = VJ\sin\varphi\,. \tag{5}$$

95. Vectorii Electrotechnicii. Să considerăm, *în plan*, sistemul de coordonate al câtimilor compleze (fig. 34): axa O_x purtând pe ea câtimile reale, iar axa O_y purtând pe ea câtimile pur imaginare; axele fiind perpendiculare.



(Fig. 34)

Observăm că mărimile (1) şi (2) pot să fie considerate ca partea reală (proiecţia pe axa O_x) a vectorului $\bar{v} = \bar{V}_0 e^{i\omega t}$ (care face unghiul ωt cu O_x, având lungimea V_0) şi a vectorului $\bar{j} = \bar{J}_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$ (care face unghiul $\omega t+\varphi$, cu O_x având lungimea J_0). Când ωt variază cu timpul, triunghiul format de cei doi vectori se roteşte, ca un corp rigid, în jurul punctului fix O, cu viteza ωt, unghiul φ rămânând constant. Se ştie că, pentru fenomenele oscilante, cum este (1) şi (2), sincrone (pentru acelaş ω), unghiul φ poartă numele de *diferenţă de fază* (ea defineşte *întârzierea* sau *avansul* în fază al unui fenomen oscilant faţă de celălalt).

Să considerăm acum, în general, *vectorii temporari* (funcţii de timp)

$$\bar{v} = \bar{V}_0 e^{i\alpha}\quad;\quad \bar{j} = \bar{J}_0 e^{i(\alpha+\varphi)}\,, \tag{6}$$

unde am pus $\alpha = \omega t$. Părţile lor reale reprezintă mărimile electrodinamice (1) şi (2); am pus $i = \sqrt{-1}$; (în Electrotechnică se obicinueşte să se noteze $\sqrt{-1}$ cu j, rezervându-se litera i pentru a însemna curentul electric).

Prin reprezentarea adoptată mai sus, operaţiile de calcul algebric cu mărimile (1) şi (2), ce reduc la operaţiile de calcul cu ajutorul câtimilor *imaginare*, prezentate în *grafic* sub formă de vectori coplanari şi coiniţiali. Regulele de calcul cu aceşti vectori vor diferi de regulele de calcul cunoscute ale vectorilor spaţiali, propriu zişi. Să le precizăm.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm, mai întâi, că vectorul $\bar{j}$ se deduce din vectorul $\bar{v}$, prin „operaţia“

$$\bar{j} = \bar{v} \cdot \frac{J_0}{V_0} e^{i\varphi} = o \cdot \bar{v} \quad , \tag{7}$$

unde am însemnat cu $o = \frac{J_0}{V_0} e^{i\varphi}$ o mărime complexă, care transformă vectorul temporar $\bar{v}$ în vectorul temporar $\bar{j}$. Această mărime este invariabilă în timp. Ea poate să fie figurată ca un vector, în sensul adoptat în acest capitol. Totuşi, fiind constant, şi jucând numai rolul de „transformator“ al vectorilor temporari, vom considera această mărime drept un *operator*, a cărui formă generală este

$$o = \varkappa e^{i\varphi} \quad . \tag{8}$$

El produce vectorului, asupra căruia este aplicat, o dilatare a lungimei în raportul $\varkappa$ şi o rotaţie de un unghi constant φ; rezultatul conduce, deci, la o *asemănare.*

Forme particulare, de o deosebită însemnătate, sunt operatorii

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = +i \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \quad , \tag{8'}$$

care reprezintă simple *rotaţii* de 90 grade ale vectorului temporar respectiv, în planul figurei.

Operaţiile algebrice fundamentale ale vectorilor (6) sunt:

1. *Adunarea.* Această operaţie se efectuiază după regulele adunării vectoriale obicinuite, prin regula paralelogramului. La fel şi „scăderea“.

2. *Inmulţirea* vectorilor de forma (6) se reduce la înmulţirea numerilor complexe. Aşadar,

$$\bar{v} \cdot \bar{j} = V_0 J_0 e^{i(2\alpha+\varphi)} \quad , \tag{9}$$

ceeace reprezintă tot un vector temporar, care se roteşte însă cu viteza $2\alpha = 2\omega t$. Nu poate să fie vorba, deci, de o asemănare între operaţia de mai sus (9) şi produsele vectorilor propriu zişi. Această operaţie, însă, nu reprezintă prea mare interes în Electrodinamică. De aceia, prin analogie cu produsele scalar şi vectorial ale vectorilor fizici, spaţiali, vom intro-

duce, formal pentru moment, şi în cazul de faţă, două feluri de produse: a) numim *produs interior* expresia

$$(\bar{v}.\bar{j}) = V_0 J_0 \cos \varphi \quad ;$$

b) numim *produs exterior*, expresia $[\bar{v},\bar{j}]$, vector obicinuit, perpendicular pe planul complex, având mărimea

$$|[\bar{v},\bar{j}]| = V_0 J_0 \sin \varphi \quad ,$$

în „sensul" definit prin: pentru puterea reactivă *capacitivă*, deasupra figurei; pentru puterea reactivă *inductivă*, dedesubtul figurei. Aceste produse reprezintă, până la factorul constant $1:\sqrt{2}$ „puterea efectivă", (3), şi „puterea reactivă", (3′). Cum Electrodinamica lucrează numai cu valori efective, va trebui să luăm valorile medii ale acestor mărimi pentru a obţine „puterea" definită în Electrodinamică (vezi formulele 21).

Cu ajutorul acestor noţiuni, Electrotechnica îşi construeşte *diagramele* diferitelor dispozitive electrotechnice, simplificând calculele algebrice, prin reducere de construcţii grafice.

Este de remarcat însă, că din punct de vedere matematic, operaţia (7) constă în folosirea operatorului o; ceeace revine, în ultimă analiză, la folosirea operatorului pur imaginar de rotaţie pură (8′). Această constatare sugerează necesitatea analizării mai amănunţită a regulelor de calcul cu operatorul imaginar-complex (8).

Observăm, în prealabil, că în calculul cu numerile complexe, numerile *reale* nu mai apar ca nişte *scalari* obicinuiţi, ci sunt concepute ca medùlii unor „vectori" aşezaţi pe axa reală a planului complex.

96. Reprezentarea spaţială a operatorului imaginar. O analiză atentă a operaţiilor ce decurg din aplicarea operatorului imaginar, arată că se poate reveni la conceptul de vector spaţial propriu zis. In acest scop, observăm că este posibil să definim operatorul $i = \sqrt{-1}$ cu ajutorul noţiunilor curente ale operaţiilor vectoriale, părăsind imagina restrictivă impusă de graficul Electrotechnicii.

In adevăr, fie $\bar{\imath}$ un vector *unitar* perpendicular pe un vector oarecare $\bar{a}$, şi pe planul în care rămâne şi se poate roti vectorul $\bar{a}$. Aplicarea operatorului i asupra lui $\bar{a}$ însemnează

rotaţia lui $\bar{a}$ în planul complex, cu 90 grade, în sensul ales ca sens pozitiv de rotaţie. Ori, este clar, că noua poziţie a lui $\bar{a}$, în planul său, se poate exprima prin produsul vectorial dintre $\bar{u}$ şi $\bar{a}$; astfel încât, *prin definiţie*

$$i\bar{a} = [\bar{u}, \bar{a}] \quad . \tag{10}$$

Din această definiţie rezultă imediat că sunt satisfăcute proprietăţile cunoscute ale imaginarei :

$$i(-i) = +1 \; ; \; i^2 = -1 \; ; \; i^3 = -i \; ; \; i^4 = +1 \; ; \; -i = i^{-1} = i^3 \; . \tag{11}$$

In adevăr,

$$i\,(i\bar{a}) = [\bar{u}, [\bar{u}, \bar{a}]] = \bar{u}(\bar{u}.\bar{a}) - \bar{a}\,(\bar{u}.\bar{u}) = -\bar{a} \quad ,$$

căci $\bar{u}$ este perpendicular pe $\bar{a}$. Aşadar,

$$i(i\bar{a}) = i^2\bar{a} = -\bar{a} \quad ; \quad \text{deci,} \quad i^2 = -1 \quad ;$$

$$i(i^2\bar{a}) = i^3\bar{a} = [\bar{u}, -\bar{a}] = -[\bar{u}, \bar{a}] = -i\bar{a} \; ; \; \text{deci,} \; i^3 = -i \; ;$$

$$i(i^3\bar{a}) = i^4\bar{a} = -[\bar{u}, [\bar{u}, \bar{a}]] = +\bar{a} \quad ; \quad \text{deci,} \quad i^4 = +1 \quad .$$

Proprietăţi. 1. *Exprimarea produsului vectorial dintre doi vectori oarecare* $[\bar{a}, \bar{b}]$ *cu ajutorul operatorului* i. In acest scop, să alegem ca vector unitar versorul $\bar{u} = \bar{a} : a$, şi ca vector operat de i, proiecţia $\bar{b}'$ a vectorului $\bar{b}$ pe planul P perpendicular pe $\bar{a}$, înmulţită cu scalarul a. Suntem atunci, în condiţiile definiţiei (10); avem

$$i(a\bar{b}') = [\bar{u}, a\bar{b}'] = \left[\frac{\bar{a}}{a}, a\bar{b}'\right] = [\bar{a}, \bar{b}'] = [\bar{a}, \bar{b}] \; , \tag{12}$$

după proprietatea demonstrată la § 26.

Dacă $\bar{a} = 1$, atunci,

$$i\bar{b}' = [\bar{u}, \bar{b}] \quad , \tag{13}$$

vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{b}$ nemaifiind perpendiculari, ca în relaţia (10); în schimb, $\bar{b}'$ este perpendicular pe $\bar{u}$, căci este conţinut în planul P.

Aplicând relaţiei (13) regulele (11), avem

$$-i[\bar{u}, \bar{b}] = -i(i\bar{b}') = -i^2\bar{b}' = +\bar{b}' \quad , \tag{14}$$

ceeace înseamnează că operatorul $-i$ aplicat produsului vectorial dintre vectorul unitar şi un vector dat, ne dă proiecţia vectorului dat pe direcţia definită prin vectorul unitar.

2. Se poate stabili cu uşurinţă următoarele proprietăţi ale

produselor scalare şi vectoriale, având în vedere relaţiile (11) şi definiţia (10):

$$(15)\qquad \begin{aligned} &(i\bar{a}.\,i\bar{b}) = (\bar{a}.\,\bar{b}) \quad ; \quad [i\bar{a}, i\bar{b}] = [\bar{a}, \bar{b}] \; ; \\ &(\bar{a}.\,i\bar{b}) = -(i\bar{a}.\,\bar{b}) \quad ; \quad [\bar{a}, i\bar{b}] = -[i\bar{a}, \bar{b}] \; ; \\ &(\bar{a}.\,i\bar{a}) = 0 \quad ; \quad [\bar{a}, i\bar{a}] = a^2\bar{u}, \text{ unde } \bar{u} \perp \bar{a}. \end{aligned}$$

97. Operatorul complex general $m+ni$, unde m şi n sunt numere reale, se defineşte prin operaţia de adunare a vectorului $m\bar{a}$ cu vectorul $i(n\bar{a})$ perpendicular pe primul:

$$(16)\qquad (m+ni)\,\bar{a} = m\bar{a} + ni\bar{a} \; .$$

Din relaţiile precedente, se deduce cu uşurinţă proprietăţile

$$(m+ni)\,(\bar{a}+\bar{b}) = (m+ni)\,\bar{a} + (m+ni)\,\bar{b} \; ;$$

$$\alpha\{(m+ni)\,\bar{a}\} = (m+ni)\,(\alpha\bar{a}) \; ,$$

unde α este un număr real.

Doi operatori complexi sunt egali dacă au părţile reale şi părţile imaginare respectiv egale. In adevăr, din

$$(m+ni)\,\bar{a} = (m'+n'i)\,\bar{a} \; ,$$

rezultă că, pentru $\bar{a}$ în general diferit de zero,

$$(m-m')\,\bar{a} + (n-n')\,i\bar{a} = 0 \; .$$

Inmulţind ambii membrii scalar cu $\bar{a}$ şi având în vedere a treia egalitate (15), rezultă $m = m'$; aşa dar, $n = n'$.

Suma mai multor operatori complexi este un operator complex, care se obţine sumând părţile reale şi părţile imaginare ale operatorilor daţi

$$(m+ni)\,\bar{a} + (m'+n'i)\,\bar{a} = (m+m')\,\bar{a} + (n+n')\,i\bar{a} \; .$$

Produsul operatorului complex cu un număr real este dat de relaţia

$$\alpha\,(m+ni)\,\bar{a} = (\alpha m + \alpha ni)\,\bar{a} \; .$$

Apoi, se verifică imediat că *produsul a doi operatori complexi* se obţine prin relaţia binecunoscută de înmulţire a imaginarelor, repetând definiţia (1),

$$(m+ni)\,(m'+n'i) = (mm'-nn') + (mn'+m'n)\,i \; ,$$

relație care se deduce imediat prin repetarea definiției (16). Acest procedeu este comutativ și asociativ.

Câtul a doi operatori complexi este definit prin

$$\frac{m+ni}{m'+n'i}=\frac{(mm'+nn')\ (m'n-mn')\,i}{m'^2+n'^2}\quad,$$

ceeace se verifică imediat prin aplicarea regulii produsului.

In mod analog, se verifică proprietățile

$$((m+ni)\,\bar{a}\,.\ (m'+n'i)\,\bar{a})=(m\,m'+n\,n')\,a^2\quad;$$

$$[(m+ni)\,\bar{a},(m'+n'i)\,\bar{a}]=(m\,n'-m'n)\,a^2\,\bar{u}\quad,$$

unde $\bar{u}$ este perpendicular pe $\bar{a}$.

Fie

$$\bar{b}=(m+n\,i)\,\bar{a}\quad;$$

rezultă,

$$b^2=(m^2+n^2)\,a^2\quad;$$

$$(\bar{b}\,.\,\bar{a})=b\,a\,\cos\,(\bar{b},\bar{a})=((m+ni)\,\bar{a})\,.\,\bar{a}=(m\bar{a}+ni\,\bar{a})\,\bar{a}$$

$$=m\,a^2+n\,(i\,\bar{a}\,.\,\bar{a})=m\,a^2\quad.$$

Deci,

$$\cos\,(\bar{b},\bar{a})=\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}\quad,$$

relație care definește unghiul (mai mic decât 2π) dintre cei doi vectori.

De asemeni,

$$[\bar{a},\bar{b}]=\bar{u}\,.\,a\,b\,\sin\,(\bar{a},\bar{b})=n\,[\bar{a},i\,\bar{a}]=na^2\,\bar{u}\quad,$$

după (15); deci,

$$\sin\,(\bar{a},\bar{b})=\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}\quad.$$

Operatorul general (8) se poate scrie

$$o=\varkappa\,(\cos\,\varphi+i\,\sin\,\varphi)=\varkappa\,e^{i\varphi}=m+n\,i\quad.$$

Operatorul de rotație pură $e^{i\varphi}$ se poate obține din operatorul complex, luând

$$m=\cos\,\varphi\ ;\ n=\sin\,\varphi\quad,$$

și reprezintă o rotație de unghiul φ a vectorului $\bar{a}$. In adevăr, punând,

(17) $$\bar{b} = e^{i\varphi}\,\bar{a} \quad ,$$

rezultă

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \cos\varphi \quad ;$$

deci,

$$\text{ungh.}\,(\bar{a}, \bar{b}) = \varphi \quad .$$

Proprietăţile operatorului de rotaţie pură se deduc imediat din proprietăţile cunoscute ale exponenţialelor imaginare:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = +i \; ; \; e^{i\pi} = i^2 = -1 \; ; \; e^{i\frac{3}{2}\pi} = i^3 = -i \; ;$$

$$e^{i2\pi} = i^4 = +1 \; ; \; e^{i0} = 1 \; ;$$

$$e^{i\varphi} + e^{i\psi} = \cos\varphi + \cos\psi + (\sin\varphi + \sin\psi)\,i \; ;$$

$$e^{i\varphi}\; e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} \; ; \; e^{i\varphi} : e^{i\psi} = e^{i(\varphi-\psi)} \quad .$$

Operaţiile deduse din aplicaţia operatorului. Se verifică uşor că, $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ fiind doi vectori oarecari, avem:

$$(e^{i\varphi}\,\bar{a} \,.\, e^{i\psi}\,\bar{a}) = a^2\cos(\psi-\varphi) \; ; \; (e^{i\varphi}\,\bar{a} \,.\, e^{i\varphi}\,\bar{b}) = (\bar{a}\,.\,\bar{b}) \; ;$$

(18) $$(\bar{a} \,.\, e^{i\varphi}\,\bar{b}) = (e^{-i\psi}\,\bar{a} \,.\, \bar{b}) \; ;$$

$$\left[e^{i\varphi}\,\bar{a}, e^{i\psi}\,\bar{a}\right] = a^2\sin(\psi-\varphi)\,\bar{u} \; ; \; \left[e^{i\varphi}\,\bar{a}, e^{i\varphi}\,\bar{b}\right] = \left[\bar{a}, \bar{b}\right] \; ;$$

$$\left[\bar{a}, e^{i\varphi}\,\bar{b}\right] = \left[e^{i\varphi}\,\bar{a}, \bar{b}\right] \quad .$$

Dacă vectorul $\bar{b}$ este dat de (17), atunci,

$$(\bar{a}\,.\,\bar{b}) = (\bar{a}\,.\,e^{i\varphi}\,\bar{a}) = a^2\cos\varphi \; ; \; [\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, e^{i\varphi}\,\bar{a}] = a^2\sin\varphi\,.\,\bar{u} \quad .$$

Derivarea. Se verifică imediat că, dacă $\bar{a}$ este un vector ce depinde de timp,

$$\frac{d}{dt}(i\,\bar{a}) = i\,\frac{d\bar{a}}{at} \quad .$$

In adevăr, după relaţia (10), avem

$$\frac{d}{dt}(i\,\bar{a}) = \frac{d}{dt}\left[\bar{u}, \bar{a}\right] = \left[\bar{u}, \frac{d\bar{a}}{dt}\right] = i\frac{d\bar{a}}{dt} \quad .$$

In mod analog, φ nedepinzând de timp,

$$\frac{d}{dt}(e^{i\varphi}\,\bar{a}) = e^{i\varphi}\,\frac{d\bar{a}}{dt} \quad .$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste operaţii se pot generaliza şi pentru un operator care depinde de timp :

$$\frac{d}{dt}(e^{i\varphi}\bar{a}) = e^{i\varphi}\frac{d\bar{a}}{dt} + i\frac{d\varphi}{dt}e^{i\varphi}\bar{a} \quad ;$$

şi analog,

$$\frac{d}{dt}(m+ni)\bar{a} = (\frac{dm}{dt}+\frac{dn}{dt}i)\bar{a}+(m+ni)\frac{d\bar{a}}{dt} \quad .$$

98. Observaţie asupra calculării valorilor medii ale cătimilor imaginare. Calculul mediei patratelor unei expresii periodice, în intervalul unei perioade, prin expresia

$$A^2 = a^2 = \frac{a^2}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \; dt = \frac{1}{2}a^2 \quad ,$$

deci,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}a \quad , \tag{19}$$

se prezintă sub formă comodă cu ajutorul exponenţialelor imaginare corespunzătoare, observându-se că funcţia $\cos \omega t$ este partea reală a expresiei $e^{i\omega t}$. Rezultatul (19) ne conduce la *definiţia : „Patratul valorii medii a unei mărimi imaginar-complexe* $\varkappa e^{i\alpha}$, *variabilă periodic în timp, cu perioada T, este egală cu jumătatea produsului mărimii date prin imaginar-conjugata ei“ :*

$$A^2 = \frac{1}{2}\varkappa e^{i\omega t}\; \varkappa e^{-i\omega t} = \frac{1}{2}\varkappa^2 \quad ,$$

deci identică relaţiei (19).

In mod analog : *„Valoarea medie a produsului dintre două mărimi complexe, de aceiaşi perioadă, se obţine luând jumătate din produsul uneia din mărimi prin imaginara conjugată a celeilalte“ :*

$$\overline{[\bar{a}.\bar{b}]} = \frac{1}{2}(\bar{a}.\bar{b}^*) \quad . \tag{20}$$

$$\overline{[\bar{a},\bar{b}]} = \frac{1}{2}[\bar{a},\bar{b}^*] \quad ,$$

unde am însemnat prin stea * conjugata — imaginară.

Aplicație la Electrodinamică. Valorile efective ale forței electromotrice și curentului electric, exprimate prin relațiile (3) și (3'), se obțin, aplicând definiția (19), imediat, în formele (3) și (3'). De asemenea, valorile „puterii eficace" și a „puterii reactive" date de relațiile (4) și (5), se scriu imediat aplicând relațiile (20) și ținând seamă de regulele de calcul (18):

$$P_{ef} = \frac{1}{2}(\bar{v}.k\,e^{-i\varphi}\,\bar{v}^*) = \frac{1}{2}V_0^2\frac{J_0}{V_0}\cos\varphi = VJ\cos\varphi\ ;$$

(21)

$$P = \frac{1}{2}|[\bar{v},ke^{-i\varphi}\,\bar{v}^*]| = \frac{1}{2}V_0^2\frac{J_0}{V_0}\sin\varphi = VJ\sin\varphi\ .$$

Se vede clar cât de simplificat și comod este calculul cu mărimi și operatori imaginari, prin comparație cu calculul algebric obicinuit, în problemele susceptibile de reprezentări prin expresii imaginare.

2. *Vectorul complex al lui* Poynting. (v. *Electromagnetismul,* cap. X). Fie $\overline{E}$ câmpul electric și $\overline{H}$ câmpul magnetic. Cantitatea de radiație electromagnetică, prin unitatea de suprafață, este dată de vectorul lui Poynting

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\overline{E}\,,\overline{H}\right] .$$

Să presupunem că o *undă electromagnetică* este exprimată prin „unda plană"

$$E_y = a\,e^{i\omega\left(t-\frac{x}{q}\right)}\ ;\quad H_z = b\,e^{i\omega\left(t-\frac{x}{q}\right)}\ ,$$

unde a și b sunt, în general, constante complexe.

In problemele de Electrodinamică — cum sunt, calculul căldurii jouleiene desvoltată într'un conductor de un curent electric, al energiei electrice și magnetice, etc. — fiindcă măsurile nu se pot efectua asupra valorilor momentane, ci asupra *mediilor* acestor valori, în sensul arătat în prezentul paragraf, este comod să se introducă vectorul lui Poynting *complex*

$$\overline{\mathcal{S}} = \frac{c}{8\pi}\left[\overline{E},\overline{H}^*\right] ,$$

unde * reprezintă, ca de obicei, mărimea imaginar-complexă.

Scanned with OKEN Scanner

In aceste condiţii, energia radiată electromagnetică, pe unitatea de suprafaţă, este dată de

$$E_y H_z = \frac{1}{2} a b^* \quad .$$

Aplicaţie geometrică: coordonate polare în plan. Vectorul de poziţie al unui punct în plan, x şi y fiind coordonatele faţă de un sistem de axe rectangulate de vectori unitari $\bar{\imath}$ şi $\bar{\jmath}$, este, precum se ştie,

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} \quad .$$

Să punem

$$\bar{\jmath} = i\bar{\imath} \quad , \quad \text{unde } i = \sqrt{-1} \quad ,$$

ceeace revine, în fond, la trecerea de la reprezentarea analitică din planul real la reprezentarea în planul complex.

Putem scrie

$$\bar{r} = (x + iy)\bar{\imath} = \rho e^{i\varphi} \quad .$$

Modùlul lui $\bar{r}$ se calculează, după cele desvoltate în paragraful de faţă, punând

$$|\bar{r}|^2 = \bar{r}.\bar{r}^* = \rho^2 = x^2 + y^2 \quad ;$$

iar argumentul φ este dat de

$$\text{tang. } \varphi = \frac{y}{x} \quad .$$

In acest mod se deduce

$$x = \rho \cos\varphi \quad ; \quad y = \rho \sin\varphi \quad ,$$

expresii bine cunoscute din geometria analitică plană.

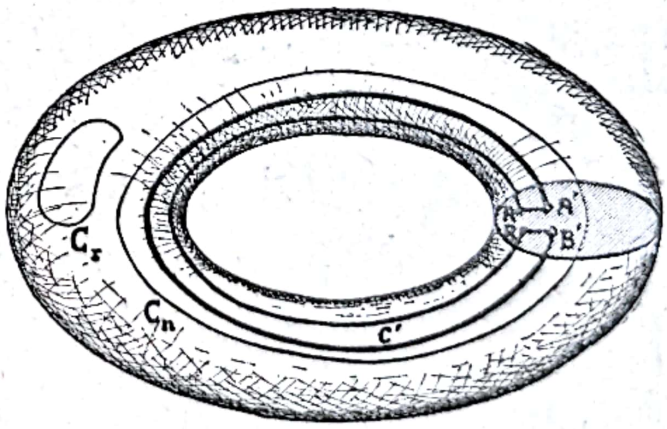
CAP. V

Operaţii vectoriale diferenţiale. Câmpuri.

99. Mărimi de stare. Să considerăm spaţiul fizic al unor fenomene naturale, finit sau nu, constituind, din punct de vedere matematic, un domeniu continuu *simplu-conex,* definit prin condiţia cunoscută : o curbă oarecare conţinută în domeniu poate să fie redusă la un punct prin deformări continue fără ca să părăsească domeniul nici un moment. (Conexitate liniară). Un exemplu edificator de domeniu simplu-conex îl constitue spaţiul cuprins între două sfere concentrice.

Este de observat că un astfel de spaţiu poate să fie secţionat în două părţi distincte şi independente, *printr'o singură tăietură.* Reamintim că se numeşte „tăietură", o secţiune limitată de frontierele domeniului. De exemplu, putem secţiona spaţiul dintre cele două sfere printr'un plan secant, despărţind domeniul dat în două domenii tot simplu-conexe.

Se pot prezenta şi cazuri în care să avem de a face cu domenii *multiplu-conexe.* Atunci, prin tăieturi adecvate, vom putea să reducem aceste domenii la domenii simplu-conexe după normele indicate de Analiza matematică.



(Fig. 35)

Reamintim că un domeniu se numeşte *dublu-conex* dacă printr'o *singură* tăietură poate să fie redus la un domeniu simplu-conex.

Un exemplu clasic de domeniu *dublu-conex* este *torul.* (fig. 35).

Intr'un astfel de spaţiu putem distinge *două* feluri de curbe închise: a) curbe satisfăcând condiţiei de reductibilitate la un punct, fără a părăsi domeniul; b) curbe care *nu* satisfac acestei condiţiuni.

In adevăr, într'un tor putem aşeza complet o curbă închisă astfel încât să nu înconjoare golul central: e o curbă reductibilă *C*. Putem trage însă o curbă închisă ce înconjoară golul interior: e o curbă nereductibilă C_n, punctele ei trebuind să părăsească domeniul torului, intrând în gol, spre a putea fi redusă la un punct.

Un astfel de domeniu *dublu-conex* poate fi redus la un domeniu simplu-conex printr'o singură tăietură, *S*, sub forma unei membrane care opreşte curba nereductibilă în punctele *A* şi *B* aşezate pe cele două feţe opuse, spre a nu înconjora golul central. Tubul torului fiind închis prin membrana *S* domeniul devine simplu-conex: orice curbă *AA' CBB' C' A* este reductibilă.

In general, ordinul de multiplicitate a conexiunii unui domeniu este determinat de numărul tăieturilor (membranelor) necesare spre a-l reduce la un domeniu simplu-conex, şi anume: ordinul de multiplicitate este cu o unitate mai mare decât numărul minim al tăieturilor.

Mărimile fizice, reprezentante ale fenomenelor naturale, sunt, în general, mărimi *continue* în domeniul lor de existenţă, pe care-l presupunem simplu-conex sau reductibil, prin tăieturi adecvate, la un atare domeniu. Funcţiile matematice care reprezintă mărimile fizice vor satisface şi ele, evident, condiţiilor de continuitate, în domeniul lor de existenţă. Numim aceste funcţii, *mărimi de stare* sau *funcţii de stare*: ele determină *starea* unui sistem fizic dat.

Prin însuşi caracterul lor fizic, funcţiile de stare sunt susceptibile de determinări *unice* în fiecare punct al domeniului lor de existenţă.

Există, însă, şi fenomene ale căror funcţii de stare prezintă, într'un număr *finit* de puncte izolate, pe linii sau suprafeţe date, variaţii extrem de repezi, pe o distanţă extrem de mică, aşa fel încât variaţia lor reală, continuă, nu poate să fie urmărită. Această împrejurare ne face să asimilăm regiunile în care acest efect se produce unor *discontinuităţi matematice*

adevărate, în scopul de a putea aplica metodele de calcul oferit de Analiza matematică funcţiilor de stare.

Se prezintă chiar cazuri, după cum vom vedea, când suntem obligaţi să introducem funcţii de stare cu determinări multiple, spre a ocoli dificultăţile produse de apariţia unor domenii care nu satisfac condiţiei de a fi simple-conexe.

Metoda de calcul curentă în problemele de Fizică, pentru înlăturarea dificultăţilor prezentate de existenţa regiunilor de discontinuitate, constă în artificiul următor: se înconjoră regiunile de discontinuitate cu „membrane" izolante, care elimină din domeniul de existenţă regiunile incomode, funcţia de stare rămânând în domeniul rezultant, regulată.

Cele mai curente cazuri de discontinuităţi pe care le prezintă problemele de Fizică sunt: 1. valoarea însăşi a funcţiei de stare posedă o variaţie bruscă; 2. derivate de-ale funcţiei iau brusc o nouă valoare, când variabila independentă rămâne continuă.

100. Noţiunea de câmp. Fie un domeniu continuu, sau nu, simplu-conex, în spaţiul fizic euclidian cu trei dimensiuni, în care definim o funcţie scalară regulată $\varphi\,(x,y,z)$, continuă, uniformă, diferenţiabilă de câte ori este nevoe, cu derivate continui, în interiorul şi pe conturul domeniului, — exceptând cel mult (când vom specifica acest lucru) un număr finit de puncte, linii sau suprafeţe izolate, unde poate să prezinte discontinuităţi funcţia sau derivatele ei. [1])

Considerând, în domeniul dat, variabilele x,y,z, drept coordonatele unui punct P, al cărui vector de poziţie faţă de un punct fix O este $\bar{r}$, putem exprima funcţia $\varphi\,(x,y,z)$ prin una din formele echivalente $\varphi\,(P)$ sau $\varphi\,(\bar{r})$.

Mulţimea tuturor determinărilor unice pe care le ia funcţia $\varphi\,(P)$ în fiecare punct P al domeniului ei de existenţă, se numeşte *câmpul* funcţiei $\varphi\,(P)$. Avem anume, un *câmp scalar.*

Numim funcţia $\varphi\,(P)$, care determină câmpul, *funcţie de câmp*, sau *funcţia câmpului.*

Cum există, evident, fenomene fizice ale căror mărimi de

1) Fizicienii, ca să caracterizeze pe scurt funcţiile cu care operează, în sensul precizat mai sus, numesc funcţia de stare: „funcţie cumsecade"; „anständige Funktion"; „une bonne fonction"!.

stare au caracter vectorial, vom defini, în mod analog, o funcţie vectorială de stare $\bar{a}(x,y,z)$, sau $\bar{a}(P)$, sau $\bar{a}(\bar{r})$, luând valori unice în fiecare punct P al domeniului, reprezentată printr'un vector legat de acest punct.

Intru cât o astfel de funcţie exprimă un fenomen fizic, presupunem că satisface condiţiilor de regularitate precizate mai sus.

In acest caz avem de a face cu un *câmp vectorial.*

101. Suprafeţe de nivel. Potenţial. Să considerăm un sistem cartesian de coordonate rectangulare şi funcţia câmpului (scalară), regulată, $\varphi(x,y,z)$. Toate punctele câmpului, pentru care funcţia câmpului are o valoare constantă determinată

$$\varphi(x,y,z) = C \text{ (constant)} \quad , \tag{1}$$

formează o suprafaţă, dată de ecuaţia (1), numită *suprafaţă de nivel.* Această noţiune permite construirea unei imagini geometrice a câmpului scalar, independentă de sistemul de coordonate ales.

Dacă deplasăm punctul P în punctul P' situat pe *aceiaşi* suprafaţă de nivel, variaţia funcţiei de câmp este nulă

$$\varphi(P') - \varphi(P) = 0 \quad ,$$

căci, după (1), ambii termeni au aceiaşi valoare C, pentru punctele aşezate pe aceiaşi suprafaţă.

Noţiunea de *potenţial* este întrodusă în Matematică şi Fizică fie pentru a desemna funcţia de câmp φ, fie pentru a desemna funcţia $\psi = -\varphi$, deci funcţia de câmp cu semn schimbat, după natura problemei propuse. Funcţia respectivă poartă, atunci, numele de *potenţial* sau *funcţie potenţială.*

In cele ce urmează vom adopta a doua definiţie.

Intr'un domeniu cu două dimensiuni, ecuaţia

$$\varphi(x,y) = C \quad ,$$

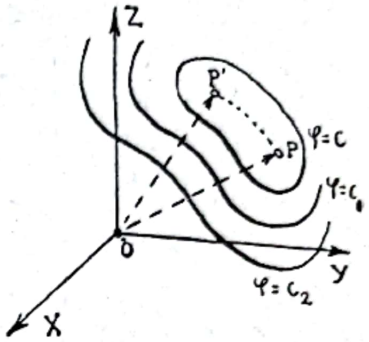
reprezintă *curbele de nivel.*

102. Derivata geometrică a funcţiei de câmp scalar. Să considerăm suprafaţa (1) care trece printr'un punct dat $P(x_0, y_0, z_0)$. Să ducem prin P o curbă regulată şi rectificabilă, care să nu întâlnească această suprafaţă decât în punctul P. Ecuaţia para-

metrică a acestei curbe este

$$\bar{r} = \bar{r}(s) \tag{2}$$

unde parametrul s este arcul de curbă măsurat în sensul crescător pe curbă. Când punctul P este deplasat pe curba (2), funcţia $\varphi(P)$ va lua o succesiune de valori — pe care le presupunem, pentru a fixa ideile, crescătoare, pentru s crescător — formând un şir uniparametric crescător, reprezentat printr'o funcţie continuă şi derivabilă, de parametrul s (fig. 36),



(Fig. 36)

$$\varphi(P(s)) = C(s) \quad . \tag{3}$$

Fie $P_1(s_1)$ un alt punct de pe curba (3) infinitesimal vecin lui $P(s_0)$, corespunzător valorii $s_1 > s_0$ a parametrului. Atunci, $\varphi(P_1) > \varphi(P)$.

Să considerăm diferenţa

$$\frac{\varphi(P_1) - \varphi(P)}{\text{arc } PP_1} = \frac{\delta\varphi}{\delta s} \quad ;$$

când P_1 tinde către P, pe curba (2), arcul PP_1 tinzând către zero. Având în vedere condiţiile de continuitate şi derivibilitate ale funcţiei scalare (3), vom avea

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta\varphi}{\delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{dC}{ds} \quad . \tag{4}$$

Numim această mărime *derivata geometrică* sau *derivata de direcţie* a lui $\varphi(P)$, pe direcţia tangentei în P la curba (2), şi o notăm cu $\frac{d\varphi}{ds}$.

Definiţia aceasta este univocă: ea nu depinde de forma specială a curbei (3), ci numai de punctul P şi de direcţia $\bar{s}$ a tangentei în P. ($d\bar{s} = \bar{s}\, ds$). In adevăr, să desvoltăm funcţia $\varphi(x, y, z)$, după formula lui Taylor, în vecinătatea infinitesimală a lui $P(x_0, y_0, z_0)$, neglijând termenii de ordinul al doilea şi superiori. Avem

$$\delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P \delta x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P \delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P \delta z \quad . \tag{5}$$

Făcând raportul dintre creşterea funcţiei şi creşterea arcului s,

$$\frac{\delta\varphi}{\delta s}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P\cdot\frac{\delta x}{\delta s}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P\cdot\frac{\delta y}{\delta s}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P\cdot\frac{\delta z}{\delta s};$$

şi trecând la limită, când $\delta s\to 0$, obţinem

$$\frac{d\varphi}{ds}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P\frac{\partial x}{\partial s}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P\frac{\partial y}{\partial s}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P\frac{\partial z}{\partial s}\ .$$

Dar,

$$(6)\qquad \frac{\partial x}{\partial s}=\cos(\bar{s},\bar{\imath});\ \frac{\partial y}{\partial s}=\cos(\bar{s},\bar{\jmath});\ \frac{\partial z}{\partial s}=\cos(\bar{s},\bar{k})\ .$$

Deci,

$$(7)\qquad \frac{d\varphi}{ds}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P\cdot\cos(\bar{s},\bar{\imath})+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P\cdot\cos(\bar{s},\bar{\jmath})+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P\cdot\cos(\bar{s},\bar{k})\ .$$

Ultima relaţie pune în evidenţă proprietatea enunţată, de univacitate a definiţiei (4): ea arată că derivata de direcţie depinde numai de valorile derivatelor parţiale ale funcţiei φ luate în P şi de cosinusurile directoare ale direcţiei $\bar{s}$, în P.

103. Vectorul Gradient. Câmpuri vectoriale. Observăm că mărimile $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, ce figurează în relaţia (7) pot să fie considerate drept componentele unui vector, faţă de sistemul de coordonate $\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}$. In adevăr, această relaţie defineşte, în formă identică regulii de recunoaştere a caracterului vectorial (§ 15), componenta $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, pe direcţia $\bar{s}$, ce face cu axele de coordonate cosinusurile directoare (6). Numim acest vector: *Gradientul lui* φ. El se exprimă, în fiecare punct al domeniului, prin relaţia

$$(8)\qquad \operatorname{grad}_P\varphi=\bar{\imath}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ .$$

Scriind relaţia (5) sub formă diferenţială şi ţinând seamă de (8), avem

$$(9)\qquad d\varphi=(\operatorname{grad}\varphi\,.\,d\bar{r})\ ,$$

iar pentru derivata lui φ în direcţia $\bar{s}$,

$$(10)\qquad \frac{d\varphi}{ds}=\left(\operatorname{grad}\varphi\,.\,\frac{d\bar{r}}{ds}\right),$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al punctului $P(x, y, z)$. Expresiile (9) şi (10) formulează diferenţiala totală şi derivata funcţiei φ sub formă *operatorială* de produs scalar.

Unii autori, menţinându-se în concepţia calculului operatorial, folosesc relaţia (9) drept „definiţie" pentru operatorul gradient exercitat asupra funcţiei de punct $\varphi(P)$. (v. L. Burali-Forti şi R. Marcolongo, l. c. p. 81).

Proprietăţi analitice. Se verifică imediat că,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\alpha = 0\,, \text{ dacă } \alpha = \text{const.}\,;\\
&\operatorname{grad}(\alpha\varphi) = \alpha \operatorname{grad}\varphi\,, \text{ dacă } \alpha = \text{const.}\,;\\
&\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi\,;\\
&\operatorname{grad}(\varphi \,.\, \psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi\,;\\
&f(\varphi)\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\int f(\varphi)\,d\varphi;\\
&\operatorname{grad} f(\varphi, \psi) = \frac{df}{d\varphi}\operatorname{grad}\varphi + \frac{df}{d\psi}\operatorname{grad}\psi\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Dacă se cunoaşte valoarea funcţiei φ într'un punct P_0 şi gradientul lui φ în acelaş punct, atunci, deducem valoarea funcţiei φ într'un punct oarecare P, la distanţa $d\bar{r}$ de P_0, prin relaţia

$$\varphi_P = \varphi_{P_0} + (\operatorname{grad}_{P_0} \,.\, d\bar{r})\,.$$

Apoi, $\bar{r}$ fiind vectorul de poziţie al punctului P, avem

$$\operatorname{grad}\bar{r} = \frac{\bar{r}}{r} \quad ; \quad \operatorname{grad} f(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{r} f'(r)\,.$$

$$\operatorname{grad}(\bar{u} \,.\, \bar{r}) = \bar{u}\,, \text{ dacă } \bar{u} \text{ este constant.}$$

Proprietăţi geometrice. Câmpul vectorial. Din cele ce preced rezultă că gradientul este o funcţie vectorială de poziţie subordonată univoc fiecărui punct al domeniului de existenţă. El reprezintă un câmp vectorial, subordonat câmpului scalar figurat de suprafeţele de nivel, într'un mod univoc şi bine determinat. Să stabilim această proprietate.

In primul rând se constată că vectorul gradient este, în fiecare punct al unei suprafeţe de nivel, *normal* pe acea suprafaţă. In adevăr, dacă $d\bar{r}$ reprezintă o deplasare infinitesimală *pe suprafaţa de nivel*, membrul întâi al relaţiei (9) este nul; produsul scalar din membrul al doilea trebuind să fie nul, fără ca unul din cei doi factori să fie nul, rezultă că gradientul lui φ este perpendicular pe $d\bar{r}$, vector aşezat în planul tangent la suprafaţă, în punctul considerat.

Mai mult, pornind pe direcţia normalei dintr'un punct al suprafeţei de nivel, gradientul are ca sens pozitiv sensul crescător, spre suprafaţa vecină corespunzătoare unei valori mai mari a parametrului C. Se spune, că gradientul arată *creşterea cea mai repede* a funcţiei câmpului (fiind normal pe suprafaţă).

Dacă însă, în locul funcţiei φ luăm suprafeţele potenţiale $\psi = -\varphi = \text{const.}$, gradientul determină *căderea de potenţial*; noţiune curentă în Fizică.

Din aceste consideraţii rezultă încă o proprietate însemnată a gradientului: gradientul unei funcţii $\varphi(P)$ este derivata geometrică a funcţiei φ în direcţia normalei $\bar{n}$ la suprafaţa de nivel corespunzătoare:

$$\bar{n}\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{grad}\ \varphi\ . \tag{12}$$

Curbele din domeniul considerat, care sunt, în fiecare punct al lor, tangente vectorului gradient, se numesc *linii de câmp* (obicinuit, dar impropriu, ele sunt numite *linii de forţă*). Aceste curbe taie ortogonal suprafeţele de nivel, completând astfel imagina câmpului vectorial de gradient, care este un caz particular al unui câmp vectorial oarecare.

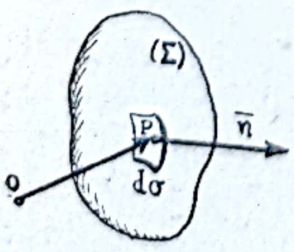
Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de câmp sunt

$$dx : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = dy : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = dz : \frac{\partial \varphi}{\partial z}\ , \text{ sau vectorial: } [d\bar{r}, \text{grad}\ \varphi] = 0, \tag{13}$$

relaţii, care exprimă condiţia ca tangenta (dx, dy, dz) curbei să fie paralelă vectorului gradient $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$.

Funcţia φ este numită curent, dar impropriu, „funcţie de forţă"; noi o vom numi, precum am mai spus, *funcţie de câmp*, sau *funcţie a câmpului*.

104. Definiţia gradientului cu ajutorul derivatei spaţiale a lui φ. Să considerăm o suprafaţă oarecare, *închisă*, (Σ), trecând prin P, care înconjoară un volum V, fără puncte singulare (fig. 37). Fie $d\bar{\sigma} = \bar{n}\, d\sigma$ elementul de suprafaţă în vecinătatea unui punct P al acestei suprafeţe, $\bar{n}$ fiind normala *exterioară* la suprafaţă, în P. Integrala



(Fig. 37)

$$\bar{\mathcal{I}} = \oint \varphi d\bar{\sigma}\ , \tag{14}$$

unde $\varphi\ (x, y, z)$ este o funcţie regulată şi uniformă, are un sens bine definit. Valoarea acestei integrale este de acelaş ordin de mărime ca şi volumul V. In adevăr, fie φ_0 valoarea lui φ într'un punct fix P_0. Avem,

$$\overline{\mathcal{I}} = \oint_{(s)} (\varphi - \varphi_0)\, d\overline{\sigma}\,,$$

căci

$$\oint \varphi_0\, d\overline{\sigma} = \varphi_0 \oint d\overline{\sigma} = 0\,,$$

integrala extinsă asupra unei suprafeţe închise, regulată, fiind nulă.

Să presupunem că funcţia $\varphi(x, y, z)$ se poate desvolta în serie TAYLOR în vecinătatea punctului P_0. Diferenţa $\varphi - \varphi_0$ este de ordinul distanţei punctului fix P_0 la suprafaţa (Σ); iar aria acestei suprafeţe este de ordinul de mărime al patratului numitei distanţe; aşadar, $\overline{\mathcal{I}}$ este de ordinul mărimii cubului distanţei lui P_0 la suprafaţa (Σ), deci de acelaş ordin de mărime ca volumul V (aproximat, de ex. printr'o sferă cu centrul în P_0 şi de rază egală cu cea mai mare distanţă a lui P_0 la suprafaţă).

Să facem ca volumul V să tindă către zero, reducându-se la un punct P. Atunci vectorul

$$\overline{D}(\varphi) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} \varphi\, d\overline{\sigma}\,, \tag{15}$$

există şi posedă o valoare, în general, finită şi independentă de forma suprafeţei (Σ). Numim această limită *derivata spaţială* a lui φ.

Pentru a dovedi că definiţia (15) este independentă de forma suprafeţei (Σ), vectorul $\overline{D}(\varphi)$ depinzând numai de direcţia $\overline{n}$ aleasă în P, să presupunem că nu numai φ, dar şi $\overline{\mathcal{I}}$ este funcţie continuă în domeniul V, inclusiv frontiera. Admitem — rămânând să demonstrăm mai târziu aceasta — că vectorul $\overline{D}(\varphi)$ este determinat pentru o suprafaţă particulară; de pildă o suprafaţă cilindrică, infinitesimală, ce înconjoră punctul fix P. Să descompunem volumul V într'un număr suficient de mare N de cilindri τ_i; astfel încât: $\lim_{N \to \infty} \sum_1^N \tau_i = V$.

Fie $\overline{\mathcal{J}}_i$ valoarea integralei (14) pe cilindrul de volum τ_i. Cum funcţia $\overline{\mathcal{J}}$ este presupusă continuă în tot domeniul, avem

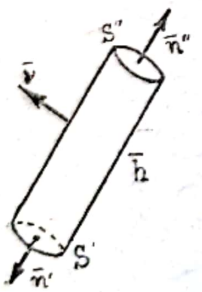
$$\frac{\overline{\mathcal{J}}_i}{\tau_i} = \overline{D}(\varphi) + \overline{\varepsilon}_i ,$$

unde $\overline{\varepsilon}_i$ este o cătime care tinde către zero cu τ_i. Sumând pentru toţi cilindrii infinitesimali, obţinem

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \overline{\mathcal{J}}_i}{\sum \tau_i} = \overline{D}(\varphi) + \frac{\sum \overline{\varepsilon}\,\tau_i}{\sum \tau_i} = \overline{D}(\varphi) + \overline{\varepsilon} ,$$

unde $\lim_{\tau \to 0} \overline{\varepsilon} = 0$. Pe de altă parte, este clar că $\lim_{N \to \infty} \sum_{1}^{N} \overline{\mathcal{J}}_i = \overline{D}(\varphi)$, căci toate integralele luate pe normalele suprafeţelor cilindrice care înconjoară pe toţi τ_i se distrug două câte două (în adevăr, pe aceiaşi suprafaţă ce separă doi cilindri vecini normalele sunt de sensuri contrare, iar integralele egale şi de semne contrare; astfel încât rămâne numai integrala pe porţiunile din suprafeţele cilindrice contingente suprafeţei (Σ) înconjorătoare.

Prin aceasta, afirmaţia de mai sus este dovedită. Rămâne să mai determinăm valoarea lui $\overline{D}(\varphi)$ pe o suprafaţă cilindrică ce înconjoară infinitesimal punctul fix P (fig. 38). Fie s', s'', S suprafeţele bazelor şi laterală; $\overline{n}'$, $\overline{n}''$, şi $\overline{\nu}$ normalele exterioare (pozitive) corespunzătoare. Să proiectăm vectorul (14) pe direcţia înălţimii cilindrului $\overline{n}''$; avem



(Fig. 38)

$$\overline{n}'' \oint \bar{\mathfrak{n}} \,.\, \varphi(P)\, d\sigma = \oint (\overline{n} \,.\, \bar{\mathfrak{n}})\, \varphi(P)\, d\sigma$$

căci vectorul $\overline{n}$ este fix. Dar $\overline{n}''\,\overline{\nu} = 0$ şi $\overline{n}''\,\overline{n}' = -1$; deci, putem scrie

$$\oint_{(s'+s''+\Sigma)} (\overline{n}'' \,.\, \bar{\mathfrak{n}})\, \varphi(P)\, d\sigma = \int_{s''} \varphi'' \,.\, d\sigma'' - \int_{s'} \varphi'\, d\sigma' \quad .$$

Volumul V este egal cu $V = hs' = hs''$ (h = înălţimea cilindrului). Dacă luăm s' şi s'' suficient de mici, încât să putem considera $\varphi(P)$ ca posedând pe aceste suprafeţe valori constante φ' şi φ'' avem ($s' = s'' = S$),

$$\int_{s''} \varphi''\, d\sigma'' - \int_{s'} \varphi'\, d\sigma' = (\varphi'' - \varphi')\, s \quad .$$

Impărţind prin volumul cuprins în cilindru şi trecând la limită

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{n}'' \oint \bar{n}\, \varphi\,(P)\, d\sigma}{hs''} = \lim_{h \to 0} \frac{(\varphi'' - \varphi')\, s}{hs} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi'' - \varphi'}{h} \quad .$$

La limită, φ'' şi φ' sunt valorile funcţiei $\varphi\,(P)$ în două puncte P'' şi P' infinit vecine, a căror distanţă h tinde la zero. Putem deci, scrie

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{V} \cdot \overline{n}'' \oint \bar{n}\, \varphi\,(P)\, d\sigma = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi\,(P'') - \varphi\,(P')}{P'' - P'} = \frac{\partial \varphi}{\partial n''} = \overline{D}_{n''} \varphi \quad ,$$

după definiţia derivatei în direcţia $\overline{n}''$ şi după relaţia (15).

Dar, după (12),

$$\overline{D}_{n''}(\varphi) = \operatorname{grad}_{n''} \varphi = (\overline{n}'' \,.\, \operatorname{grad}\, \varphi) \quad .$$

Cum însă direcţia $\overline{n}''$ este arbitrară, rezultă

$$(16) \qquad \overline{D}\,(\varphi) \equiv \operatorname{grad} \varphi = \lim \frac{1}{V} \oint \bar{n}\, \varphi\,(P).\, d\sigma \,,$$

oricare ar fi forma suprafeţei (Σ), volumul V tinzând către punctul P în care se exprimă valoarea gradientului, prin relaţia (16).

Relaţia precedentă (16) constitue o definiţie riguroasă a vectorului pe care l'am numit gradient.

Operatorul „grad" desemnează operaţia diferenţială corespunzătoare gradientului unei funcţii scalare de poziţie şi se poate exprima simbolic, prin

$$(17) \qquad \operatorname{grad} = \bar{\imath} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{\jmath} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad ,$$

faţă de sistemul de coordonate cartesian. Unii autori întrebuinţează semnul ∇ (numit *Nabla*, de numele unei harfe asiriene de această formă), spre a distinge operatorul „grad" de operaţia diferenţială „grad φ".

Noţiunea de operator a gradientului ne permite să concepem şi simbolul diferenţialei totale d, ca şi simbolul dife-

rențelor finite δ, drept operatori, sub formă simbolică de produse scalare:

$$d = (d\bar{r} \,.\, \text{grad}) \quad ; \quad \delta = (\delta\bar{r} \,.\, \text{grad}) \,.$$

Observație asupra gradientului funcției

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \,,$$

care exprimă distanța între punctul curent $P(x, y, z)$ și punctul origină $S(x_0, y_0, z_0)$. Este ușor de verificat că

$$\text{grad}_P r = -\text{grad}_S r \,,$$

căci derivatele parțiale ale lui r în raport cu x, y, z, sunt de semne contrare cu derivatele parțiale ale lui r în raport cu x_0, y_0, z_0.

105. Noțiunea de gradient superficial. Suprafețe de discontinuitate. Am amintit că, în unele probleme de Fizică, este posibil să apară, în domeniul de existență a funcției de câmp, anumite *suprafețe de discontinuitate*. Să precizăm această noțiune.

Să considerăm o suprafață regulată, prezentând două fețe, fără puncte singulare și așezată la distanță finită în câmp. Vom defini pe ea cele două *fețe*, numindu-le fața 1 și fața 2. In fiecare punct P al suprafeței să fixăm sensul normalei la suprafață $\bar{n}$; de pildă, să luăm ca sens pozitiv sensul de la 1 spre 2; prin aceasta, am fixat și un sens pozitiv de circulație pe elementul superficial din P. Normalele pe fețele respective $\bar{n}_1$ și $\bar{n}_2$ sunt considerate ca pornind din P *spre* fața corespunzătoare, astfel încât $\bar{n}_2 = \bar{n} = -\bar{n}_1$.

Să admitem că funcția φ ia o valoare φ_1 pe fața 1 și o valoare φ_2, diferită de prima, pe fața 2, astfel încât $\varphi_2 - \varphi_1 =$ cantitate finită. Cu toate că funcția φ, reprezentând o mărime de stare, variază în realitate, *continuu* între cele două valori, această variație efectuându-se însă pe distanța infinit de mică ce separă cele două fețe ale suprafeței de discontinuitate, putem considera variația $\varphi_1 - \varphi_2$ drept bruscă, ca și cum am avea de a face cu o discontinuitate matematică propriu zisă pentru funcția φ în punctul P.

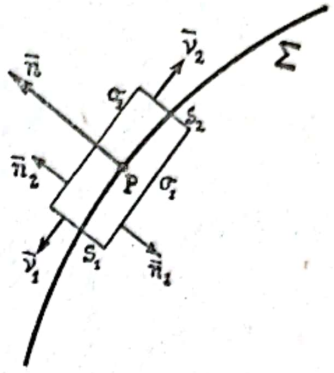
Acestea fiind precizate, numim *gradient superficial* vectorul

$$\bar{n}\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \text{grad. sup. } \varphi \,,$$

în fiecare punct P al suprafeței de discontinuitate.

Scanned with OKEN Scanner

Această noţiune se obţine precum urmează. Fie o suprafaţă de discontinuitate Σ, care satisface condiţiilor enunţate, şi un punct P regulat al ei. Să construim în jurul punctului P o suprafaţă cilindrică infinitesimală, care taie o porţiune din Σ, şi a cărei suprafaţă se compune din suprafaţa laterală S conţinând feţele: σ_1 (porţiune din faţa 1 a lui Σ), având normala $\bar{n}_1 = -\bar{n}$; σ_2 (porţiune din faţa 2 a lui Σ), având normala $\bar{n}_2 = \bar{n}$; şi bazele s_1 şi s_2, cu normalele $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$, astfel încât $\bar{\nu}_1 . \bar{n} = \bar{\nu}_2 . \bar{n} = 0$. (Fig. 39).



(Fig. 39)

In aceste condiţii, integrala din membrul al doilea al formulei de definiţie (16), extinsă la suprafaţa cilindrică, ne dă

$$\operatorname{grad}_P \varphi = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} \bar{n} (\varphi_2 - \varphi_1) S$$

$$= \frac{1}{\delta\tau} \left\{ \bar{n} (\varphi_2 - \varphi_1) S + \bar{\varepsilon} \right\} ,$$

unde $\bar{\varepsilon}$ este o cătime pozitivă care tinde către zero cu $\delta\tau$, iar elementul de volum al cilindrului este $\delta\tau = S\,\delta l$, însemnând prin δl distanţa infinitesimală dintre cele două feţe σ_1 şi σ_2.

Relaţia de mai sus se scrie

$$\operatorname{grad} \varphi . \delta l = \bar{n} (\varphi_2 - \varphi_1) + \bar{\varepsilon} .$$

La limită $\delta l \to 0$, deci $\varepsilon \to 0$, membrul al doilea tinde către o cantitate finită, anume $\bar{n} (\varphi_2 - \varphi_1)$; deci şi membrul întâi va avea o limită finită, pe care o numim *gradientul superficial* al lui φ, în punctul P al suprafeţei de discontinuitate. Regăsim astfel justificată definiţia iniţială

$$\text{grad sup. } \varphi = \bar{n} (\varphi_2 - \varphi_1) ;$$

ceeace se scrie, punând în evidenţă normalele pe feţele respective,

$$\text{grad sup. } \varphi = \bar{n}_1 \varphi_1 + \bar{n}_2 \varphi_2 .$$

Este de observat că grad φ devine infinit în punctul de discontinuitate P, ceeace era de aşteptat, căci diferenţa funcţiei

rămâne finită, în timp ce variaţia infinitesimală pe direcţia normalei tinde către zero, în definiţia gradientului.

106. Consideraţii asupra câmpurilor vectoriale. In paragrafele precedente am definit noţiunea de câmp vectorial prin totalitatea valorilor luate, în domeniul dat, de un vector, funcţie regulată de poziţie.

Fie acum, în general, $\bar{a}(P)$ o funcţie regulată de poziţie (aceasta însemnează că toate componentele vectorului satisfac condiţiei enunţate).

Putem să definim, şi pentru o astfel de funcţie, derivata geometrică, prin relaţia

$$\frac{d\bar{a}}{ds} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\bar{a}(P') - \bar{a}(P)}{\delta s} \quad ,$$

unde $\overrightarrow{PP'} = \delta\bar{r} = \bar{s}\,.\,\delta s$. Insemnăm această derivată, prin analogie cu expresia întrebuinţată pentru funcţiile scalare, prin

$$\frac{d\bar{a}}{ds} = (\bar{s}\,.\,\text{grad})\,\bar{a} \quad , \tag{18}$$

de unde,

$$d\bar{a} = (d\bar{r}\,.\,\text{grad})\,\bar{a} \quad , \tag{18'}$$

ceeace se justifică scriind cele trei relaţii scalare corespunzătoare componentelor a_x, a_y, a_z ale vectorului $\bar{a}$, pe axele de coordonate.

In general, considerând un vector $\bar{b} = b\bar{s}$, putem defini cu ajutorul relaţiei (18), operaţia diferenţială

$$(\bar{b}\,.\,\text{grad})\,\bar{a} = b\,\frac{d\bar{a}}{ds} \quad , \tag{19}$$

ca fiind *derivata lui $\bar{a}$ pe direcţia lui $\bar{b}$* înmulţită cu scalarul b.

Observaţie. Dacă ţinem seamă de formulele (6) în care notăm, pentru prescurtare, cosinusurile directoare ale direcţiei $\bar{s}$ faţă de axele de coordonate prin α, β, γ, obţinem din ecuaţia (18),

$$\left(\frac{d\bar{a}}{ds}\right)^2 = \alpha^2\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial x}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial y}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ 2\beta\gamma\,\frac{\partial\bar{a}}{\partial y}\,\frac{\partial\bar{a}}{\partial x} + 2\gamma\alpha\,\frac{\partial\bar{a}}{\partial z}\,\frac{\partial\bar{a}}{\partial x} + 2\alpha\beta\,\frac{\partial\bar{a}}{\partial x}\,\frac{\partial\bar{a}}{\partial y} \quad ,$$

formă patratică omogenă de cosinusurile directoare ale direcţiei $\bar{s}$ şi de *nouă* cantităţi

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_x}{\partial y}, \frac{\partial a_x}{\partial z}, \frac{\partial a_y}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_z}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

Acest fapt dovedeşte că mărimea (18) nu posedă caracter de vector. In adevăr, valoarea absolută a unui vector este o formă patratică omogenă numai de *trei* cantităţi (componentele pe cele trei axe); în speţă, derivata geometrică a unui scalar, deci vectorul gradient, se exprimă cu ajutorul cantităţilor

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

Câtimea (18) poate să fie considerată drept componentă a unor mărimi care posedă un caracter de ordin superior mărimilor vectoriale, numite *tensori*. Acest fapt era de aşteptat, căci derivata geometrică a unui *scalar* produce un *vector* (mărime de ordin superior scalarilor); derivata geometrică a unui vector va produce o mărime „tensorială“ de ordin superior vectorului. Asupra noţiunii şi proprietăţilor generale ale tensorilor vom reveni pe larg în partea treia a acestei expuneri.

Definiţia expresiei (19) ca operator, se face printr'un proces de limită analog celui folosit pentru definiţia operatorului

$$(19') \qquad (\bar{b} \,.\, \mathrm{grad})\, \bar{a} = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} \oint_S (\bar{b}_P \,.\, d\bar{\sigma})\, \bar{a} \ ,$$

unde $\bar{b}_P$ însemnează că sub integrală se ia valoarea lui $\bar{b}$ în punctul P de pe suprafaţă, punct la care se reduce suprafaţa prin trecerea la limită.

Identitatea definiţiilor (19) şi (19') se stabileşte observând că integrarea se efectuiază pe o suprafaţă arbitrară conţinând punctul P. Fie un element de suprafaţă $d\bar{\sigma}$ în jurul punctului P; aplicăm acestui element o deplasare pe direcţia lui $\bar{b} = b\bar{u}$, anume, $\delta\bar{r} = \bar{s}\,\delta s$. Astfel, ia naştere un volum cilindric de bază $d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma$ şi înălţimea $\bar{s}\,\delta s$. Efectuăm integrala din (19') pe această suprafaţă. Elementul de volum $\delta\tau$ este egal cu $d\bar{\sigma} \,.\, \delta\bar{r}$.

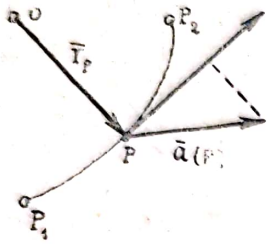
Rezultatul integrării este $b\,(a_2\, d\sigma_2 - a_1\, d\sigma_1) = b\, d\sigma\, (a_2 - a_1)$, căci, contribuţia feţei laterale este nulă şi $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2$. Aşadar,

raportul ce figurează în membrul al doilea al relaţiei (19'), devine

$$b\,\frac{\bar{a}_2-\bar{a}_1}{\delta s}\ ,$$

care, pentru $\delta s \longrightarrow 0$ tinde la $b\,\frac{d\bar{a}}{ds}$.

107. Proprietate importantă a câmpului vectorial provenit din gradientul unui câmp scalar. Câmpuri irotaţionale.



(Fig. 40)

(Fig. 40). Dacă, într'un domeniu *simplu-conex*, avem un câmp vectorial obţinut dintr'un câmp scalar, adică un câmp vectorial de gradient, definit prin $\bar{a} = \operatorname{grad}\varphi$, atunci integrala de linie a vectorului, dealungul unei curbe (C) conţinută în acest câmp, este

$$(C)\int_{P_1}^{P_2}\bar{a}\,.\,d\bar{s} = (C)\int_{P_1}^{P_2}\operatorname{grad}\varphi\,.\,d\bar{s} = (C)\int_{P_1}^{P_2}\frac{d\varphi}{ds}\,ds = \varphi(P_2)-\varphi(P_1)\ .$$

Deci, în acest caz, integrala de linie este independentă de drum; ea depinde numai de extremităţi.

Reciproc. Dacă integrala de linie

$$(C)\int_{O}^{P}\bar{a}\,.\,d\bar{s} = \varphi(P)-\varphi(O)\ ,$$

nu depinde de drum, rezultă că $\bar{a}$ derivă dintr'un gradient.

In adevăr, să luăm ca punct P, un punct oarecare pe curba (C). Să deplasăm acest punct din P în punctul infinit vecin P', astfel încât $PP' = ds$ pe curbă. Atunci, cum, conform ipotezei, funcţia de punct este definită în punctul P prin relaţia

$$\varphi(P) = \varphi(O) + \int_{O}^{P}\bar{a}\,d\bar{s}\ ; \tag{20}$$

ea este, o funcţie *uniformă* şi continuă; pentru punctul P' ea va avea valoarea

$$\varphi(P) + d\varphi = \varphi_0 + \int_{O}^{P}\bar{a}\,d\bar{s} + \int_{P}^{P'}\bar{a}\,d\bar{s}\ . \tag{21}$$

Din (20) şi (21) se vede imediat că

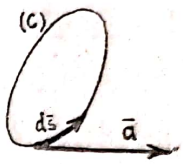
$$d\varphi = \int_P^{P'} \bar{a}\, d\bar{s} \ ,$$

Dar, P' fiind infinit vecin de P, se poate considera

$$d\varphi = \bar{a} \,.\, d\bar{s} \ ;$$

de unde rezultă că $a_s = \frac{d\varphi}{ds}$ adică, în adevăr

$$\bar{a} = \text{grad}\, \varphi \ .$$



(Fig. 41)

Dacă însă curba (C) este *închisă* (fig. 41) şi funcţia φ este *uniformă*, avem

$$C = \oint_{(C)} \bar{a}\, d\bar{s} = \oint_{(C)} \text{grad}\ \varphi \,.\, d\bar{s} = \oint_{(C)} \frac{d\varphi}{ds} ds = \oint_{(C)} d\varphi = 0 \ .$$

Teoremă. „Într'un domeniu simplu-conex, un câmp vectorial, pentru care *circulaţia* dealungul unei curbe închisă conţinută în domeniu se anulează, derivă din gradientul unei funcţii scalare *uniformă* şi continuă, posedând derivate de primul ordin finite şi continue", şi reciproc.

Numim un astfel de câmp, *câmp irotaţional* sau *câmp fără vârtejuri*. Dacă însă luăm în considerare funcţia potenţială $\psi = -\varphi$, astfel încât $\bar{a} = -\text{grad}\ \psi$, câmpul se mai numeşte *câmp de potenţial scalar*.

108. Câmpuri irotaţionale în domenii multiplu-conexe. Noţiunea de câmp irotaţional se poate extinde şi pentru domenii care prezintă o conexiune multiplă.

Să considerăm, pentru moment, cazul unui domeniu *dublu-conex*, în care vectorul de câmp (funcţie uniformă de punct) derivă din gradientul unei funcţii scalare de câmp $\varphi\,(P)$. După § 99, este posibil, cu ajutorul unei singure secţiuni, să reducem domeniul dublu-conex la unul simplu-conex, cum am exemplificat pentru *tor*. Dar atunci, funcţia φ nu va mai fi uniformă în tot domeniul, căci valorile ei pentru două puncte infinit vecine, aşezate pe membrana de secţiune, diferă între ele, după cum arătăm mai jos.

Teoremă. „Circulaţia dealungul unei curbe nereductibilă, care înconjoră o singură dată regiunea exclusă, este diferită

de zero şi este aceiaşi pentru toate curbele de acest fel şi de acelaş sens".

In adevăr, referindu-ne la figura 35, curba $ACBB'\ C'A'A$ devine, în domeniul redus, reductibilă (presupunem că ea înconjoră o singură dată regiunea exclusă). Atunci, circulaţia de-alungul acestei curbe va fi nulă. Avem, aşadar,

$$Ci\,(ACB) + Ci\,(BB') + Ci\,(B'C'A') + Ci\,(A'A) = 0\ .$$

Termenul al doilea se reduce cu ultimul, căci cele două drumuri BB' şi $A'A$ sunt egale şi de semne contrare; circulaţiile pe aceste drumuri se anulează. Pe de altă parte, $Ci\,(ACB)$ şi $Ci\,(B'C'A')$ sunt de sensuri contrare. Aşadar,

$$Ci\,(ACB) = Ci\,(A'C'B') = \varkappa\ (\text{constant})\quad ,$$

pentru toate curbele nereductibile. Numim constanta $\varkappa$, *modùlul membranei.*

Dacă o curbă nereductibilă înconjoră regiunea izolată de un număr N de ori, în acelaş sens, circulaţia va fi $N\varkappa$. Schimbând sensul pe curbă, circulaţia se poate reprezenta tot cu $N\varkappa$, dacă se convine a se lua N negativ.

In regiunile unde $\varkappa = 0$, câmpul este irotaţional, posedând o funcţie potenţială uniformă.

In cazul când conexiunea regiunii este de ordinul $n+1$, trebue să aplicăm n membrane izolante, având modùlii $\varkappa_1, \ldots \varkappa_n$. Dacă o curbă înconjoră regiunile izolate, respectiv, de $N_1, N_2, \ldots N_n$—ori, aceste numere fiind luate algebric, circulaţia pe curbă se găseşte egală cu suma circulaţiilor pe circuitele care înconjoră regiunile izolate, de $N_1, N_2, \ldots N_n$—ori : $\sum_{i=1}^{n} N_i \varkappa_i$.

Să lămurim această noţiune printr'un exemplu datorit lui J. Bertrand.

Fie $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

$$\bar{a} = -\operatorname{grad} \varphi\ ;\ \left(a_x = \frac{y}{x^2+y^2}\ ;\ a_y = -\frac{x}{x^2+y^2}\ ;\ a_z = 0\right).$$

Vectorul $\bar{a}$ este funcţie continuă, cu derivate continui în tot domeniul, cu excepţia regiunii

$$x^2 + y^2 = \varepsilon, \text{ (unde } \varepsilon \longrightarrow 0),$$

care reprezintă un cilindru de rază infinit mică $\varepsilon \longrightarrow 0$, în jurul

axei de z. Dacă origina lui $\bar{a}$ descrie o curbă închisă (C) care nu înconjură axa de z, circulaţia $\int_{(C)} \bar{a}\, d\bar{s}$ va fi nulă; căci φ reia valoarea iniţială, fiind funcţie uniformă pe această curbă. Dacă însă luăm o curbă (C') care înconjora axa de z, atunci $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ variază cu 2π, iar integrala considerată va fi egală cu 2π. In adevăr, funcţia φ este unghiul făcut de proecţia vectorului de poziţie $\bar{r}(x, y, z)$, al punctului mobil, pe planul xOy, cu axa de z. Când punctul se mişcă pe o curbă care nu înconjoră axa de z, variaţia unghiului este nulă; când însă curba înconjoră odată axa de z, variaţia unghiului este 2π.

Acest exemplu analitic poate să fie materializat printr'o imagină hidrodinamică. Să ne închipuim că într'un fluid nelimitat, se află un cilindru cu generatoarele infinite paralele axei de z şi de rază ε, cilindru în care fluidul execută o mişcare globală de rotaţie în jurul axei de z, întocmai ca un corp rigid. Dacă $\varepsilon \to 0$, această imagine defineşte un *vârtej* rectiliniu.

In tot fluidul câmpul este irotaţional; cu excepţia regiunii de vârtej. Această regiune poate să fie izolată printr'o membrană, al cărei modùl este dat de valoarea circulaţiei pe curba închisă care înconjoră regiunea rotaţională. Valoarea circulaţiei defineşte *intensitatea* sau *momentul* vârtejului. Domeniul este dublu-conex, pentru câmpul total. Prin izolarea regiunii rotaţionale (regiunea vârtejului) domeniul a fost redus la unul simplu-conex, dar funcţia de câmp devine neuniformă pentru circuitele nereductibile, după cele stabilite mai sus.

Vom vedea mai târziu că într'un câmp vectorial, dacă există o distribuţie oarecare, dată, de vârtejuri, ele determină un câmp special.

109. Introducerea coordonatelor generale. In multe probleme de Fizică, prin însăşi natura problemei şi pentru desvoltarea comodă a calculelor, se impune folosirea coordonatelor generale numite, impropriu, „curbilinii". Noţiunile introduse până acum permit formularea metodei de calcul cu aceste coordonate.

Fie trei funcţii scalare de poziţie, regulate în domeniul lor de existenţă, $u(\bar{r})$, $v(\bar{r})$, $w(\bar{r})$, *independente*. Ecuaţiile

$$(22) \qquad u(\bar{r}) = \text{constant} \; ; \; v(\bar{r}) = \text{const.} \; ; \; w(\bar{r}) = \text{const.} \; ,$$

determină trei familii uniparametrice de suprafeţe, ale căror normale sunt, în fiecare punct, paralele, respectiv, vectorilor grad u, grad v, grad w. Vom numi, pentru uşurinţa scrisului, suprafeţele (22): „suprafeţe u, v, w".

Condiţie necesară şi suficientă ca cele trei funcţii (22) să fie independente este ca determinantul

$$D = (\text{grad } u \ , \ \text{grad } v \ , \ \text{grad } w)$$

să fie diferit de zero.

In adevăr, dacă $D = 0$, se ştie din proprietăţile determinanţilor funcţionali că una din funcţii trebue să fie, la rândul ei, funcţie de celelalte două. Reciproc, dacă una din funcţiile (22) este, la rândul ei, funcţie de celelalte două

$$u = f(v, w) \quad ,$$

atunci, după regulele obicinuite de derivare,

$$\text{grad } u = \frac{\partial f}{\partial v} \text{ grad } v + \frac{\partial f}{\partial w} \text{ grad } w \quad .$$

Inmulţind scalar cu produsul vectorial [grad v , grad w], se obţine $D = 0$.

Un sistem de valori u, v, w, determină poziţia unui punct în spaţiu, dacă se cunoaşte expresia vectorului de poziţie $\bar{r} = \bar{r}(u, v, w)$ ca funcţie de acest sistem de valori. Prin aceasta, sunt complet determinate şi suprafeţele (22). Reciproca nu este adevărată. In adevăr, transformarea biunivocă, *arbitrară*,

$$u' = f_1(u) \quad , \quad v' = f_2(v) \quad , \quad w' = f_3(w) \quad ,$$

defineşte o familie de suprafeţe diferită de suprafeţele u, v, w. Dar funcţiile u', v', w, rămân constante pe *aceleaşi* suprafeţe (22). Prin urmare suprafeţele (22) nu determină numai sistemul u, v, w, ci şi sistemul u', v', w'.

Numim *coordonate generale* ale unui punct $P(\bar{r})$, un sistem de valori u, v, w. In multe tratate acestea sunt numite, impropriu, coordonate *curbilinii*.

Pentru a figura geometric coordonatele generale, să alegem în familiile uniparametrice (22), nişte şiruri

$$u_i = u_{i-1} + \alpha \ ; \ v_i = v_{i-1} + \beta \ ; \ w_i = w_{i-1} + \gamma \ ; \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

unde α, β, γ, sunt constante pozitive, infinit mici. Ducând prin

fiecare punct din spaţiu trei suprafeţe u_i, v_i, w_i, ele vor determina în tot domeniul o reţea de paralelipipede infinitesimale (în primă aproximaţie). Curbele care înfăşoară muchile paralelipipedelor corespunzătoare intersecţiilor suprafeţelor precedente, luate din două şiruri deosebite, definesc *liniile de intersecţie* a suprafeţelor respective. Ele figurează un sistem de coordonate, în fiecare punct P din spaţiu, aproximat în acest punct prin trei vectori unitari $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Acestea fiind stabilite, observăm că dacă punctul P suferă o deplasare infinitesimală $d\bar{r}$, coordonatele generale vor varia cu du, dv, dw, astfel încât

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} dw , \tag{23}$$

sau, în notaţii evidente,

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u \, du + \bar{r}'_v \, dv + \bar{r}'_w \, dw . \tag{23'}$$

Termenii din membrul al doilea exprimă, succesiv, deplasările infinitesimale ale punctului P pe tangentele la curbele de intersecţie ale suprafeţelor $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$; respectiv, $w = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ şi $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Dar, tangentele în P la curbele de intersecţie ale suprafeţelor, luate două câte două, sunt perpendiculare pe normalele acestor suprafeţe. Aşadar, vectorii care apar în membrul al doilea al relaţiei (23') vor fi paraleli cu produsele vectoriale dintre gradientele respective, în punctul P:

$$\begin{aligned} \bar{r}'_u &= \lambda \, [\text{grad } v , \text{ grad } w] , \\ \bar{r}'_v &= \mu \, [\text{grad } w , \text{ grad } u] , \\ \bar{r}'_w &= \nu \, [\text{grad } u , \text{ grad } v] . \end{aligned} \tag{24}$$

Inmulţind relaţiile precedente pe rând cu grad u, grad v, grad w şi ţinând seamă de relaţia (9), rezultă

$$1 : \lambda = 1 : \mu = 1 : \nu = (\text{grad } u , \text{ grad } v , \text{ grad } w) = D , \tag{25}$$

valoare diferită de zero, întrucât funcţiile (22) sunt independente.

Din (24) şi (25) tragem concluzia că vectorii $\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}'_w$, sunt reciproci vectorilor grad u, grad v, grad w (v. § 28). Fie

$$D' = (\bar{r}'_u , \bar{r}'_v , \bar{r}'_w) , \tag{26}$$

câtime diferită de zero, după relaţia $D\,D' = 1$, dedusă pentru

determinanţii vectorilor reciproci. Vom avea aşadar,

$$\bar{r}'_u = \frac{1}{D}\,[\text{grad } v\,,\ \text{grad } w]\ ;$$

$$\bar{r}'_v = \frac{1}{D}\,[\text{grad } w\,,\ \text{grad } u]\ ;$$

$$\bar{r}'_w = \frac{1}{D}\,[\text{grad } u\,,\ \text{grad } v]\ ;$$

(27)

$$\text{grad } u = \frac{1}{D'}\,[\bar{r}'_v\,,\ \bar{r}'_w]\ ;$$

$$\text{grad } v = \frac{1}{D'}\,[\bar{r}'_w\,,\ \bar{r}'_u]\ ;$$

$$\text{grad } w = \frac{1}{D'}\,[\bar{r}'_u\,,\ \bar{r}'_v]\ ;$$

$$D\,D' = +1\,.$$

Cum vectorii $\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}'_w$, sunt paraleli tangentelor la curbele de intersecţie, notăm vectorii unitari ai familiei cu $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$; vom avea

(28) $$\bar{r}'_u = U(u, v, w)\,\bar{u}\ ;\quad \bar{r}'_v = V(u\,.\,v\,.\,w)\,\bar{v}\ ;$$

$$\bar{r}'_w = W(u, v, w)\,\bar{w}\ ;$$

U, V, W, fiind funcţii de u, v, w.

Curbele care sunt, în fiecare punct al lor, tangente vectorilor grad u, grad v, grad w, vor fi numite „curbe u, v, w“. [1] Ele formează trei familii de *traiectorii ortogonale familiilor de suprafeţe* u, v, w (22).

Trebue observat că liniile de intersecţie a suprafeţelor (22) nu se confundă, în general, cu liniile u, v, w. In adevăr, linia u, de exemplu, este normală la suprafaţa $u =$ constant; aceasta nu însemnează, însă, că ea trebue să fie aşezată, totodată, pe suprafeţele $v =$ const. şi $w =$ const. care nu sunt în general normale suprafeţei u.

Din (28) rezultă că elementul liniar se scrie, după (23),

(29) $$ds^2 = U^2\,du^2 + V^2\,dv^2 + W^2\,dw^2 + 2\,VW\,dv\,dw +$$
$$+ 2\,WU\,dw\,du + 2\,UV\,du\,dv\ .$$

1) Spre deosebire de notaţiile curente în Geometria diferenţială.

Fie $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$, sistemul de vectori reciproci vectorilor $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Din relaţiile (28) şi (27) rezultă

$$(30) \qquad \text{grad } u = \frac{1}{U}\bar{u}' \; ; \; \text{grad } v = \frac{1}{V}\bar{v} \; ; \; \text{grad } w = \frac{1}{W}\bar{w}' \; .$$

$\bar{u}, \bar{v}', \bar{w}'$, sunt, aşadar, vectorii unitari pe direcţiile tangentelor la curbele u, v, w.

Cazul suprafeţelor ortogonale. Reamintim că două suprafeţe sunt ortogonale când normalele lor sunt perpendiculare între ele în fiecare punct al liniilor de intersecţie.

Dacă suprafeţele (22) alcătuesc trei familii de suprafeţe ortogonale între ele, liniile u, v, w, se confundă cu liniile de intersecţie. In adevăr, suprafeţele $v = \text{const.}$ şi $w = \text{const.}$ fiind ortogonale suprafeţei $u = \text{const.}$, linia de intersecţie a primelor două suprafeţe va fi perpendiculară pe suprafaţa treia, aşadar, paralelă vectorului grad u, deci se confundă cu linia u.

Avem, în acest caz, un sistem de *coordonate generale triortogonale.* Alegem vectorii unitari $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, astfel încât să formeze un triedru drept. Atunci,

$$[\bar{u}, \bar{v}] = \bar{w} \; ; \; [\bar{v}, \bar{w}] = \bar{u} \; ; \; [\bar{w}, \bar{u}] = \bar{v} \; ;$$

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 1 \; ; \; \bar{u}.\bar{v} = \bar{v}.\bar{w} = \bar{w}.\bar{u} = 0 \; .$$

Aceşti vectori sunt proprii lor reciproci. Având în vedere relaţiile (28) şi cele precedente, condiţiile de ortogonalitate se pot scrie astfel

$$(31) \qquad \bar{r}'_v . \bar{r}'_w = 0 \; ; \; \bar{r}'_w . \bar{r}'_u = 0 \; ; \; \bar{r}'_u . \bar{r}'_v = 0 \; .$$

Relaţiile (30) devin, în acest caz,

$$(30') \qquad \text{grad } u = \frac{1}{U}\bar{u} \; ; \; \text{grad } v = \frac{1}{V}\bar{v} \; ; \; \text{grad } w = \frac{1}{W}\bar{w} \; .$$

Elementul liniar se scrie, după (29), având în vedere (31)

$$(32) \qquad d\bar{r} = \bar{s} . ds = \bar{u} . U\,du + \bar{v} . V\,dv + \bar{w} . W\,dw \; ;$$

aşadar,

$$(32') \qquad ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2 \; ,$$

pentru coordonate ortogonale. Observăm, că în expresia lui ds^2 figurează numai termeni patratici în du, dv, dw; termenii dreptunghiulari fiind nuli, conform relaţiilor (31).

Din (32) rezultă că ds este lungimea diagonalei unui paralelipiped care are laturile

(33) $\bar{u}\,ds_u = \bar{u}.\,U\,du\ ;\ \bar{v}\,ds_v = \bar{v}.\,V\,dv\ ;\ \bar{w}\,ds_w = \bar{w}.\,W\,dw\ .$

Elementul de volum este, în general, egal cu

(34) $$d\tau = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})\ UVW\,du\,dv\,dw\ ,$$

iar în coordonate rectangulare,

(34') $$d\tau = U\,V\,W\,du\,dv\,dw\ .$$

Elementele de arie a feţelor paralelipipedului elementar sunt, după (33)

(35) $$ds_u\,ds_v = U\,V\,du\,dv\ ;\ ds_v\,ds_w = V\,W\,dv\,dw\ ;$$
$$ds_w\,ds_u = W\,U\,dw\,du\ .$$

110. Expresia gradientului în coordonate generale. Dacă în expresia unei funcţii de poziţie $\varphi(P)$, facem să figureze coordonatele generale, obţinem o funcţie $\varphi(u, v, w)$. După regulele derivării, formăm expresia

(36) $$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\operatorname{grad} w\ ;$$

sau, după relaţiile (30),

(37) $$\operatorname{grad}\varphi = \bar{u}'\,\frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{v}'\,\frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{w}'\,\frac{1}{W}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\ ,$$

U, V, W fiind funcţii date prin relaţiile de definiţie (20).

In cazul coordonatelor ortogonale, expresia gradientului devine

(38) $$\operatorname{grad} = \bar{u}\,\frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{v}\,\frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{w}\,\frac{1}{W}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\ .$$

Pentru multe probleme sunt indicate *coordonatele polare sferice:*

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ ;\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ;\ z = r\cos\theta\ .$$

Aşadar,

$$u = r\ ;\ v = \theta = \operatorname{arc\,sin}\frac{\rho}{r}\ ;\ w = \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\ ,$$

$$\rho = r\sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2} = |[\bar{k}, \bar{r}]|\ .$$

Suprafețele $r = \text{const.}$ sunt sfere concentrice; $\theta = \text{const.}$ sunt conuri coaxiale de unghiu 2θ; $\varphi = \text{const.}$ sunt plane meridiane de azimut φ; aşadar, un sistem triortogonal de suprafețe.

Avem, după (30'),

$$\text{grad } r = \frac{1}{U}\bar{u} = \frac{\bar{r}}{r}\ ;\ \text{grad}\,\theta = \frac{1}{V}\bar{v} = -\frac{[\bar{r},[\bar{k},\bar{r}]]}{r^2 \sin\theta}\ ;$$

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{W}\bar{w} = \frac{[\bar{k},\bar{r}[}{r^2 \sin^2\theta}\ .$$

Aşadar,

$$U = 1\ ;\ V = r\ ;\ W = r\ \sin\theta\ ,$$

căci

$$\left|[\bar{r},[\bar{k},\bar{r}]]\right| = r.\rho = r^2\ \sin\theta\ .$$

$\bar{u}$ este versorului $\bar{r}$; $\bar{v}$ este perpendicular pe $\bar{r}$ şi aşezat în planul meridian format de axa de z şi vectorul de poziţie $\bar{r}$, în sensul lui θ crescător şi $\bar{w}$ este perpendicular pe planul meridian în sensul lui ϕ crescător.

Din (34) rezultă formula cunoscută

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\ . \tag{39}$$

Din (38) urmează, pentru expresia gradientului, insemnând prin $\bar{\rho}, \bar{\mu}, \bar{\varepsilon}$, vectorii unitari ai lui $\bar{r}$; θ crescător şi φ crescător,

$$\text{grad} = \bar{\rho}\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar{\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ . \tag{40}$$

In *coordonate cilindrice*

$$x = r\cos\varphi\ ;\ y = r\sin\varphi\ ;\ z\ ,$$

elementul de arc se scrie

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2\ ;$$

astfel, încât

$$U = 1\ ,\ V = r\ ,\ W = 1\ ,$$

şi prin urmare,

$$\text{grad} = \bar{\rho}\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

Coordonate eliptice. Problema fundamentală a Electrostaticii (v. *Electromagnetismul*) constă în studiul distribuţiei electricităţii, respectiv, potenţialului, pe suprafaţa unui conductor,

precum şi cercetarea câmpului electrostatic din vecinătatea unui asemenea conductor. Se cunoaşte din Electrostatică rolul important pe care îl au conductorii de formă elipsoidală. Pentru aceştia, metoda de calcul, care se impune, constă în introducerea aşa numitelor coordonate eliptice.

Fie elipsoidul fundamental cu semiaxele $a > b > c$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 .$$

Să studiem variaţia funcţiei

$$f(\lambda)=\frac{x^2}{\lambda+a^2}+\frac{y^2}{\lambda+b^2}+\frac{z^2}{\lambda+c^2}-1 ,$$

pentru un punct dat de coordonate cartesiene x, y, z, când parametrul λ ia toate valorile reale.

Să considerăm funcţia

$$\varphi(\lambda)=(\lambda+a^2)\ (\lambda+b^2)\ (\lambda+c^2) .$$

Din Geometria analitică se ştie că, pentru orice valoare a lui λ, diferită de rădăcinile ecuaţiei $\varphi(\lambda)=0$, ecuaţia $f(\lambda)=0$ reprezintă o quadrică centrală, iar mulţimea lor constitue o familie de quadrice confocale. Secţiunile acestor quadrice cu planele de coordonate sunt secţiuni conice confocale.

Formăm tabloul de variaţie a lui $f(\lambda)$ cu λ, specificând şi natura quadricelor respective, conform cunoştinţelor curente din geometria analitică. Avem, însemnând cu u, v, w, rădăcinile, distincte, ale ecuaţiei $f(\lambda)=0$, pe care le presupunem ordonate după mărime, astfel încât

$$-a^2 < w < -b^2 < v < -c^2 < u ,$$

λ	$-\infty$		$-a^2$		w		$-b^2$		v		$-c^2$		0		u		$+\infty$
$f(\lambda)$	-1	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$				elipsoidul fundamental		elipsoid		-1
$f(\lambda)=0$			iperboloid cu două pânze				iperboloid cu o pânză				elipsoid alungit						elipsoid umflat, de formă aproape sferică

Prin fiecare punct x, y, z, din spaţiu, trec trei suprafeţe ale familiei, şi anume: un elipsoid, un iperboloid cu o pânză

şi un iperboloid cu două pânze. Numim familia de elipsoizi confocali, suprafeţe - u; familia de iperboloizi cu o pânză, suprafeţe - v; familia de iperboloizi cu două pânze, suprafeţe - w.

Putem considera parametrii u, v, w, drept un sistem de coordonate generale. In adevăr, pentru un sistem de valori ale parametrilor u, v, w, un punct din spaţiu se determină precum urmează. Se verifică uşor, prin calcul, că

$$f(\lambda)\varphi(\lambda) = -(\lambda - u)(\lambda - v)(\lambda - w).$$

Făcând în această identitate $\lambda = -a^2, -b^2, -c^2$, succesiv, se obţine

$$x^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad y^2 = \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)};$$

de unde rezultă afirmaţia iniţială, după care, pentru fiecare sistem de valori u, v, w, se capătă un punct (x, y, z), dacă facem abstracţie de punctele simetrice faţă de planele de coordonate, sistemul algebric precedent definind, în realitate, opt puncte simetrice faţă de planele de coordonate. Această nedeterminare, neesenţială, se poate uşor ridica luându-se, în locul lui u, v, w, parametrii

$$q_1^2 = a^2 + u \quad ; \quad q_2^2 = b^2 + v \quad ; \quad q_3^2 = c^2 + w.$$

Numim parametrii u, v, w, (resp. q_1, q_2, q_3), *coordonate eliptice.*

Suprafeţele u, v, w, sunt ortogonale între ele. In adevăr, să formăm, pentru a fixa ideile, produsul

$$\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = \frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)} + \frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)} + \frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}$$

$$= \frac{a^2+w}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} + \frac{b^2+w}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} + \frac{c^2+w}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} = 0,$$

cantitate identic nulă, după cum se poate verifica printr'un calcul simplu. In mod analog se obţine, $\bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_w = 0$, $\bar{r}'_w \cdot \bar{r}'_u = 0$, ceeace verifică amintita proprietate de ortogonalitate (31).

Derivând ecuaţia $f(u) = 0$ în raport cu u, obţinem

$$-f'(u) = \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}.$$

Derivând apoi relația care dă produsul $f(\lambda) \cdot \varphi(\lambda)$ în raport cu λ, deducem

$$-f'(\lambda)\varphi(\lambda) - f(\lambda)\varphi'(\lambda) = (\lambda - u)(\lambda - v) + (\lambda - v)(\lambda - w) + (\lambda - w)(\lambda - u) ;$$

de unde rezultă

$$-f'(u) = \frac{(u-v)(u-w)}{\varphi(u)} ,$$

și în mod analog, prin permutări circulare,

$$-f'(v) = \frac{(v-w)(v-u)}{\varphi(v)} \quad ; \quad -f'(w) = \frac{(w-u)(w-v)}{\varphi(w)} .$$

Derivând ecuația $f(u) = 0$, în raport cu x, se obține

$$f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2x}{a^2+u} = 0 ,$$

și, în mod analog, prin derivare în raport cu y și z, se deduce,

$$\operatorname{grad} u = \left\{ -\frac{2x}{(a^2+u)f'(u)}, -\frac{2y}{(b^2+u)f'(u)}, -\frac{2z}{(c^2+u)f'(u)} \right\},$$

și analog pentru grad v, grad w, înlocuind u prin v resp. w.

Din valoarea precedentă, deducem

$$(\operatorname{grad} u)^2 = \frac{4}{f'^2(u)} \left\{ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right\} = -\frac{4}{f'(u)} .$$

Observând că, după (30)', $U^2 = 1 : \operatorname{grad}^2 u$, etc., deducem

$$U^2 = \frac{(u-v)(u-w)}{4\varphi(u)} \quad ; \quad V^2 = \frac{(v-w)(v-u)}{4\varphi(v)} \quad ; \quad W^2 = \frac{(w-u)(w-v)}{4\varphi(w)} ;$$

astfel încât, după (32)', putem scrie expresia elementului liniar

$$4\,ds^2 = \frac{(u-v)(u-w)}{\varphi(u)}du^2 + \frac{(v-w)(v-u)}{\varphi(v)}dv^2 + \frac{(w-u)(w-v)}{\varphi(w)}dw^2 .$$

Pentru elementul de volum rezultă valoarea

$$d\tau = \frac{(u-v)(v-w)(w-u)}{8\sqrt{-\varphi(u)\varphi(v)\varphi(w)}} .$$

Este, uneori, comod să se facă transformarea de coordonate

$$d\xi = \frac{du}{\pm 2\sqrt{\varphi(u)}} \quad ; \quad d\eta = \frac{dv}{\pm 2\sqrt{-\varphi(v)}} \quad ; \quad d\zeta = \frac{dw}{\pm 2\sqrt{\varphi(w)}} ,$$

sistem, care integrat ne dă

$$\xi=\frac{1}{2}\int_{u}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}\ ;\ \eta=\frac{1}{2}\int_{-b^2}^{v}\frac{d\lambda}{\sqrt{-\varphi(\lambda)}}\ ;\ \zeta=\frac{1}{2}\int_{-c^2}^{w}\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}\ .$$

111. Imagina fizică a câmpului vectorial cu „izvoare". In multe capitole ale Fizicii, noţiunea de *câmp* joacă un rol deosebit de însemnat. Aceste capitole constituesc ceace se numeşte *Fizica câmpului*, din care fac parte, de exemplu, Electrodinamica, Hidrodinamica, Conductibilitatea termică, Optica, etc.

In publicaţia noastră anterioară *„Electromagnetismul"* (Academia Română, 1940), am studiat câmpurile electromagnetice. Pentru varietate, vom alege acum ca model fizic, câmpurile hidrodinamice.

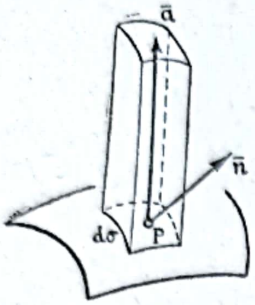
Ne închipuim că un domeniu continuu închis, sau nu, este plin dens cu un fluid incompresibil, (sau, în general, *materie, substanţă*) ale cărui particule constitutive execută mişcări în interiorul domeniului considerat. Mişcarea unei astfel de particule să fie caracterizată prin vectorul de viteză: funcţia de câmp $\bar{a}\,(P)$, continuă şi finită, posedând derivate finite şi continue. Incompresibilitatea fluidului implică condiţia: printr'o suprafaţă închisă, interioară domeniului, iese aceiaşi cantitate de fluid câtă a intrat; sub ipoteza, că nu există regiuni, interioare suprafeţei, unde să se creeze fluid *(izvoare pozitive)* sau să se piardă fluid *(izvoare negative)*. Este plauzibil să ne aşteptăm că procesul de creare sau pierdere de fluid va fi evidenţiat matematic prin *variaţia* vectorului de câmp. Aşadar, existenţa izvoarelor va fi marcată matematic printr'o funcţie de derivatele vectorului de câmp $\bar{a}\,(x, y, z)$.

Să căutăm funcţiile de stare ale fenomenului.

Fie o suprafaţă Σ închisă, care înconjoară un domeniu (D) şi fie un element superficial $d\bar{\sigma}=\bar{n}.d\sigma$, al acestei suprafeţe, în vecinătatea punctului P. Fie $\bar{a}\,(P)$ funcţia câmpului, continuă şi finită în interior şi pe contur, posedând derivate finite şi continue în interiorul domeniului, funcţie, care să reprezinte *viteza* particulei din P, adică, drumul străbătut de particulă în unitatea de timp. In aceste condiţii, produsul scalar $\bar{n}.d\sigma.\bar{a}$ exprimă volumul cilindrului oblic cu baza $d\sigma$ şi înălţimea $\bar{n}.\bar{a}$

(fig. 42). Aşadar, această câtime va măsura (presupunând că densitatea fluidului este egală cu unitatea) cantitatea de fluid transportat prin elementul de suprafaţă de către vectorul $\bar{a}$, în unitatea de timp. Prin urmare, prin întreaga suprafaţă, va trece cantitatea

$$\int_{\Sigma} \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma} \, ,$$



(Fig. 42)

pe care o numim *fluxul* vectorului de câmp $\bar{a}\,(P)$ prin suprafaţa Σ.

Dacă, însă, densitatea fluidului este diferită de unitate (vom defini mai târziu riguros această noţiune) şi este dată de funcţia de poziţie $\rho\,(P)$, cantitatea de fluid transportat prin elementul de suprafaţă de către vectorul *viteză*, pe care să-l însemnăm cu $\bar{v}$, este, în unitatea de timp, $\bar{n} \, . \, \rho \, \bar{v} \, . \, d\sigma$; astfel în cât, putem să considerăm drept vector de câmp, vectorul $\bar{a} = \rho \, \bar{v}$. Ne mărginim, pentru moment la cazul $\rho = 1$.

Când în interiorul suprafeţei închise Σ nu se pierde şi nu se creiază fluid, prin suprafaţă ieşind aceiaşi cantitate (pozitivă) câtă cantitate intră (negativă), fluxul total va fi nul. Ne aşteptăm, aşadar, ca fluxul (dacă e diferit de zero) să fie în strânsă dependenţă de funcţia de stare care descrie fenomenul de *variaţie* a cantităţii de fluid în interiorul suprafeţei; prin urmare, fluxul va fi funcţie de derivatele parţiale ale vectorului de câmp $\bar{a}\,(P)$.

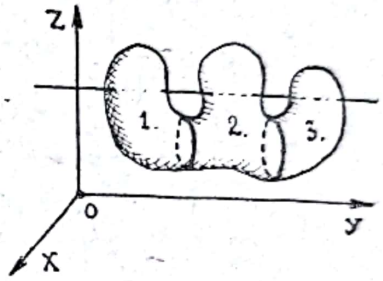
O astfel de dependenţă există în adevăr şi se exprimă printr'o relaţie analitică de mare importanţă atât în Fizică cât şi în Matematică, pe care o stabilim în paragraful următor.

112. Formula lui Gauss. Presupunem că avem o suprafaţă închisă Σ, fără puncte singulare, în interiorul unui domeniu simplu-conex, *de structură normală*. (v. O. D. Kellogg, Potential Theory, p. 85).

O regiune se zice „de structură *normală*", dacă se poate însera în ea un „poliedru" convex a cărui suprafaţă Σ constă dintr'un număr finit de suprafeţe plane şi o porţiune de suprafaţă curbă (S), astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiţii: 1. proiecţia (S') a lui (S) pe oricare din planele de coordonate să fie mărginită de o curbă închisă alcătuită dintr'un nu-

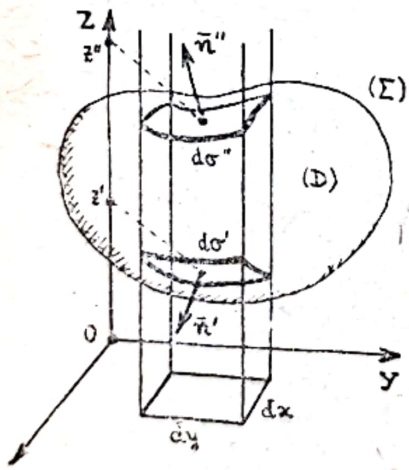
măr finit de arce, cu tangente care variază în mod continuu proiecţiile tuturor feţelor lui Σ să despartă planele de coordonate într'un număr finit de regiuni mărginite de curbe închise; 2. orice paralelă la una din axele de coordonate să întâlnească suprafaţa totală Σ numai în două puncte; 3. dacă ecuaţia suprafeţei (S) se pune sub forma $z = f(x, y)$, funcţia din membrul al doilea trebue să fie continuă şi uniformă, posedând derivate parţiale continue şi uniforme în (S').

Dacă însă condiţia (2) nu este satisfăcută, ci suprafaţa totală ar avea o formă cum este, de exemplu, cea desenată în fig. 43, vom presupune că o putem reduce la un număr finit de suprafeţe care să satisfacă la condiţia 2-a prin secţiuni cum sunt secţiunile 1, 2, 3 indicate pe figură. Contribuţia suprafeţelor intermediare de secţiune la valoarea fluxului total va fi, în adevăr, nulă, căci valorile parţiale datorite suprafeţelor de secţiune sunt, două câte două egale şi de semne contrare pe fiecare din feţele contingente ale secţiunilor, astfel încât, prin sumare, ele se elimină din valoarea totală a fluxului.



(Fig. 43)

In cazurile curente, care se prezintă, domeniile de existenţă a funcţiilor de stare pot să fie reduse la domenii de structură normală.



(Fig. 44)

Aşa fiind, să introducem un sistem de coordonate tridreptunghiular xyz. Un cilindru de baza dx, dz cu muchiile perpendiculare pe planul x, z va tăia în suprafaţa care închide volumul D, (fig. 44) două elemente superficiale $d\sigma'$ şi $d\sigma''$, astfel încât, elementul $d\sigma'$ să fie cu concavitatea spre axa de y şi normala $\bar{n}'$ la $d\sigma'$ să facă un unghiu obtuz cu axa de z; iar $d\sigma''$ cu convexitatea spre axa de z, aşa încât normala $\bar{n}''$ să facă un unghiu ascuţit cu axa z. Avem atunci, alegând pe $\bar{n}'$ şi $\bar{n}''$ ca să fie normalele *exterioare*, respective:

$$dx.dy = -d\sigma'.\cos(\bar{n}', \bar{z}) = +d\sigma''.\cos(\bar{n}'', \bar{z}).$$

Fie $\bar{a}$ un vector, funcţie de poziţie, regulată, în domeniul considerat *(finită şi continuă, cu derivate continui şi finite în interiorul lui D, iar pe suprafaţa de frontieră funcţia să fie finită şi continuă cu derivate finite)*. Fie z' şi z'' coordonatele z ale punctelor de aplicaţie a normalelor $\bar{n}'$ şi $\bar{n}''$, pe acelaş (x, y). Să considerăm integrala

$$dx\,dy\int_{z'}^{z''}\frac{\partial a_z}{\partial z}\,dz = dx\,dy\,|\,a_z\,|_{z'}^{z''} = (a''_z - a'_z)\,dx\,dy$$

$$= a'_z\,d\sigma'\cos(\bar{n}', \bar{z}) + a''_z\,d\sigma''\cos(\bar{n}'', \bar{z}).$$

Să sumăm pentru toţi cilindrii de secţiune, adică pe întreaga suprafaţă cuprinzând volumul D; vom avea:

$$\int_{(D)}\frac{\partial a_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \int_{(\Sigma)} a_z\cos(\bar{n}, \bar{z})\,d\sigma\ .$$

In mod analog

$$\int_{(D)}\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \int_{(\Sigma)} a_x\cos(\bar{n}, \bar{x})\,d\sigma$$

şi

$$\int_{(D)}\frac{\partial a_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \int_{(\Sigma)} a_y\cos(\bar{n}, \bar{y})\,d\sigma\ .$$

Adunând aceste trei egalităţi obţinem relaţia căutată:

$$\text{(I)}\qquad \int_{(\text{volumul } D)}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)d\tau = \oint_{(\text{suprafaţa închisă } \Sigma)} a_n\,.\,d\sigma$$

cunoscută sub numele de *„formula lui* GAUSS". Normala $\bar{n}$ la suprafaţa ce închide volumul este *normala exterioară.*

Relaţia (I) sună: *integrala divergenţei unui câmp vectorial extinsă asupra unei regiuni normale din spaţiu, este egală cu integrala proiecţiei vectorului de câmp pe direcţia normalei* **exterioare** *la suprafaţa asupra căreia este extinsă integrala din membrul al doilea, anume suprafaţa închisă care cuprinde regiunea de volum considerată, din spaţiu.* [1])

1) Asupra posibilităţii de extindere a formulei lui GAUSS se poate consulta Tratatul citat al d-lui KELLOGG, pag. 113.

Trebue reţinut că în formula (I) am considerat normala *exterioară* suprafeţei Σ; dacă se ia normala *interioară*, trebue pus semnul minus în membrul al doilea al formulei.

Importanţa matematică a formulei lui GAUSS rezidă în faptul că ea stabileşte o relaţie de transformare a unei integrale de volum (triplă) într'o integrală de suprafaţă (dublă).

Formula (I) este adevărată şi pentru o funcţie $\bar{a}(P)$ *multiformă*, cu condiţia ca domeniul să fie simplu-conex. In adevăr, în demonstrarea acestei relaţii nu s'a făcut restricţia de uniformitate a funcţiei $\bar{a}(P)$.

Dacă se prezintă, însă, cazul unui *domeniu multiplu-conex*, trebue ca, prin tăeturi adecvate, să-l reducem la un domeniu simplu-conex, având grijă să înglobăm în suprafaţa totală, asupra căreia se extinde integrala din membrul al doilea, şi suprafeţele membranelor de secţiune.

Dacă în domeniul considerat există regiuni de discontinuitate pentru funcţia $\bar{a}(P)$ sau derivatele ei, ele trebuesc excluse prin izolare: de pildă, le înconjorăm cu membrane izolante; dar atunci va trebui să înglobăm în suprafaţa totală şi suprafeţele acestor membrane.

Aceste cazuri se vor prezenta în cursul desvoltării, după cum vom vedea.

113. „Divergenţa" funcţiei vectoriale $\bar{a}(\bar{r})$. Expresia care figurează ca integrand în membrul întâi al relaţiei (I), se numeşte *divergenţă*. In coordonatele cartesiene, ea are, prin definiţie, forma

$$\text{(41)} \qquad \operatorname{div} \bar{a}(P) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \ ,$$

şi este o funcţie continuă în fiecare punct al domeniului. In imaginea hidrodinamică, divergenţa funcţiei vectoriale de câmp măsoară *randamentul specific* al izvoarelor închise în volumul D, adică, fluxul raportat la unitatea de volum.

Folosind notaţia (22), formula lui GAUSS se scrie

$$\text{(I)} \qquad \int_D \operatorname{div} \bar{a}\, d\tau = \oint_\Sigma \bar{a} \,.\, d\bar{\sigma} \ ,$$

normala $\bar{n}$ având sensul pozitiv spre *exteriorul* suprafeţei închise Σ, după cum am admis în paragraful precedent.

114. Operatorul (grad. $\bar{a}$) se defineşte prin relaţia

$$(42) \qquad (\text{grad. } \bar{a}) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \oint_S \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma} \quad ,$$

unde membrul întâi exprimă simbolic produsul scalar dintre operatorul vectorial „grad" şi vectorul $\bar{a}$; iar integrala din membrul al doilea se extinde asupra suprafeţei închise S, care înconjoară domeniul simplu-conex τ, în care funcţia vectorială $\bar{a}(P)$ este regulată.

Printr'un raţionament analog celui folosit în definiţia gradientului, se demonstrează că limita care figurează în membrul al doilea al expresiei (42) există şi este independentă de forma suprafeţei. La limită, volumul τ reducându-se la un punct dat P, se obţine valoarea operatorului din membrul întâi, în punctul P. Membrul al doilea tinde în mod continuu către valoarea sa în P; la fel şi membrul întâi, care este presupus funcţie continuă.

Aplicând formula (I) unui domeniu infinitesimal τ, care înconjoară un punct P, împărţind cu τ şi trecând la limită, obţinem

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_\tau \text{div } \bar{a} \; d\tau = (\text{div } \bar{a})_P = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \oint_S \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma} \quad .$$

Comparând această relaţie cu definiţia (42), rezultă

$$(43) \qquad \text{div } \bar{a} = (\text{grad. } \bar{a}) \quad .$$

Divergenţa într'un punct dat P, poate să fie, aşadar, definită prin operaţia

$$(44) \qquad \text{div } \bar{a} = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} \oint_S \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma} \quad ,$$

indiferent care ar fi forma suprafeţei S ce limitează domeniul considerat, în vecinătatea punctului P.

Definiţia (44) prezintă avantajul că pune în evidenţă independenţa expresiei „divergenţă" de sistemul particular al axelor de coordonate ales. Aşadar, divergenţa unui vector, funcţie de poziţie, este un *invariant* faţă de transformările axelor de coordonate. De altfel, această proprietate reese şi din formularea (43), printr'un produs scalar.

Operatorul „div" permite construirea unui câmp scalar

subordonat unui câmp vectorial dat, aşa după cum operatorul „grad" face posibilă construirea unui câmp vectorial subordonat unui câmp scalar dat.

Definiţia (44) pune în evidenţă proprietatea: *într'un câmp* $\bar{a}(P)$ *fără izvoare div* $\bar{a}$ *este nulă* în fiecare punct al câmpului. In adevăr, printr'o suprafaţă arbitrară, închisă, luată într'un astfel de câmp, fluxul vectorului $\bar{a}(P)$ este identic nul. Numim aceste câmpuri, *câmpuri solenoidale.*

115. Divergenţa superficială. Presupunem că există suprafeţe de discontinuitate pentru vectorul de câmp $\bar{a}(P)$, în sensul precizat în § 105, astfel în cât vectorul de câmp să ia două valori distincte $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$ pe cele două feţe ale unei astfel de suprafeţe. Insemnăm cu $\bar{n}$ normala la suprafaţa de discontinuitate în punctul P, dela faţa 1 *spre* faţa 2.

Procedând ca şi în cazul gradientului superficial, putem defini *divergenţa superficială* ca limită finită a expresiei $\delta l \,.\, \text{div}\, \bar{a}$, când $\delta l \to 0$. Avem

$$\bar{n} \,.\, (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) = \text{div sup}\, \bar{a} \quad , \tag{45}$$

sau, punând în evidenţă normalele pe cele două feţe,

$$\bar{a}_1 \,.\, \bar{n}_1 + \bar{a}_2 \,.\, \bar{n}_2 = \text{div sup}\, \bar{a} \quad . \tag{45'}$$

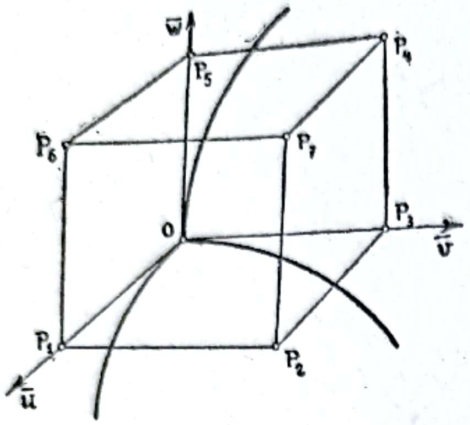
In punctul de discontinuitate P divergenţa vectorului de câmp devine infinită; ceeace este evident, deoarece derivatele parţiale ale componentelor vectorului $\bar{a}$ devin infinite în P (variaţia funcţiei este finită, pe când variaţia variabilei independente tinde către zero).

Divergenţa superficială este, prin urmare, un scalar, care reprezintă *discontinuitatea normală* a vectorului de câmp în fiecare punct al unei suprafeţe de discontinuitate. Dacă divergenţa superficială este nulă, componenta normală a câmpului trece continuu prin suprafaţa de discontinuitate.

Această noţiune joacă un rol însemnat cu deosebire în câmpurile electrostatice (v. *Electromagnetismul*).

116. Divergenţa în coordonate generale. Fie, în punctul O, un sistem de coordonate generale, ortogonale, în sensul

definit la § 109; vectorii unitari fiind $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (fig. 45). Să apreciem fluxul vectorului de câmp $\bar{a}(u, v, w)$ prin feţele paralelipipedului $O P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$.



(Fig. 45)

Faţa $O P_1 P_2 P_3$ este aşezată în planul tangent în O la suprafaţa $w = \text{const.}$ Prin această faţă intră fluxul (v. formulele (35))

$$(46) \qquad \begin{aligned} &\bar{a} \,.\, [\bar{u}, \bar{v}]\, U\, V\, du\, dv = \\ &= \bar{a} \,.\, \bar{w}\, U\, V\, du\, dv = \\ &= a_w\, U\, V\, du\, dv \,. \end{aligned}$$

Prin faţa opusă $P_4 P_5 P_6 P_7$ iese fluxul

$$(47) \qquad \left\{ a_w\, U\, V + \frac{\partial}{\partial w} (a_w\, U\, V)\, dw \right\} du\, dv \,.$$

Expresiile corespunzătoare pentru celelalte feţe se pot scrie prin permutări circulare.

Diferenţa dintre cantitatea de flux total ieşit şi cel intrat, reprezintă contribuţia izvoarelor aflătoare în volumul închis în paralelipipedul considerat, la valoarea divergenţei în acest volum infinitesimal. Reducând această valoare la unitatea de volum, vom obţine expresia divergenţei în punctul O către care facem să tindă, la limită, după consideraţiile de la § 114, volumul considerat.

Scădem aşadar, din (47), expresia (46) şi formăm expresiile analoage prin permutări circulare; împărţim apoi rezultatul prin volumul paralelipipedului, care este egal, după § 109, cu

$$U\, V\, W\, du\, dv\, dw \,;$$

obţinem astfel

$$(48) \qquad \begin{aligned} div\, \bar{a}(u, v, w) = \frac{1}{U\, V\, W} \Big\{ &\frac{\partial}{\partial u} (V\, W\, a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (W\, U\, a_v) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial w} (U\, V\, a_w) \Big\} \,. \end{aligned}$$

In *coordonate sferice polare*, introducem valorile $U = 1$, $V = r$, $W = r \sin \theta$, după § 109. Obţinem

$$\begin{aligned} div\, \bar{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \Big\{ &\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta\, a_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta\, a_\theta) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r\, a_\varphi) \Big\} \,, \end{aligned}$$

ceeace se mai poate scrie

$$(49)\quad \operatorname{div}\bar{a}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\theta)+$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\,.$$

In *coordonate cilindrice*, se obţine imediat (v. § 109),

$$\operatorname{div}\bar{a}(r,\varphi,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}(r\,a_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\,.$$

In *coordonate generale oarecare*, elementul de volum şi elementele de arie ale feţelor paralelipipedului se înmulţesc cu determinantul $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=\tau$. Apoi, în expresia (46) şi analoagele ei, apar produsele $(\bar{u},\bar{v})=\bar{w}'$, etc. şi prin urmare, fluxul elementar prin faţa $OP_1P_2P_3$ va fi $\bar{a}\,.\,\bar{w}'\,\tau\,UV\,du\,dv$, după § 109. In definitiv, se obţine, în coordonate generale oarecare,

$$(50)\quad \operatorname{div}\bar{a}(u,v,w)=\frac{1}{\tau UVW}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\tau VW a_u)+\frac{\partial}{\partial v}(\tau WU a_v)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}(\tau UV a_w)\right\},$$

expresie, care diferă de (48) numai prin apariţia determinantului $\tau\neq 0$.

Această formulă implică existenţa şi continuitatea derivatelor de primul ordin ale funcţiei vectoriale $\bar{a}$ (ceea ce am presupus de la început). Mai mult, este necesară existenţa şi continuitatea derivatelor funcţiilor U,V,W, — ceeace admitem.

117. Formulele lui Green.

a) In cazul particular, când câmpul vectorial este datorit unui scalar, $\bar{a}=\operatorname{grad}\varphi$, obţinem

$$\operatorname{div}\bar{a}=(\operatorname{grad}.\bar{a})=(\operatorname{grad}.\operatorname{grad}\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi\,,$$

iar formula (I) devine:

$$(51)\qquad \int_{(V)}\Delta\varphi\,.\,d\tau=\int_{(S)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma\ \text{(Gauss)}.$$

Vom reține formula : $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$,
unde Δ este operatorul lui LAPLACE.

b) Dacă $\bar{A} = \psi\bar{a}$, unde ψ este o funcție scalară derivabilă, iar $\bar{a}$ o funcție vectorială de poziție derivabilă, avem

$$\operatorname{div}\bar{A} = \psi.\operatorname{div}\bar{a} + \frac{\partial\psi}{\partial x}a_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}a_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}a_z ,$$

sau

$$\operatorname{div}(\psi\bar{a}) = \psi\operatorname{div}\bar{a} + (\operatorname{grad}\psi.\bar{a}) . \tag{52}$$

Să admitem că funcțiile φ și ψ sunt continue, finite și diferențiabile de două ori într'un domeniu simplu-conex, închis de suprafața S, iar pe suprafața de frontieră funcțiile și derivatele lor de primul ordin sunt finite, putând prezenta discontinuități.

In aceste condiții, formula lui GAUSS (I) devine :

$$\int_{(V)}\{\psi.\operatorname{div}\bar{a} + (\operatorname{grad}\psi.\bar{a})\}\,d\tau = \oint_{(S)}\psi a_n\,d\sigma . \tag{53}$$

c) Dacă facem și $\bar{a} = \operatorname{grad}\varphi$, atunci relația lui GAUSS devine

$$\int_{(V)}\{\psi\Delta\varphi + (\operatorname{grad}\psi.\operatorname{grad}\varphi)\}\,d\tau = \int_{(S)}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma , \tag{54}$$

sau, dacă schimbăm φ cu ψ :

$$\int_{(V)}\{\varphi\Delta\psi + (\operatorname{grad}\varphi.\operatorname{grad}\psi)\}\,d\tau = \int_{(S)}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma \tag{55}$$

și scăzând (55) din (54),

$$\int_{(V)}(\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi).\,d\tau = \oint_{(S)}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\cdot d\sigma \tag{56}$$

formule cunoscute sub numele de *„formulele lui* GREEN".

Observație. Am scris mai sus expresia operatorului lui LAPLACE în coordonate cartesiene. După desvoltările din § 109, este ușor de scris acest operator în coordonate generale, servindu-ne de definiția (43) a divergenței.

In adevăr, ținând seamă de componentele vectorului gradient, după relația (38), în coordonate ortogonale, și înlocuind

în expresia (48), obținem

$$(57)\quad \text{div grad} = \Delta = \frac{1}{UVW}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial}{\partial v}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}.$$

Prin aceleași considerații ca în § 116, laplaceianul în coordonate generale neortogonale se deduce din expresia precedentă prin adăogarea factorului τ, ca și în formula (50). Vom constata mai târziu (Calculul tensorial) că laplaceianul este, de fapt, parametrul de ordinul al doilea al lui Beltrami.

In coordonate sferice (r, θ, φ) se deduce din (49),

$$(58)\quad \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

In coordonate cilindrice (r, φ, z) obținem din (49′),

$$(58')\quad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

118. Completarea imaginii unui câmp cu izvoare. Să considerăm o curbă închisă în câmpul vectorului $\bar{a}(P)$. Prin fiecare punct al acestei curbe să ducem liniile de câmp; ele vor alcătui un *tub de linii*, caracterizat prin proprietatea esențială: dacă nu există izvoare în tub, fluxul printr'o secțiune oarecare a tubului este constant și independent de forma tubului. In adevăr, să considerăm două secțiuni S_1 și S_2 făcute în tub. Fie S' suprafața laterală a porțiunii de tub limitată de secțiuni. Prin definiția tubului, normalele la suprafața laterală sunt perpendiculare pe liniile de câmp, deci, pe vectorul de câmp $\bar{a}$. Să aplicăm suprafeței închisă formată din S_1+S_2+S' formula lui Gauss, scriind că fluxul total prin această suprafață este nul (din cauza lipsei de izvoare în interiorul tubului). Avem

$$\int_{S_1}\bar{a}\,.\,d\bar{\sigma} = \int_{S_2}\bar{a}\,.\,d\bar{\sigma} = \text{constant}.$$

căci normalele la S_1 spre exterior sunt de sens contrar normalelor exterioare la S_2, iar normalele lui S' sunt perpendi-

culare pe $\bar{a}$. Relaţia precedentă demonstrează proprietatea enunţată :

$$I = \int_{S_1} \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma} = \int_{S_2} \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma} = \text{constant.} \tag{59}$$

Cătimea I este *intensitatea* tubului de linii. Dacă alegem această cantitate, pentru o curbă determinată, drept unitate de măsură a intensităţilor, tubul se numeşte *unitar*.

Fizicienii folosesc de preferinţă următoarea imagină. Ei descompun întreg câmpul în tuburi unitare. Numărul de tuburi unitare ce pornesc de pe unitatea de suprafaţă este, prin urmare, proporţional cu valoarea vectorului de câmp, în regiunea considerată. Cu cât se iau tuburi unitare mai subţiri, cu atât mai precis va fi redată valoarea vectorului de câmp prin *densitatea* tuburilor din regiunea considerată. Aşadar, în regiunile unde valoarea vectorului de câmp este mai mare, densitatea tuburilor va fi mai mare. Se obicinueşte ca în loc să spună „numărul tuburilor unitare“ să se spună „numărul liniilor de câmp“ (denumire întrodusă de FARADAY), ca şi cum un tub unitar ar consta dintr'o singură linie. Această noţiune este mult folosită în Fizica experimentală şi teoretică (v. *Electromagnetismul*), cu toată insuficienţa rigurozităţii matematice.

Proprietate. Intr'un câmp solenoidal liniile de câmp nu se pot întrerupe : ele se prelungesc până la infinit, sau sunt linii închise.

In adevăr, dacă liniile de câmp s'ar termina într'o regiune a câmpului, înconjorând această regiune cu o suprafaţă închisă Σ, fluxul prin această suprafaţă ar fi diferit de zero (şi anume, negativ, căci prin Σ ar intra fluid fără ca să iasă) ; atunci, divergenţa ar fi diferită de zero în această regiune, ceeace este în contrazicere cu caracterul solenoidal al câmpului.

Trebue de observat însă, că nu este adevărat totdeauna că liniile de câmp cuprinse în regiuni închise trebue să fie numai de cât curbe închise. Se pot construi, în adevăr, tuburi de linii de aşa formă în cât o linie să nu revină exact în punctul de plecare, ci să treacă de o infinitate de ori prin vecinătatea infinitesimală a punctului de plecare. (v. H. A. LORENTZ, Enz. der math. Wiss. vol. 5, II, p. 120).

In cazurile curente ale problemelor fizice proprietatea enunţată este exact satisfăcută.

Dacă însă câmpul vectorial este un *câmp de izvoare*, fluxul printr'un tub infinitesimal subţire are intensitatea

$$\bar{a} \cdot \bar{n} \; d\sigma = a \; d\sigma \cos(\bar{a}, \bar{n}) \; ,$$

care depinde de secţiunea normală în tub, variabilă de la punct la punct. Pe de altă parte, în câmpurile cu izvoare fluxul nu este constant. Aşadar, dacă vrem să măsurăm, şi în acest caz, valoarea câmpului prin numărul liniilor de câmp, va trebui să admitem că în regiunile unde există izvoare pozitive iau naştere linii de câmp (fluxul este mai mare), iar în regiunile unde există izvoare negative se pierd linii de câmp (fluxul se micşorează).

Suprafeţele care se bucură de proprietatea că, în fiecare punct al lor, fluxul este nul, se numesc *suprafeţe de curent.*

Fie

$$\varphi(x, y, z) = \text{constant},$$

o suprafaţă de curent şi $\bar{a}(x, y, z)$ vectorul de câmp. Cum fluxul prin suprafaţă este nul, trebue să avem

$$\bar{a} \cdot \text{grad}\, \varphi = 0 \; , \tag{60}$$

relaţie, care constitue ecuaţia cu derivate parţiale, liniară, a suprafeţelor de curent. Ea posedă o infinitate de suprafeţe integrale.

Liniile de câmp, care trec prin punctele unei curbe oarecare, formează o suprafaţă de curent; două suprafeţe de curent se taie după o linie de câmp. Printr'o linie de câmp se poate duce o infinitate de suprafeţe de curent.

119. Funcţii de poziţie şi de timp. Derivata substanţială. Adeseori, funcţia de stare, scalară sau vectorială, a unui fenomen fizic, depinde nu numai de coordonatele punctului curent, ci şi de timp.

Fie, aşadar,

$$\varphi(\bar{r}, t) \quad ; \quad \bar{a}(\bar{r}, t) \; ,$$

funcţii regulate de poziţie şi continue faţă de parametrul t (timp), admiţând derivate finite, funcţii, care pentru $t = t_0$ (constant) devin cunoscutele funcţii de poziţie studiate până acum.

Variația totală a unei astfel de funcții se compune din variația *locală* (pentru $\bar{r} = \text{const.}$), care este $\frac{\partial}{\partial t}\delta t$ și din variația *staționară* (pentru $t = \text{const.}$), care este, după § 104,

$$\delta = (\delta\bar{r} \,.\, \text{grad}) \,.$$

Așadar, în general, variația totală poate să fie însemnată prin simbolul

$$d = \partial + (\delta\bar{r} \,.\, \text{grad}) \,; \tag{61}$$

ea e numită și *variație substanțială*. Să facem notația

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} \,,$$

vector, care reprezintă *viteza* punctului $P(\bar{r})$. (vezi *Mecanica*, p. 12).

1. *Funcții scalare. Derivata substanțială* a unei funcții scalare de poziție și timp, se notează prin simbolul D; ea este dată, după relația (61), trecând de la variația finită la derivată, de expresia

$$\frac{D}{Dt}\varphi(\bar{r}, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\bar{v} \,.\, \text{grad}\,\varphi) \,. \tag{62}$$

In unele probleme întâlnim expresii *integrale* din funcții de câmp care depind de poziție și de timp.

Fie integrala de volum

$$\mathcal{J} = \int_V \varphi(P, t)\, d\tau \,, \tag{63}$$

extinsă asupra unui domeniu simplu-conex, care nu depinde de timp. Să calculăm variația integralei (63), datorită unei deformări continue, independentă de timp, a volumului V.

Variația domeniului fiind continuă, nu se schimbă caracterul topologic al domeniului: fiind în poziția inițială simplu-conex, el rămâne, prin deformare, tot simplu-conex.

Variația locală a integralei (63) este

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\delta t\, d\tau \,, \tag{64}$$

căci volumul V nu variază explicit cu timpul. Variația staționară,

se poate aprecia precum urmează. Fie S suprafaţa închisă, care limitează pe V; fie $d\sigma$ un element superficial pe S. O deplasare $\delta\bar{r}$ aplicată tuturor punctelor lui $d\sigma$, dă naştere unei suprafeţe cilindrice având bazele egale cu $d\sigma$ şi înălţimea $\bar{n}.\delta\bar{r}$, unde $\bar{n}$ este normala pozitivă pe $d\sigma$. Această suprafaţă cilindrică închide un volum elementar, care poate să fie considerat drept variaţia $\delta\tau$ a volumului V, corespunzătoare elementului superficial. Variaţia întregului volum se obţine prin integrare pe toată suprafaţa S. Aşadar, avem

$$\delta\int_V \varphi\, d\tau = \oint_S \varphi\,(d\bar{\sigma}.\delta\bar{r}) \ .$$

Aplicând formula lui Gauss, pentru vectorul $\varphi.\delta\bar{r}$, variaţia integralei (62) devine

$$\delta\int_V \varphi\, d\tau = \int_V d\tau\,.\,\mathrm{div}\,(\varphi.\delta\bar{r}) \ . \tag{65}$$

Variaţia substanţială se obţine, după (61), ţinând seamă de valoarea (64). Avem, pentru diferenţiala integralei (63),

$$d\int_V \varphi\, d\tau = \int_V \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt + \mathrm{div}\,(\varphi\, d\bar{r})\right\} d\tau \ .$$

Trecând de la diferenţiale la derivate, volumul fiind independent de timp, obţinem derivata substanţială

$$\frac{D}{Dt}\int_V \varphi\,(\bar{r},t)\,d\tau = \int_V \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varphi\,\bar{v})\right\} d\tau \ . \tag{66}$$

Volumul V fiind arbitrar, putem scrie relaţia importantă

$$\frac{D}{Dt}\left\{\varphi(r,t)\,d\tau\right\} = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varphi\,\bar{v})\right\} d\tau \ . \tag{67}$$

Aplicaţie. Ecuaţia continuităţii. Într'un fluid (materie, substanţă) ce ocupă un domeniu dat, se defineşte *densitatea* într'un punct, ca funcţie de poziţie şi de timp, prin procesul de limită următor.

Fie un element de volum $\delta\tau$ care înconjoră un punct P şi fie δm cantitatea de substanţă conţinută în acest volum. Admitem că distribuţia este continuă în volumul considerat, astfel încât, dacă facem ca $\delta\tau$ să tindă către zero, atunci şi δm să

tindă către zero. In aceste condiţii, admitem că limita

$$\lim_{\delta\tau \to 0} \frac{\delta m}{\delta \tau} = \rho\,(P, t) \tag{68}$$

există şi defineşte o funcţie continuă şi finită de poziţie şi de timp, în fiecare punct P al domeniului, numită *funcţie de densitate.*

Cantitatea de materie conţinută în elementul de volum, va fi, prin urmare, $\rho . \delta\tau$.

Intr'o substanţă *incompresibilă*, cantitatea de materie conţinută într'o regiune dată rămâne constantă, când acea regiune efectuiază deplasări de ansamblu în tot spaţiul umplut cu substanţă. Aşadar, *condiţia de incompresibilitate se scrie*

$$\frac{D}{Dt}(\rho . d\tau) = 0 \quad ,$$

ceeace, după ecuaţia (67), devine

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\, \bar{v}) = 0 \ , \tag{69}$$

dacă însemnăm cu $\bar{v}$ viteza de deplasare a particolelor ce alcătuiesc substanţa. Ecuaţia (69) poartă numele de *ecuaţia continuităţii.*

In câmpuri fără izvoare, $\operatorname{div}(\rho\, \bar{v}) = 0$; deci ecuaţia continuităţii devine, pentru fluide fără izvoare,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ ;$$

aşadar, $\rho = \rho\,(P)$ este o funcţie numai de poziţie şi nu variază în timp.

2. *Funcţii vectoriale.* Dacă avem o funcţie vectorială $\bar{a}\,(\bar{r}, t)$, satisfăcând condiţiilor de continuitate enunţate, şi aplicăm relaţia (61) componentelor sale scalare, obţinem, pentru derivata substanţială

$$\frac{D}{Dt}\bar{a}\,(\bar{r}, t) = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + (\bar{v} . \operatorname{grad})\,\bar{a} \quad . \tag{70}$$

Proprietăţi. Se verifică uşor că

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt}(\varphi + \psi) = \frac{D\varphi}{Dt} + \frac{D\psi}{Dt} \ ; \ \frac{D}{Dt}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{D\bar{a}}{Dt} + \frac{D\bar{b}}{Dt} \ ; \\ &\frac{D}{Dt}(\varphi\psi) = \varphi \frac{D\psi}{Dt} + \psi \frac{D\varphi}{Dt} \ ; \ \frac{D}{Dt}(\varphi\, \bar{a}) = \bar{a} \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \frac{D\bar{a}}{Dt} \ . \end{aligned} \tag{71}$$

Scanned with OKEN Scanner

Insemnând cu $d\tau$ un element de volum şi aplicând regulele de derivare (71) putem scrie

$$\frac{D}{Dt}(\bar{a}\,d\tau)=\frac{D\bar{a}}{Dt}\,d\tau+\bar{a}\frac{D(d\tau)}{Dt}\quad . \tag{72}$$

Dacă facem în (68) $\varphi=1$, avem pentru expresia din termenul al doilea al membrului al doilea din relaţia precedentă,

$$\frac{D}{Dt}(d\tau)=d\tau\,.\,\mathrm{div}\,\bar{v}\quad . \tag{73}$$

Expresia

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt}=\mathrm{div}\,\bar{v}\ , \tag{74}$$

unde V reprezintă un volum dat, poartă numele de *dilataţie cubică*. Ea exprimă variaţia volumului raportată la unitatea de volum.

Din (72) şi (73) rezultă

$$\frac{D}{Dt}(\bar{a}\,.\,d\tau)=d\tau\left\{\frac{D\bar{a}}{Dt}+\bar{a}\,\mathrm{div}\,\bar{v}\right\}. \tag{75}$$

Prin urmare, derivata substanţială a unei integrale vectoriale de volum, extinsă asupra unui domeniu oarecare V, invariabil în timp, este, după (75),

$$\frac{D}{Dt}\int_V \bar{a}\,d\tau=\int_V d\tau\left\{\frac{D\bar{a}}{Dt}+\bar{a}\,\mathrm{div}\,\bar{v}\right\}. \tag{76}$$

120. Derivata absolută. Fie un vector $\bar{a}(\bar{r},t)$, funcţie continuă de poziţie şi de timp. Să raportăm acest vector la un sistem de coordonate $O'(x',y',z)$, mobil faţă de un sistem de coordonate fix $O(x,y,z)$, în spaţiu. Fie $\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}$ vectorii fundamentali în $O'=O$; rezultă

$$\bar{a}=a'_x\,\bar{\imath}+a'_y\,\bar{\jmath}+a'_z\,\bar{k}\ .$$

Să derivăm în raport cu timpul (notăm acest fel de derivate cu un punct $\frac{d\bar{a}}{dt}=\dot{\bar{a}}$), obţinem,

$$\dot{\bar{a}}=\dot{a}'_x\bar{\imath}+\dot{a}'_y\bar{\jmath}+\dot{a}'_z\bar{k}+a'_x\dot{\bar{\imath}}+a'_y\dot{\bar{\jmath}}+a'_z\dot{\bar{k}}\ . \tag{77}$$

Scriem

$$\dot{a}'_x\,\bar{\imath}+\dot{a}'_y\,\bar{\jmath}+\dot{a}'_z\bar{k}=\frac{\partial\bar{a}}{\partial t}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru a arăta că $\bar{a}$ este derivat față de O', considerat ca fix. Să raportăm față de O și pe $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$; vom avea

$$\dot{\bar{\imath}} = \alpha_1 \bar{\imath} + \beta_1 \bar{\jmath} + \gamma_1 \bar{k}\,; \quad \dot{\bar{\jmath}} = \alpha_2 \bar{\imath} + \beta_2 \bar{\jmath} + \gamma_2 \bar{k}\,; \quad \dot{\bar{k}} = \alpha_3 \bar{\imath} + \beta_3 \bar{\jmath} + \gamma_3 \bar{k}$$

și să ținem seama de relațiile de condiție (O și O' fiind triortogonale)

$$\bar{\imath}^2 = \bar{\jmath}^2 = \bar{k}^2 = 1, \text{ deci } \bar{\imath}\,\dot{\bar{\imath}} = \bar{\jmath}\,\dot{\bar{\jmath}} = \bar{k}\,\dot{\bar{k}} = 0\,; \text{ și } \bar{\jmath}\,\bar{k} = \bar{k}\,\bar{\imath} = \bar{\imath}\,\bar{\jmath} = 0\,;$$

așadar, $\bar{\jmath}\,\dot{\bar{k}} + \bar{k}\,\dot{\bar{\jmath}} = 0$, etc.

Introducând vectorul $\bar{\omega}\,(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ cu componentele

$$\omega_x = \bar{\imath}\,\dot{\bar{k}}\,; \quad \omega_y = \dot{\bar{k}}\,\bar{\imath}\,; \quad \omega_z = \dot{\bar{\imath}}\,\bar{\jmath}\,;$$

obținem

$$\dot{\bar{\imath}} = [\bar{\omega}, \bar{\imath}]\,; \quad \dot{\bar{\jmath}} = [\bar{\omega}, \bar{\jmath}]\,; \quad \dot{\bar{k}} = [\bar{\omega}, \bar{k}]. \tag{78}$$

Relația (77) se va scrie atunci,

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + [\bar{\omega}, \bar{a}]\,, \tag{79}$$

expresie, care definește *derivata absolută* a vectorului $\bar{a}\,(P, t)$, derivată luată față de sistemul fix O, când se cunoaște derivata vectorului față de sistemul mobil O' și variația lui O' față de O (prin vectorul $\bar{\omega}$, după relațiile (78); v. *Mecanica*, p. 15).

121. Câmpuri rotaționale. Dacă într'un fluid ce ocupă un domeniu infinit sau limitat, există vârtejuri, care pot să fie mobile și de forme diverse, prezența lor definește un *câmp rotațional* sau *câmp de vârtejuri*.

Problema mișcării și a determinării câmpului este o problemă de Hidrodinamică.

Am arătat, în § 118, că prezența unui vârtej, figurat ca mișcare rotațională a unei regiuni redusă la un fir de grosime infinitesimală, dar infinit lung, este caracterizată prin valoarea diferită de zero a circulației vectorului de câmp pe circuite care înconjoră firul de vârtej. In exemplul citat, firul este imobil. In general însă, regiunile ce constituesc vârtejurile pot să fie de dimensiuni finite, formând tuburi rectilinii sau circulare, mobile în domeniul ocupat de fluid, după legi cercetate în Hidrodinamică. Este însă caracteristic faptul că vârtejurile în mișcarea lor își păstrează intensitatea, deci, valoarea circulației vectoru-

lui de câmp pe circuite nereductibile. Este deci, de aşteptat ca să existe o legătură între circulaţia vectorului de câmp şi funcţia menită să pună în evidenţă prezenţa vârtejurilor în câmp.

Funcţia de stare a vârtejurilor este numită *Rotorul* vectorului de câmp, şi este o funcţie regulată de poziţie. Ea se notează prin simbolul *rot* $\bar{a}\,(P)$. Vom arăta că această funcţie este un vector.

Faptul că vectorul unui câmp irotaţional (pentru care deci funcţia caracteristică prezenţei vârtejurilor este nulă) derivă din gradientul unei funcţii scalare $\varphi\,(P)$, regulată şi uniformă, ne conduce la ipoteza că anularea rotorului vectorului de câmp $\bar{a}\,(P)$ trebue să fie o consecinţă a existenţei gradientului funcţiei φ. Ori, analitic, se poate forma funcţia vectorială $\bar{c}\,(P)$, cu componentele (faţă de un sistem cartesian),

$$(80)' \qquad c_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\,; \quad c_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\,; \quad c_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\,.$$

care este, în adevăr, identic nulă dacă vectorul $\bar{a}$ derivă dintr'un gradient al unei funcţii scalare $\varphi\,(x, y, z)$,

$$(81) \qquad a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,; \quad a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,; \quad a_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,;$$

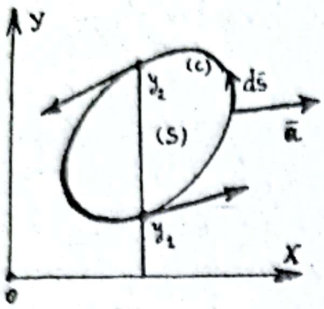
Aceste consideraţii ne îndreptăţesc să considerăm vectorul $\bar{c}\,(P)$ drept funcţie de stare a câmpurilor rotaţionale.

122. Rotorul unui vector dat $\bar{a}\,(P)$, funcţie regulată de poziţie, este, prin definiţie, funcţia vectorială $\bar{c}\,(P)$, ale cărei componente continue şi finite sunt date de relaţiile (80). Rotorul poate să fie scris, simbolic, sub forma

$$\bar{c} = \operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\operatorname{grad}, \bar{a}].$$

ultima expresie reprezentând produsul vectorial dintre vectorul gradient (considerat ca operator) şi vectorul $\bar{a}\,(P)$. Vom verifice mai târziu ca mărimea astfel definită răspunde regulii componentelor, deci că este un vector în sensul definit la § 24 *(regula componentelor)*.

123. Relaţia dintre „rotor“ şi noţiunea fizică de „rotaţie“. Să considerăm o porţiune de fluid care execută o mişcare de rotaţie în jurul unei axe paralelă cu axa de z, deci toate particolele se vor mişca în plane paralele planului x, y. Să luăm în acest plan o curbă închisă (C), care înconjoră regiunea rotaţională (fig. 46) şi să fixăm un sens pozitiv de circulaţie pe ea. Să considerăm un vector $\bar{a}$, care să fie o funcţie continuă şi finită de poziţie cu derivatele parţiale în raport cu x şi y continue şi finite. Să luăm apoi integrala de linie a lui $\bar{a}$ dealungul curbei (C)



(Fig. 46)

$$\oint_{(C)} \bar{a}.\, d\bar{s} = \oint_{(C)} (a_x\, d_x + a_y\, d_y).$$

Considerăm, pentru moment, următoarea integrală

$$-\, dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial a_x}{\partial y}\, dy = -\, dx \Big| a_x \Big|_{y_1}^{y_2} = (a_x(y_1) - a_x(y_2)).\, dx\ ;$$

să integrăm pe toată curba (C); obţinem

$$-\int dx\, dy \frac{\partial a_x}{\partial y} = \int a_x\, dx\ ;$$

analog,

$$\int dx\, dy \frac{\partial a_y}{\partial x} = \int a_y\, dx.$$

Sumând egalităţile precedente rezultă,

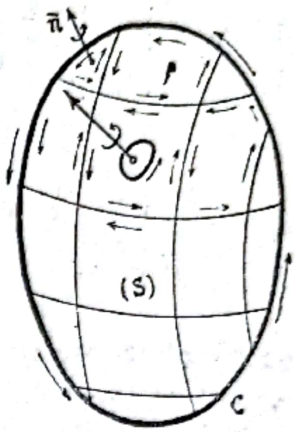
$$\int_{(S)} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_{(C)} \bar{a}.\, d\bar{s}\ ,$$

(S) fiind suprafaţa de plan mărginită de curba închisă (C).

Observăm că integrandul din membrul întâi este componenta de z a vectorului definit prin relaţiile (80), deci a vectorului *rot* $\bar{a}$.

Am căpătat aşadar, un rezultat interesant: circulaţia vectorului $\bar{a}$, dealungul unei curbe plane închise, este egală cu fluxul vectorului $\bar{c} = rot\ \bar{a}$, prin suprafaţa plană mărginită de curba închisă considerată.

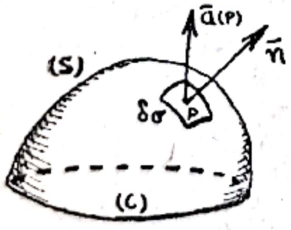
Acest rezultat se poate extinde şi la cazul general când curba (C) este o curbă strâmbă, iar suprafaţa mărginită de (C) este o suprafaţă arbitrară, fără puncte singulare. In adevăr, să considerăm o curbă simplă închisă (C) şi să fixăm un sens de circulaţie pozitiv pe această curbă (fig. 47).



(Fig. 47)

Fie o suprafaţă *arbitrară*, regulată, mărginită de curba (C). Să descompunem suprafaţa într'un număr suficient de mare de patrulatere curbilinii infinitesimale, astfel încât să poată fi considerate drept plane, în primă aproximaţie. Să definim, în felul indicat pe figură, un sens de circulaţie pozitiv, pe fiecare element astfel obţinut pe suprafaţa considerată, anume, sensul pozitiv de circulaţie pe fiecare element să corespundă normalei $\bar{n}$ pozitive la suprafaţă în fiecare punct al elementului $d\bar{\sigma} = \bar{n}.d\sigma$, de suprafaţă. Aplicând fiecărui element rezultatul găsit în cazul suprafeţelor plane, observăm că integralele ce provin de pe laturi comune la câte două elemente se distrug, două câte două, rămânând numai termenii care provin de la curba înconjorătoare.

124. Formula lui Stokes. Fie dată o curbă închisă simplă (fără bucle) (C), continuă şi finită. Să ducem prin această curbă o suprafaţă *arbitrară* (S), pe care să putem defini două feţe. Alegem una din feţe şi ducem, pe un element $d\bar{\sigma}$, normala la suprafaţă, pe care definim sensul pozitiv corespunzător sensului de circulaţie pozitivă ales pe curba de frontieră (C), după regula şurubului care iese din mutelcă (fig. 48). Fie o funcţie vectorială de poziţie $\bar{a}(P)$ regulată şi uniformă în tot domeniul, posedând derivate de primul ordin finite şi continue.



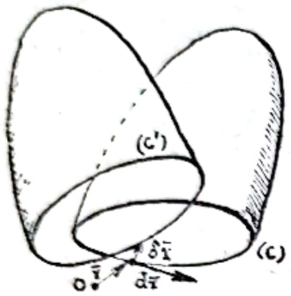
(Fig. 48)

„Circulaţia vectorului $\bar{a}$ dealungul curbei date (C) este egală cu fluxul rotorului lui $\bar{a}$ prin suprafaţa *arbitrară* (S), mărginită de curba (C):"

$$\text{(II)} \qquad \oint_{(C)} \bar{a}.d\bar{r} = \int_{(S)\text{ arbitrară}} \text{rot}\,\bar{a}.d\bar{\sigma}$$

Această relație, între o integrală de suprafață și o integrală de linie, de mare însemnătate în Analiza matematică și Fizica teoretică, poartă numele de *formula lui* Stokes. Demonstrația ei se găsește în toate tratatele de Analiză matematică. Vom adopta o demonstrație mai simplă, adaptabilă calculului vectorial :

Să dăm curbei (C) o deplasare infinitesimală, până în poziția (C') (fig. 49). Diferența dintre valoarea circulației pe curba (C') și (C), poate să fie exprimată prin variația δ aplicată circulației pe (C) :



(Fig. 49)

$$\delta \oint_C \bar{a}\, d\bar{r} = \int_C \delta\bar{a} . d\bar{r} + \int_C \bar{a} . \delta\, d\bar{r} \ .$$

Dar, operațiunile „δ“ și „d“ fiind complet independente, sunt comutative ; deci

$$\delta \oint \bar{a}\, d\bar{r} = \int \delta\bar{a} . d\bar{r} + \int \bar{a} . d\ \delta\bar{r} \ .$$

Să integrăm prin părți termenul al doilea din membrul al doilea,

$$\int_C \bar{a} . d\bar{r} = |(\bar{a} . \delta\bar{r})|_{(C)} - \int_C d\bar{a} . \delta\bar{r} \ .$$

Insă $|(\bar{a} . \delta\bar{r})|_{(C)} = 0$, căci curba (C) fiind închisă, iar atât $\bar{a}$ cât și $\delta\bar{r}$ fiind funcții continue și uniforme de poziție, ele revin în punctul de plecare cu aceleași valori. Avem deci,

$$\delta \oint_C \bar{a} . d\bar{r} = \oint_C \delta\bar{a} . d\bar{r} - \oint_C d\bar{a} . \delta\bar{r} \ .$$

Să transformăm această relație cu ajutorul calculului simbolic. Știm că $d = (d\bar{r} . \text{grad})$ și $\delta = (\delta\bar{r} . \text{grad})$. Putem scrie

$$(\delta\bar{a} . d\bar{r}) - (d\bar{a} . \delta\bar{r}) = (\delta\bar{r} . \text{grad})\,(\bar{a} . d\bar{r}) - (d\bar{r} . \text{grad})\,(\bar{a} . \delta\bar{r}) \ ,$$

sau încă

$$(82) \qquad (\delta\bar{a} . d\bar{r}) - (d\bar{a} . \delta\bar{r}) = [\text{grad} , \bar{a}] . [\delta\bar{r} , d\bar{r}]$$

în virtutea identității (38) de la § 27. Așa dar, vom avea

$$\delta \int_C \bar{a} . d\bar{r} = \int_C [\text{grad} , \bar{a}] . [\delta\bar{r} , d\bar{r}] \ .$$

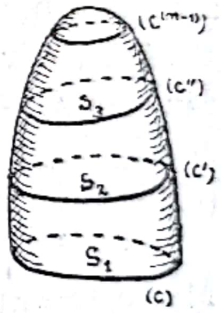
In această expresie, $\bar{n}\, d\sigma = [\delta\bar{r}, d\bar{r}]$ reprezintă vectorul perpendicular pe planul tangent la fășia de suprafață formată de deplasarea lui $ABCD$ în $A'B'C'D'$, (planul tangent fiind determinat de vectorii $\delta\bar{r}$ și $d\bar{r}$) în sensul pozitiv, corespunzător sensului pozitiv subordonat curbei (C); mărimea absolută a acestui vector este elementul de suprafață $d\sigma$. Apoi, cum $[\text{grad}, \bar{a}] = \text{rot}\,\bar{a}$, produsul scalar $(\text{rot}\,\bar{a} . [\delta\bar{r}, d\bar{r}]) = \bar{n} . \text{rot}\,\bar{a}$ reprezintă proecția vectorului rot $\bar{a}$ pe normala $\bar{n}$ la suprafața $d\sigma$, înmulțită cu elementul superficial $d\sigma$. Deci,

$$\delta \oint_C \bar{a} . d\bar{r} = \int_{(CC')} \text{rot}_n\, \bar{a} . d\sigma \; ; \tag{83}$$

integrala doua fiind extinsă la fășia de suprafață născută din deplasarea lui (C) în poziția (C'). Relația (83) se mai poate scrie

$$\oint_C \bar{a} . d\bar{r} - \oint_{C'} \bar{a} . d\bar{r} = \int_{\text{(fășia de suprf. } CC')} \text{rot}_n\, \bar{a} . d\sigma \; . \tag{84}$$

Să ne închipuim că avem curba (C) și suprafața (S) arbitrară, mărginită de ea (fig. 50). Să descompunem această suprafață în fășii $S_1, S_2, S_3 \ldots\ldots$ cu ajutorul curbelor $C', C'' \ldots\ldots C^{(n-1)}$ situate, (fără să se întretaie) pe (S); ultima fășie va fi o calotă, ultima secțiune reducându-se la un punct. Vom aplica fiecărei fășii formula (84). Vom avea



(Fig. 50)

$$\begin{aligned}
&\oint_C \bar{a} . d\bar{r} - \int_{C'} \bar{a} . d\bar{r} = \int_{S_1} \text{rot}\,\bar{a} . d\bar{\sigma} \\
&\int_{C'} \bar{a} . d\bar{r} - \int_{C''} \bar{a} . d\bar{r} = \int_{S_2} \text{rot}\,\bar{a} . d\bar{\sigma} \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\int_{C^{(n-1)}} \bar{a} . d\bar{r} - 0 \qquad = \int_{S_n} \text{rot}\,\bar{a} . d\bar{\sigma} .
\end{aligned} \tag{85}$$

Am admis că ultima integrală, pe o curbă (C^n), care se strânge la un punct, tinde la zero.

Adunăm egalitățile (85), membru cu membru. Termenii

din membrul întâi se reduc doi câte doi şi avem,

$$(86) \qquad \oint_C \bar{a} \, . \, d\bar{r} = \left(\int_{S_1} + \int_{S_2} + \cdots\cdots + \int_{S_n} \right) . \, \mathrm{rot}\, \bar{a} \, d\bar{\sigma} \, .$$

Suma din membrul al doilea reprezintă integrala extinsă asupra întregei suprafeţe (*S*). Prin aceasta, formula lui Stokes (II) este stabilită.

Observaţii. 1. In demonstraţia teoremei precedente ne-am folosit de relaţia de permutabilitate

$$(87) \qquad \delta \, d\bar{r} = d \, \delta\bar{r} \, ,$$

unde d şi δ reprezintă deplasări diferite şi *independente* aplicate vectorului de poziţie $\bar{r}$. Această relaţie este adevărată nu numai în spaţiile euclidiene, dar şi în spaţiile generale riemanniene, cu condiţia ca sistemul de coordonate în care exprimăm vectorul de poziţie să fie un sistem *olonom* (v. *Mecanica*, p. 387). G. Hamel în lucrarea sa „Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik“ (Math. Ann. v. 59, 1904) atrage atenţia asupra faptului că relaţia de permutabilitate (87) este *posibilă*, dar nu şi necesară, pentru sisteme olonome. In orice caz, pentru sisteme *anolonome* (în *quasi-coordonate*), această relaţie se înlocueşte prin *relaţiile de transivitate* ale lui K. Heun (v. *Mecanica*, l. c.).

2. Relaţia (82) este folosită de C. Bueali-Forti şi R. Marcolongo (Calcolo Vettoriale, p. 86) drept definiţie operatorială a rotorului.

3. In demonstraţia formulei lui Stokes, am admis că suma din membrul al doilea al relaţiei (86) este convergentă şi reprezintă integrala pe suprafaţa totală, fără a stabili acest lucru. Aceasta presupune că suprafaţa (*S*) este regulată şi finită, fiind descompozabilă într'un număr finit de fâşii. Concluzia este justă; ea prezintă totuşi o lacună în rigurozitatea demonstraţiei, inerentă metodei aplicate. (v. Max Planck, Einführung in die Theorie die Elektrizität, p. 116, 1922).

4. Asupra diferitelor *extinderi* ale formulelor lui Stokes şi Gauss, se poate consulta cu folos O. Kellogg, (Foundations of Potential Theory).

5. Unii autori folosesc, pentru *rotor*, cuvântul englezesc *Curl* (a răsuci, a toarce).

Pentru permanenta aplicaţie a formulei lui STOKES se poate consulta „Electromagnetismul".

125. Proprietăţi. 1. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un câmp să fie lipsit de vârtejuri este $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$; ceeace însemnează

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad ;$$

relaţii, care exprimă condiţia necesară şi suficientă pentru ca forma diferenţială $a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$, să admită un factor integrant (în particular, să fie o diferenţială totală exactă).

2. Un câmp de vârtejuri este totdeauna lipsit de izvoare, căci avem identic,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} \equiv 0 \ ,$$

ceeace se verifică imediat.

126. Operatorul $[grad,\ \bar{a}]$, este definit, într'un punct dat P, prin relaţia

$$[\operatorname{grad}, \bar{a}] = \lim \frac{1}{\delta\tau} \oint_S [\bar{a}, d\bar{\sigma} \quad , \tag{88}$$

unde S este suprafaţa închisă care limitează un volum dat V, cuprinzând punctul P, a cărui variaţie am însemnat-o cu $\delta\tau$.

Ca şi în cazul divergenţei, se arată că limita din membrul al doilea există şi este independentă de forma suprafeţei S, cu condiţia ca derivatele parţiale ale vectorului $\bar{a}\,(P)$ să fie continue în fiecare punct P (pentru ca atunci când integrala din membrul al doilea tinde continuu către valoarea ei în punctul fix P, şi operatorul din membrul întâi să tindă continuu către valoarea lui în P).

In § 122, am anticipat că primul membru al relaţiei (88) reprezintă rotorul lui $\bar{a}$. Rămâne să verificăm că, în adevăr, limita din membrul al doilea exprimă vectorul rot $\bar{a}$.

In acest scop, observăm, în primul rând, că din relaţia lui STOKES putem să definim rotorul, într'un punct dat P, prin procesul de limită

$$\bar{n}.\ \operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{rot}_n \bar{a} = \lim_{\delta\sigma \to 0} \frac{1}{\delta\sigma} \oint_C \bar{a}.\,c\bar{s} \quad , \tag{89}$$

Pentru permanenta aplicație a formulei lui STOKES se poate consulta „Electromagnetismul".

125. Proprietăți. 1. Condiția necesară și suficientă pentru ca un câmp să fie lipsit de vârtejuri este $\text{rot}\,\bar{a} = 0$; ceeace însemnează

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad ;$$

relații, care exprimă condiția necesară și suficientă pentru ca forma diferențială $a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$, să admită un factor integrant (în particular, să fie o diferențială totală exactă).

2. Un câmp de vârtejuri este totdeauna lipsit de izvoare, căci avem identic,

$$\text{div rot}\,\bar{a} \equiv 0 \ ,$$

ceeace se verifică imediat.

126. Operatorul $[grad,\ \bar{a}]$, este definit, într'un punct dat P, prin relația

$$[\text{grad}, \bar{a}] = \lim \frac{1}{\delta\tau} \oint_S [\bar{a}, d\bar{\sigma}] \quad , \tag{88}$$

unde S este suprafața închisă care limitează un volum dat V, cuprinzând punctul P, a cărui variație am însemnat-o cu $\delta\tau$.

Ca și în cazul divergenței, se arată că limita din membrul al doilea există și este independentă de forma suprafeței S, cu condiția ca derivatele parțiale ale vectorului $\bar{a}\,(P)$ să fie continue în fiecare punct P (pentru ca atunci când integrala din membrul al doilea tinde continuu către valoarea ei în punctul fix P, și operatorul din membrul întâi să tindă continuu către valoarea lui în P).

In § 122, am anticipat că primul membru al relației (88) reprezintă rotorul lui $\bar{a}$. Rămâne să verificăm că, în adevăr, limita din membrul al doilea exprimă vectorul rot $\bar{a}$.

In acest scop, observăm, în primul rând, că din relația lui STOKES putem să definim rotorul, într'un punct dat P, prin procesul de limită

$$\bar{n}.\ \text{rot}\,\bar{a} = \text{rot}_n\,\bar{a} = \lim_{\delta\sigma \to 0} \frac{1}{\delta\sigma} \oint_C \bar{a}.c\bar{s} \quad , \tag{89}$$

unde membrul întâi este componenta lui rot $\bar{a}$ pe direcţia normalei $\bar{n}$ la un element de suprafaţă $\delta\bar{\sigma}$, ce trece prin curba închisă C, înconjorând infinitesimal punctul fix P.

Vom avea, deci, să arătăm că definiţiile (88) şi (89) sunt echivalente.

Să considerăm volumul închis pe suprafaţa cilindrică din figura care cuprinde punctul fix dat P, în care fixăm o direcţie dată $\bar{n}$. Alegem suprafaţa cilindrică astfel în cât direcţia $\bar{n}$ să coincidă cu direcţia normalei exterioare domeniului, dusă pe suprafaţa S_2 de bază a cilindrului considerat. După notaţiile de pe fig. 48, rezultă că $\bar{n}$ este paralelă cu $\bar{\nu}_1$ şi $\bar{\nu}_2$, coincidând cu $\bar{\nu}_2$. Suprafaţa totală cilindrică se compune din bazele S_1, S_2 şi suprafaţa laterală Σ. Această ultimă suprafaţă este limitată de curba închisă C (curba care limitează şi pe S_2). Alegem pe C ca sens de circulaţie pozitivă direcţia corespunzătoare sensului normalei exterioare pe S_2.

Cum, în formula (88) suprafaţa asupra căreia se extinde integrala din membrul al doilea este arbitrară, vom extinde integrala asupra suprafeţei considerate mai sus: $S_1 + S_2 + \Sigma$. Avem

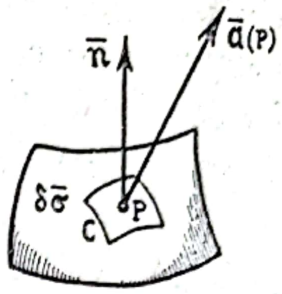
$$\bar{n}.[\text{grad}, \bar{a}] = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} \oint_{S_1+S_2+\Sigma} \bar{n}.[\bar{a}, d\bar{\sigma}] = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} \oint_{S_1+S_2+\Sigma} \bar{a}.[d\bar{\sigma}, \bar{n}] \ .$$

Observăm însă că pe S_1 şi S_2 produsul vectorial care figurează în integrala ultimă este nul, căci $\bar{\nu}_1$ şi $\bar{\nu}_2$ sunt paralele cu $\bar{n}$. Rămâne aşadar, numai integrala pe suprafaţa laterală Σ. Dar, fie $d\bar{s}$ un element de arc al curbei C care limitează pe S_2. Un element al suprafeţei Σ este $d\bar{\sigma} = d\bar{s}\, h$ unde h este înălţimea cilindrului. Elementul de volum $\delta\tau$ se poate scrie $\delta\bar{\sigma}.h$, unde $\delta\bar{\sigma}$ este un element de suprafaţă pe S_2. Aşadar, relaţia precedentă devine

$$\bar{n}.[\text{grad}, \bar{a}] = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\sigma\, h} \oint_C \bar{a}.d\bar{s}\, h = \lim_{\delta\sigma \to 0} \frac{1}{\delta\sigma} \oint_C \bar{a}.d\bar{s} \ ,$$

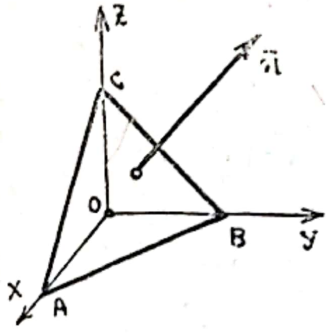
ceeace stabileşte proprietatea enunţată.

Prin urmare, este suficient şi necesar să ne dăm punctul fix P şi o direcţie $\bar{n}$ în acest punct, pentru a putea să determinăm rotorul unui vector $\bar{a}$, în P. Suprafaţa S şi curba C sunt arbitrare ca formă, S trebuind să fie o perpendiculară pe direcţia prescrisă $\bar{n}$ (fig. 51).



(Fig. 51)

127. Rotorul are caracter de vector. Fie un punct fix P şi o direcţie dată $\bar{n}$ în P. Luăm un sistem de axe rectangulare şi ducem un plan perpendicular pe $\bar{n}$. Acest plan taie axele în punctele A, B, C (fig. 52). Luăm drept curbă închisă triunghiul ABC şi drept suprafaţă $\delta\sigma$, suprafaţa plană a acestui triunghi. Fie $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z$, proiecţiile suprafeţei $\delta\sigma$ pe planele de coordonate (yOz), (zOx), (xOy). Avem



(Fig. 52)

$$\delta\sigma = \frac{\delta\sigma_x}{\cos(\bar{n},\bar{\imath})} = \frac{\delta\sigma_y}{\cos(\bar{n},\bar{\jmath})} = \frac{\delta\sigma_z}{\cos(\bar{n},\bar{k})} ;$$

atunci, cum

$$\int_{ABC} \bar{a}\,.\,d\bar{s} = \int_{OBCO} \bar{a}\,.\,d\bar{s} + \int_{OCAO} \bar{a}\,.\,d\bar{s} + \int_{OABO} \bar{a}\,.\,d\bar{s} ,$$

vom obţine, împărţind cu $\delta\sigma$,

$$\frac{1}{\delta\sigma}\int_{ABC} \bar{a}\,.\,d\bar{s} = \frac{\cos(\bar{n},\bar{\imath})}{\delta\sigma_x}\int_{OBCO} \bar{a}\,.\,d\bar{s} + \frac{\cos(\bar{n},\bar{\jmath})}{\delta\sigma_y}\int_{OCAO} \bar{a}\,.\,d\bar{s} + \frac{\cos(\bar{n},\bar{k})}{\delta\sigma_z}\int_{OABO} \bar{a}\,.\,d\bar{s}$$

şi făcând pe $\delta\sigma, \delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z$ să tindă spre zero.

$$\lim_{\delta\sigma \to 0} \frac{1}{\delta\sigma}\oint \bar{a}\,.\,d\bar{s} = \lim_{\delta\sigma \to 0} \frac{1}{\delta\sigma_x}\int_{OBCO} \bar{a}\,.\,d\bar{s}\,.\cos(\bar{n},\bar{\imath}) +$$

$$+ \lim_{\delta\sigma_y \to 0} \frac{1}{\delta\sigma_y}\int_{OCAO} \bar{a}\,.\,d\bar{s}\,.\cos(\bar{n},\bar{\jmath}) + \lim_{\delta\sigma_z \to 0} \frac{1}{\delta\sigma_z}\int_{OABO} \bar{a}\,.\,d\bar{s}\,.\cos(\bar{n},\bar{k}) .$$

Dar conform definiţiei, această relaţie se scrie

$$\mathrm{rot}_n\,\bar{a} = \mathrm{rot}_x\,\bar{a}\,.\cos(\bar{n},\bar{\imath}) + \mathrm{rot}_y\,\bar{a}\,.\cos(\bar{n},\bar{\jmath}) + \mathrm{rot}_z\,\bar{a}\,.\cos(\bar{n},k) .$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, componenta rotorului pe o direcție oarecare $\bar{n}$ se obține cu ajutorul componentelor pe trei axe ortogonale fundamentale și cu ajutorul cosinusurilor directoare ale direcției $\bar{n}$, conform regulei ce dă componenta unui vector.

Am stabilit, prin aceasta, caracterul vectorial al rotorului.

130. Expresia rotorului în coordonate generale. Referindu-ne la figura nr. 45, componenta $\bar{w}$ a rotorului vectorului $\bar{a}$ este dată de relația de definiție (89), sub forma

$$\bar{w}.\ \text{rot}\ \bar{a} = \frac{1}{UV\,du\,dv} \oint_{OP_1P_2P_3O} \bar{a}.\,d\bar{r} \quad . \tag{90}$$

Avem succesiv:

integrala dealungul lui $O\ P_1$ este egală cu $U\,a_u\,du$;

" " " $P_1\,P_2$ " " " $dv\left\{Va_v + \frac{\partial}{\partial u}(V\,a_v)\,du\right\}$

" " " $P\ P$ " " " $-du\left\{Ua_u + \frac{\partial}{\partial v}(U\,a_u)\,dv\right\}$

" " " $P\ O$ " " " $-V\,a_v\,dv$.

In definitiv, membrul al doilea al relației (90), deci componenta $\bar{w}$ a vectorului, este

$$\frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(V\,a_v) - \frac{\partial}{\partial v}(U a_u)\right\} \quad .$$

Prin permutări circulare, obținem celelalte componente. Expresiile componentelor vectorului rot $\bar{a}$ pe cele trei direcții sunt, așadar,

$$\bar{u}.\ \text{rot}\ \bar{a} = \frac{1}{VW}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(W\,a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(V\,a_v)\right\} \quad .$$

$$\bar{v}.\ \text{rot}\ \bar{a} = \frac{1}{WU}\left\{\frac{\partial}{\partial w}(U\,a_u) - \frac{\partial}{\partial u}(W\,a_w)\right\} \quad , \tag{91}$$

$$\bar{w}.\ \text{rot}\ \bar{a} = \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(V\,a_v) - \frac{\partial}{\partial v}(U\,a_u)\right\} \quad ;$$

unde a_u, a_v, a_w, reprezintă valorile corespunzătoare ale componentelor vectorului $\bar{a}$ pe cele trei direcții, în punctul O.

Scanned with OKEN Scanner

Coordonate polare sferice:

$$(\text{rot}\,\bar{a})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}a_\theta\right\} ;$$

$$(92)\qquad (\text{rot}\,\bar{a})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(a_\varphi r) ;$$

$$(\text{rot}\,\bar{a})_\varphi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\,a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right\} .$$

Coordonate cilindrice:

$$(\text{rot}\,\bar{a})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} ;$$

$$(93)\qquad (\text{rot}\,\bar{a})_\varphi = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} ;$$

$$(\text{rot}\,\bar{a})_z = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\,a_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right\} .$$

131. Rotorul superficial. Dacă, în domeniul de existenţă a vectorului de câmp $\bar{a}\,(P)$, există suprafeţe de discontinuitate izolate pentru vectorul de câmp, definim noţiunea de rotor superficial prin acelaş procedeu ca şi gradientul superficial sau divergenţa superficială, pornind de la relaţia (88). Fie δl distanţa infinitesimală a celor două feţe de pe suprafaţa de discontinuitate. Numim *rotor superficial*, limita finită a expresiei δl rot $\bar{a}$, când $\delta l \to 0$. Se obţine, în acest mod,

$$(94)\qquad [\bar{n}, \bar{a}_2 - \bar{a}_1] = \text{rot sup}\,\bar{a} ,$$

unde $\bar{n}$ reprezintă normala pozitivă într'un punct dat P al suprafeţei de discontinuitate şi $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, valorile diferite ale vectorului de câmp pe cele două feţe, în vecinătatea infinitesimală a punctului P.

Dacă vrem să punem în evidenţă cele două normale pe feţele respective, putem scrie

$$(94')\qquad [\bar{n}_1, \bar{a}_1] + [\bar{n}_2, \bar{a}_2] = \text{rot sup}\,\bar{a} .$$

Rotorul superficial este un vector aşezat în planul tangent la suprafaţa de discontinuitate, în P. El reprezintă, prin urmare, *discontinuitatea tangenţială* a vectorului de câmp.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă *rot sup* $\bar{a}$ este nul, componentele tangențiale ale vectorului $\bar{a}$ trec continuu prin suprafața de discontinuitate.

Este clar că rot $\bar{a}$, în punctul de discontinuitate, este infinit, de oarece derivatele parțiale ale vectorului $\bar{a}$ devin infinite în acest punct.

Observăm că metoda întrebuințată pentru a deduce valorile gradientului, divergenței și rotorului, în punctele unei suprafețe de discontinuitate, este generală și poate să fie aplicată pentru orice expresie diferențială, care conduce la valori infinite pentru puncte așezate pe suprafețe de discontinuitate.

132. Relații importante.

I. $$\text{rot rot } \bar{a} = \text{grad div } \bar{a} - \Delta \bar{a}.$$

Avem, $$\text{rot rot } \bar{a} = [\text{grad}, [\text{grad}, \bar{a}]];$$

$$\text{rot rot } \bar{a} = \text{grad (grad. } \bar{a}) - \text{(grad. grad) } \bar{a} = \text{grad div } \bar{a} - \Delta \bar{a}.$$

II. $$\text{div rot } \bar{a} = 0 .$$

$$\text{rot}_x \bar{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \text{rot}_y \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \text{rot}_z \bar{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} ;$$

deci,

$$\text{div rot } \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x} \text{rot}_x \bar{a} + \frac{\partial}{\partial y} \text{rot}_y \bar{a} + \frac{\partial}{\partial z} \text{rot}_z \bar{a} = 0 .$$

Un câmp de vârtejuri, $\bar{c} = \text{rot } \bar{a}$, are totdeauna $\text{div } \bar{c} = 0$; el este fără isvoare.

III. rot grad $\varphi = 0$. Un câmp de isvoare n'are vârtejuri.

IV. $$\text{div } [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{b} . \text{ rot } \bar{a} - \bar{a} . \text{ rot } \bar{b}.$$

$$\text{div } [\bar{a}, \bar{b}] = \frac{\partial}{\partial x} (a_y b_z - a_z b_y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (a_z b_x - a_x b_z) + \frac{\partial}{\partial z} (a_x b_y - a_y b_x) = \bar{b} \text{ rot } \bar{a} - \bar{a} \text{ rot } \bar{b} .$$

V. $$\text{rot } [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{a} \text{ div } \bar{b} - \bar{b} \text{ div } \bar{a} + (\bar{b} . \text{ grad}) \bar{a} - (\bar{a} . \text{ grad}) \bar{b}.$$

VI. $$\text{grad } (\bar{a} . \bar{b}) = (\bar{a} . \text{ grad}) \bar{b} + (\bar{b} . \text{ grad}) \bar{a} + [\bar{a}, \text{ rot } \bar{b}] + [\bar{b}, \text{ rot } \bar{a}].$$

VII. $$\text{rot } (\varphi \bar{a}) = \varphi \text{ rot } \bar{a} - [\bar{a}, \text{ grad } \varphi].$$

Scanned with OKEN Scanner

133. Completarea imaginii fizice a câmpurilor cu vârtejuri. Intr'un câmp cu vârtejuri, determinat prin funcţia de stare $\bar{\omega} = \text{rot}\, \bar{a}\,(P)$, curbele tangente, în fiecare punct al lor, vectorului $\bar{\omega}$, se numesc *linii de vârtejuri.* Ecuaţiile lor diferenţiale sunt, prin definiţie,

$$[d\bar{r}\,, \text{rot}\, \bar{a}] = 0\,, \tag{95}$$

sau, în coordonate cartesiene,

$$dx : \omega_x = dy : \omega_y = dz : \omega_z\,. \tag{95'}$$

Aceste ecuaţii diferenţiale admit o infinitate de curbe integrale formând o familie biparametrică, astfel încât prin fiecare punct al câmpului trece o curbă şi numai una singură, într'un moment dat.

Cum câmpul de vârtejuri este lipsit de izvoare, liniile de vârtej nu pot lua naştere nici dispare în interiorul câmpului; ele sunt curbe închise, ori se termină pe frontiera domeniului.

Numim *suprafaţă de vârtejuri* o suprafaţă tangentă, în fiecare punct al ei, vectorului $\bar{\omega}\,(P)$. Ecuaţia cu derivate parţiale a acestor suprafeţe este

$$\bar{n}\,.\,\text{rot}\, \bar{a} = 0\,, \tag{96}$$

unde $\bar{n}$ este normala în fiecare punct al suprafeţei de vârtejuri. Dacă $\psi\,(\bar{r}) = \text{constant}$, reprezintă ecuaţia unei suprafeţe de vârtej, ecuaţia diferenţială precedentă se scrie

$$\text{grad}\, \psi\,.\,\text{rot}\, \bar{a} = 0\,.$$

Două suprafeţe de vârtejuri se taie după o linie de vârtejuri.

O suprafaţă de vârtej care trece prin punctele unei curbe *deschisă AB* (fig. 53) constitue un domeniu simplu-conex. In adevăr, circulaţia vectorului pe orice curbă închisă aşezată pe suprafaţă este nulă, în virtutea ecuaţiei (96) şi a formulei Stokes.

(Fig. 53)

Dacă însă, curba *AB* este *închisă,* suprafaţa de vârtej defineşte un *tub de vârtej.* Circulaţia dealungul unei curbe închisă aşezată pe suprafaţa de vârtej, astfel încât să înconjore regiunea interioară (rotaţională) este diferită de zero şi defineşte *momentul* tubului. Dacă secţiunea normală a tubului este infinitesimală,

tubul devine un *fir de vârtej*, posedând intensitatea dată de valoarea constantă a circulației.

134. Teorema lui Helmholtz. In mișcarea fluidului firul de vârtej se deplasează, dar duce cu el aceiași cantitate de fluid, definit de intensitatea firului care, fiindcă circulația rămâne constantă, va fi o constantă caracteristică vârtejului. Deci „toate elementele fluide care, la un moment t_0 se găsesc pe o suprafață sau o linie de vârtej, se vor găsi după un timp $t-t_0$ tot pe o suprafață sau o linie de vârtej".

„Suprafețele de vârtej sunt suprafețe de discontinuitate. In adevăr, câmpul $\bar{a}$ variază continuu printr'o astfel de suprafață, însă derivatele sale prime în raport cu coordonatele sunt discontinui, căci vârtejul este egal cu zero deoparte a unei suprafețe de vârtej și diferite de zero de cealaltă parte".

Proprietățile câmpurilor de vârtejuri sunt studiate într'un capitol special al Hidrodinamicii, numit „Teoria vârtejurilor".

Un domeniu de aplicație, întins, al câmpurilor rotaționale este „Electromagnetismul", căci ecuațiile fundamentale (Maxwell) se deduc din aplicarea permanentă a formulei lui Stokes (v. *Electromagnetismul*).

135. Câmpuri conținând suprafețe de discontinuitate. In domeniul de existență al funcției de câmp pot exista regiuni constând dintr'un număr finit de puncte izolate, din porțiuni continue ocupând un volum finit sau suprafețe regulate fără ramuri infinite, așezate toate la distanță finită în domeniu, — pentru care funcția de câmp scalară sau vectorială și derivatele ei pot să ia valori discontinue sau infinite.

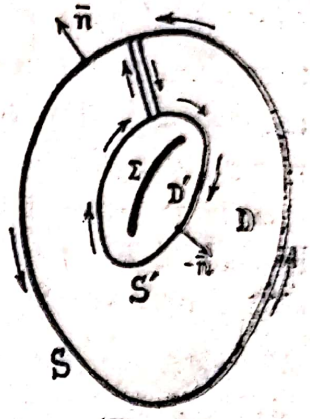
In asemenea cazuri, teoremele lui Gauss și Stokes nu mai pot să fie aplicate întregului domeniu, nemaifiind satisfăcute condițiile de finitate și continuitate necesare pentru valabilitatea numitelor formule.

Pentru a face posibilă aplicarea teoremelor amintite, este necesar să se elimine regiunile de discontinuitate din domeniul de integrare. Acest lucru este posibil, după cum am mai amintit, prin izolarea regiunilor respective cu ajutorul unor suprafețe și membrane, alese astfel încât domeniul rămas să fie simplu-conex. Suprafețele acestor membrane vor trebui înglobate în

Scanned with OKEN Scanner

suprafața totală asupra căreia se extind integralele de suprafață care apar în formulele lui GAUSS și STOKES.

Fie, pentru a fixa ideile, o suprafață de discontinuitate Σ. (fig. 54). Membrana izolantă se prezintă sub forma unei suprafețe închisă S', care elimină din domeniul D regiunea de discontinuitate D'; suprafață unită cu S printr'o membrană.



(Fig. 54)

Să aplicăm formula lui GAUSS domeniului $D-D'$, limitat de suprafața $S+S'$ și membrană, ținând seamă de sensul normalelor *exterioare* domeniului respectiv: pentru S spre exteriorul lui D; pentru S' spre exteriorul lui D', deci spre interiorul lui D; așadar, normalele respective vor avea semne contrare pe membrană.

Formula lui GAUSS se scrie

$$\int_{D-D'} \operatorname{div} \bar{a}\, d\tau = \oint_{S+S'} \bar{a}\,.\,d\bar{\sigma} = \oint_{S} \bar{a}\,.\,d\bar{\sigma} + \oint_{S'} \bar{a}\,.\,d\bar{\sigma}\ .$$

Trecem apoi la limită, deformând suprafața S' până se lipește de Σ. Integrala din membrul întâi al relației precedente, fiind funcție continuă, tinde către valoarea ei în D, integrala pe D' dispărând. In membrul al doilea, însă, integrala de suprafață extinsă la S' tinde către integrala extinsă la Σ, pe care $\bar{a}$ posedă discontinuitate de direcție normală, definită prin divergența superficială. Așadar,

$$\lim \int_{S'} \bar{a}\,.\,d\bar{\sigma} = -\int_{\Sigma} \bar{n}\,.\,(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)\, d\sigma = -\int_{\Sigma} \operatorname{div\,sup}\, \bar{a}\,.\,d\sigma\ ;$$

semnul minus provenind din cauza amintită că, prin ipoteză, normalele pe S și S' sunt de semne contrare. In aceste condiții, formula lui GAUSS devine

$$(97)\qquad \int_{D} \operatorname{div} \bar{a}\, d\tau = \oint_{S} \bar{a}\,.\,d\bar{\sigma} - \int_{\Sigma} \operatorname{div\,sup}\, \bar{a}\,.\,d\sigma\ .$$

In mod analog se obține pentru rotor, din formula (87), relația

$$(98)\qquad \int_{D} \operatorname{rot} \bar{a}\, d\tau = \oint_{S} [d\bar{\sigma}, \bar{a}] - \int_{\Sigma} \operatorname{rot\,sup}\, \bar{a}\,.\,d\bar{\sigma}$$

Formula lui STOKES presupune că suprafaţa arbitrară S, ce trece prin curba închisă dată C, este mărginită şi continuă, iar vectorul $\bar{a}$ e continuu pe S. Dacă există, însă, pe S o curbă *închisă* C' pe care vectorul $\bar{a}$ prezintă discontinuităţi, aplicarea teoremei necesită iarăşi descompunerea domeniului în regiuni continue. In acest scop, aplicăm formula următoarelor două regiuni simplu-conexe: suprafaţa $S-S'$ şi suprafaţa S' pe care le separă curba închisă, de discontinuitate, C', pe S. Fie $\bar{a}_2$ valoarea lui $\bar{a}$ pe C' în regiunea $S-S'$ şi $\bar{a}_1$ valoarea lui $\bar{a}$ pe C' în regiunea S. Avem atunci,

$$\text{pe } S-S' \qquad \int_{S-S'} \operatorname{rot} \bar{a} \,.\, d\bar{\sigma} = \oint_C \bar{a} \,.\, d\bar{s} - \int_{C'} \bar{a}_2 \,.\, d\bar{s} \;;$$

$$\text{pe } S' \qquad \int_{S'} \operatorname{rot} \bar{a} \,.\, d\bar{\sigma} = \oint_{C'} \bar{a}_1 \,.\, d\bar{s} \;.$$

Adunând aceste două relaţii, obţinem

$$(99) \qquad \oint_C \bar{a} \,.\, d\bar{s} - \oint_{C'} (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \,.\, d\bar{s}) = \int_S \operatorname{rot} \bar{a} \,.\, d\bar{\sigma} \;.$$

Când curba C' nu este închisă, o înconjorăm cu o curbă *închisă* C'' şi-i aplicăm relaţia (99). Apoi, strângem curba C'' în jurul curbei C', astfel încât, la limită, obţinem o formulă identică cu (99).

Observaţii. Liniile de câmp suferă, pe suprafeţele de discontinuitate, un efect de *refracţie*, schimbându-şi direcţiile. Un exemplu, se găseşte în „Electromagnetismul", privind liniile de câmp ale vectorului de *deplasare* al lui MAXWELL.

2. Existenţa regiunilor de discontinuitate presupune existenţa unor izvoare şi vârtejuri izolate (discontinuităţi izolate), sau distribuite continuu (regiuni de discontinuităţi continue), ori, existenţa izvoarelor şi vârtejurilor distribuite uniform pe suprafeţe limitate (suprafeţe de discontinuitate).

Pentru discontinuităţile distribuite continuu, se poate defini o *densitate spaţială*, prin analogie cu definiţia „densităţii de materie" (§ 119).

Fie δe randamentul izvoarelor din volumul $\delta\tau$ conţinut în volumul total V. Definim densitatea spaţială de distribuţie *uniformă* a izvoarelor, prin funcţia $\varkappa = \frac{\delta e}{\delta \tau}$, constantă pentru

fiecare element de volum din V. Dacă, însă, distribuţia nu este uniformă, fie $\delta\tau$ un element de volum din V, cuprinzând punctul $P(x, y, z)$. Vom defini densitatea spaţială prin

$$\varrho(P) = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{\delta e}{\delta\tau} , \tag{100}$$

admiţând că această limită există şi determină o funcţie continuă (cel puţin, *fragmentar continuă*) şi finită în fiecare punct P al domeniului. Rezultă

$$e = \int_V \varrho(P)\, d\tau ,$$

unde V este volumul total cuprinzând izvoarele. Dar, randamentul total este dat de fluxul total prin suprafaţa înconjurătoare

$$e = \frac{1}{4\pi} \oint a_n\, d\sigma , \tag{101}$$

unde factorul normant 4π este introdus pentru simplificarea scrisului unor formule care vor urma. Aşadar,

$$\varrho(P) = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} \oint \bar{a} \,.\, d\bar{\sigma} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \bar{a} ;$$

rezultă,

$$4\pi \,.\, \varrho(P) = \operatorname{div} \bar{a}(P) . \tag{102}$$

Dacă $a = -\operatorname{grad} \psi$, câmpul derivă dintr'un potenţial, iar ecuaţia (102) se scrie

$$\Delta\psi = -4\pi \,.\, \varrho(P) , \tag{103}$$

ecuaţie cunoscută sub numele de *ecuaţia lui* Poisson. Problema analitică a determinării câmpului revine la găsirea suprafeţelor integrale $\psi = \text{const.}$, care satisfac ecuaţiei (103), când funcţia ϱ este cunoscută. Aceasta este o problemă de analiză matematică; vom rezeni asupra ei în partea doua a acestei expuneri (Teoria potenţialelor), unde vom preciza şi condiţiile la care trebue să satisfacă funcţia ϱ.

Dacă $\varrho(P) = 0$, câmpul este fără izvoare cu distribuţie continuă, şi este determinat de *ecuaţia lui* Laplace

$$\Delta\psi = 0 . \tag{104}$$

Scanned with OKEN Scanner

Suprafață de pătură simplă. Să presupunem că există izvoare cu o distribuție cunoscută pe o suprafață dată, care devine, prin aceasta, suprafață de discontinuitate.

Prin analogie cu (102), vom defini o *densitate superficială a suprafeței de pătură simplă,* prin relația

$$4\pi . \omega(P) = \text{div sup } \bar{a} = \bar{n} . (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \quad . \tag{105}$$

Aşadar, o pătură simplă este o suprafață de discontinuitate pe direcție normală ei, a vectorului de câmp. Dacă acesta derivă dintr'un gradient, $\bar{a} = \text{grad } \varphi$, atunci,

$$4\pi . \omega(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \quad ; \tag{106}$$

densitatea superficială măsurând discontinuitatea gradientului funcției câmpului pe direcția normală la suprafață.

Suprafață de pătură dublă. Să presupunem că în domeniul considerat există o suprafață de discontinuitate pentru însăşi funcția scalară de câmp $\varphi(P)$. Putem să definim şi în acest caz, o funcție de poziție $\tau(P)$ în fiecare punct al suprafeței de discontinuitate, prin relația

$$4\pi . \bar{n} \tau(P) = \bar{n} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad , \tag{107}$$

φ_2 şi φ_1 fiind valorile pe care le ia φ pe cele două fețe ale suprafeței de discontinuitate. O astfel de suprafață poartă numele de *pătură dublă*, iar $\tau(P)$ este *momentul* ei. Vom justifica mai târziu această denumire (Teoria potențialelor).

Deocamdată se poate demonstra că *o pătură dublă este echivalentă unei linii de vârtej,* în efectul prezenții lor asupra câmpului. In adevăr, fie o linie de vârtej şi o suprafață, posedând două fețe, mărginită de această linie. Putem considera câmpul ca fiind irotațional, admițând o funcție scalară φ, dacă excludem regiunea ocupată de suprafața considerată şi de curba de frontieră, din domeniu, care este dublu-conex, dar care poate să fie transformat într'unul simplu-conex printr'o membrană izolantă a regiunei numite. Dar atunci, pentru curbele care pleacă de pe una din fețe, înconjoră linia de vârtej şi ajunge pe fața cealaltă, funcția de câmp nu mai este uniformă. In adevăr, diferența valorilor luate de această funcție pe cele două fețe, este dată de circulația, diferită de zero, pe circuitul care înconjoră linia de vârtej. Avem, aşadar,

$$\int_2^1 \text{grad}\,\varphi \,.\, d\bar{s} = \varphi_2 - \varphi_1 \neq 0 \ .$$

Pe de altă parte, se ştie că această valoare determină momentul liniei de vârtej (§ 133) egal cu $4\pi\tau(P)$. Aşadar, scriind egalitatea dintre aceste două valori, se obţine relaţia (107), ceeace stabileşte proprietatea enunţată.

Asupra altor proprietăţi ale suprafeţelor de pătură dublă vom reveni în Teoria potenţialelor.

196. Problema determinării câmpului din cunoaşterea distribuţiei izvoarelor şi a vârtejurilor. In prealabil, să demonstrăm următoarea

Teoremă „Un câmp lipsit atât de izvoare cât şi de vârtejuri, şi care la infinit este nul, este identic nul în tot domeniul".

Lipsa de vârtejuri implică existenţa unei funcţii de câmp scalară $\varphi(P)$, astfel încât câmpul căutat $\bar{a}$ derivă din grad φ. Supunem funcţia φ condiţiei suplimentare ca să tindă către zero ca $1:R$, când $R \to \infty$ (aşadar, în regiunile aşezate la distanţă foarte mare de domeniul D considerat, R însemnând distanţa de la un punct al lui D la frontiera ce se depărtează la infinit).

Să aplicăm formula lui Green (54) funcţiei φ; avem

$$\int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \int_D (\varphi \Delta \varphi + \text{grad}\,\varphi \,.\, \text{grad}\,\varphi)\, d\tau \ .$$

Să lăsăm suprafaţa frontieră S ca să tindă spre infinit; $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ va tinde către zero ca $1:R^2$, iar $d\sigma$ va tinde către infinit ca R^2, astfel în cât integrandul din membrul întâi va tinde către zero ca $\frac{1}{R}\frac{1}{R^2}R^2 = \frac{1}{R}$ când $R \to \infty$. Pe de altă parte, cum φ este lipsit şi de izvoare, trebue să fie satisfăcută identic ecuaţia lui Laplace $\Delta\varphi \equiv 0$, în D.

In aceste condiţii, din relaţia de mai sus rămâne

$$\int_D (\text{grad}\,\varphi)^2\, d\tau \equiv 0 \ ,$$

relaţie, care este satisfăcută numai când grad $\varphi = 0$, în fiecare punct al domeniului D; ceeace stabileşte teorema enunţată.

Scanned with OKEN Scanner

1. *Câmpul irotațional.* Există un potențial scalar, iar problema se reduce la determinarea funcției potențiale și este studiată în Teoria potențialelor, pentru diversele cazuri care se pot prezenta: a) izvoare izolate, în număr finit, prezentând o distribuție discretă; funcția potențială se determină, după cum vom vedea, din caracterul de discontinuitate al punctelor unde se află izvoarele în domeniul dat; b) izvoare distribuite continuu în regiuni spațiale, ocupând un volum dat. Am arătat că problema se reduce la determinarea de funcții care satisfac ecuației lui Poisson în regiunea cu izvoare, și ecuației lui Laplace în restul câmpului, sub anumite condiții la infinit; c) izvoare distribuite uniform pe suprafețe de pătură simplă sau de pătură dublă. Vom determina potențialul corespunzător, sub anumite condiții de frontieră.

2. *Câmpul rotațional.* Din cunoașterea rotorului vectorului de câmp, se pune problema determinării câmpului însuși. Se cere așadar, ca din cunoașterea unei funcții vectoriale $\bar{c}(P)$ să determinăm vectorul de câmp $\bar{a}(P)$, prin relația

$$\text{rot } \bar{a} = 4\pi \bar{c} \quad .$$

Observăm mai întâi că $\bar{c}$ nu poate fi un vector absolut arbitrar, căci trebue să satisfacă, identic, condiția

$$\text{div rot } \bar{a} = 0 ; \qquad \text{prin urmare, div } \bar{c} = 0 .$$

Se vede că există o soluție a problemei. In adevăr, în caz când vectorul $\bar{a}$, finit și continuu în domeniul dat, ar trebui să reprezinte un câmp lipsit atât de isvoare cât și de vârtejuri, el ar fi identic nul. De asemenea, această soluție este unică; căci dacă ar exista două soluții, diferența lor ar reprezenta un câmp fără izvoare și fără vârtejuri, adică nul peste tot.

Să punem

$$\bar{a} = \text{rot } \overline{A} ;$$

ceeace este posibil, căci avem identic div rot $\overline{A} = 0$. Vectorul $\overline{A}$ este determinat cu aproximație de un vector arbitrar, fără vârtejuri. Deci $\bar{a} = \text{rot } (\overline{A_1} + \overline{A_0})$ în care $\overline{A_0}$ este un vector fără vârtejuri, adică rot $\overline{A_0} = 0$. Putem alege vectorul arbitrar (însă fără vârtejuri) $\overline{A_0}$ în așa fel încât div $\overline{A_0} = -$ div $\overline{A_1}$; adică izvoarele lui $\overline{A_0}$ să compenseze izvoarele lui $\overline{A_1}$, ceeace înseamnă div $\overline{A} = 0$.

In acest caz, vectorul $\bar{a}$ se poate determina prin relația

$$\text{rot } \bar{a} = \text{rot rot } \overline{A} = \text{grad div } \overline{A} - \Delta \overline{A},$$

dar cum, div $\overline{A} = 0$, rezultă rot $\bar{a} = -\Delta \overline{A}$.

Şi, prin urmare

$$\Delta \overline{A} = -4\pi \bar{c}.$$

Am ajuns astfel la o ecuaţie vectorială, care se descompune în trei ecuaţii Poisson, scalare:

$$\Delta A_x = -4\pi c_x; \qquad \Delta A_y = -4\pi c_y; \qquad \Delta A_z = -4\pi c_z.$$

Funcţia vectorială $\overline{A}(P)$, determinată de ecuaţiile precedente, este numită ***potenţial vectorial***, prin analogie cu potenţialul scalar al câmpurilor irotaţionale. Rotorul potenţialului vectorial determină câmpul rotaţional. Problema se reduce, prin urmare, la căutarea funcţiilor integrale ale ecuaţiei cu derivate parţiale a lui Poisson, în condiţii pe frontieră, date.

Observaţie. In cele ce preced, am considerat ***separat***, câmpurile de izvoare şi cele de vârtejuri. Acest lucru este, în adevăr, permis din cauza proprietăţilor: un câmp de izvoare este fără vârtejuri, iar un câmp de vârtejuri este fără izvoare. Aşadar, cele două câmpuri pot să coexiste fără a se perturba reciproc, fiind independente. De aceia le putem suprapune, adunând vectorii de câmp după legea de adunare vectorială. Prin urmare, câmpul total poate să fie scris

$$\bar{a} = -\text{grad } \psi + \text{rot } \overline{A}, \tag{108}$$

după ce am determinat, pentru fiecare, în parte, potenţialul scalar ψ şi potenţialul vectorial $\overline{A}$.

Această exprimare joacă un rol însemnat în câmpurile electromagnetice, în teoria electronică (H. A. Lorentz) şi în teoria electromagoetică a luminii (Maxwell).

Teoremă. „Integrala, extinsă la tot domeniul de existenţă, din produsul unui vector fără vârtejuri $\bar{a}_1 = -\text{grad } \psi$ şi un vector fără izvoare $\bar{a}_2$, (div $\bar{a}_2 = 0$) este nulă (ambii vectori fiind nuli, la infinit)“:

$$\int \bar{a}_1 . \bar{a}_2 \, d\tau = 0.$$

In adevăr,

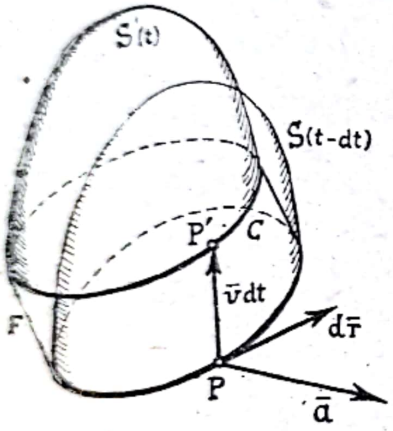
$$\int \bar{a}_1 . \bar{a}_2 \, d\tau = -\int \bar{a}_2 . \text{grad } \psi \, d\tau = -\int \text{div } (\psi \bar{a}_2) \, d\tau,$$

ţinând seamă de relaţia (52) § 117; iar după teorema lui GAUSS (I),

$$\int \bar{a}_1 . \bar{a}_2 \, d\tau = - \int (\psi \, \bar{a}_2) \, d\bar{\sigma} = 0 \, .$$

Fiind excluse pături duble, ψ este continuu pe suprafaţa totală S, chiar dacă ar exista unele discontinuităţi în domeniu. Cum $\bar{a}_2$ este fără izvoare, el va trece continuu prin orice pătură de discontinuitate. Integrala pe suprafaţa dela infinit, ce înconjoară tot domeniul, este nulă (vectorii $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$ fiind nuli la infinit). Deci, integrala din membrul al doilea este nulă.

137. Derivata substanţială a fluxului şi a circulaţiei. 1. *Variaţia fluxului printr'o suprafaţă mobilă* (fig. 55). Să presupunem că vectorul de câmp $\bar{a}(P,t)$ este o funcţie regulată de poziţie şi continuă în raport cu timpul, admiţând derivate finite.



(Fig. 55)

Fie o suprafaţă S *mobilă*, în domeniul considerat, mărginită de curba închisă C. Să calculăm variaţia fluxului vectorului $\bar{a}$ prin această suprafaţă. Dacă suprafaţa ar fi fixă, variaţia în timp a fluxului este

$$\int_S \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} \, d\bar{\sigma} \, .$$

Să calculăm variaţia fluxului datorită mişcării în timp a suprafeţei. Fie S poziţia suprafeţei în momentul $t-dt$, mărginită de curba C, şi S' poziţia suprafeţei în momentul t, mărginită de curba C' (noua poziţie a lui C). Dacă $\bar{v}$ este viteza de deplasare a punctelor lui S, un punct P va ajunge în P', după timpul dt, astfel în cât $\overrightarrow{PP'} = \bar{v} \, dt$.

Derivata substanţială a fluxului este definită prin

$$\frac{D}{Dt} \int_S \bar{a} . d\bar{\sigma} = \frac{1}{dt} \left\{ \int_{S'} \bar{a}_t . d\bar{\sigma} - \int_S \bar{a}_{t-dt} . d\bar{\sigma} \right\} \, . \tag{109}$$

Să aplicăm, *în momentul* t, suprafeţei totale formată din S, S' şi fâşia ce a luat naştere prin deplasarea curbei C în C', teorema

lui GAUSS. Observăm că elementul de arie pe fâşie este $|[d\bar{r}, \bar{v}]|\, dt$ şi elementul de volum $d\bar{\sigma} . \bar{v}\, dt$. De asemeni, se observă că normalele pe S şi S' sunt de semne contrare, una fiind interioară, cealaltă exterioară, volumului înnăscut. In aceste condiţii, teorema lui GAUSS sună

$$(110)\qquad \int_{S'} \bar{a}_t . d\bar{\sigma} + dt \oint_C \bar{a} . [d\bar{r}, \bar{v}] - \int_S \bar{a}_t . d\bar{\sigma} = dt \int_S (\bar{v} . d\bar{\sigma})\, \mathrm{div}\, \bar{a} .$$

Pe de altă parte,

$$(111)\qquad \int_S \bar{a}_{t-dt} . d\bar{\sigma} = \int_S \bar{a}_t . d\bar{\sigma} - dt \int_S \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}\, d\bar{\sigma} .$$

Aplicăm celei de a doua integrală teorema lui STOKES. Obţinem

$$(112)\qquad \oint_C \bar{a} . [d\bar{r}, \bar{v}] = \oint_C [\bar{v}, \bar{a}] . d\bar{r} = \int_S \mathrm{rot}\, [\bar{v}, \bar{a}] . d\bar{\sigma} .$$

Scăzând relaţia (111) din (110), ţinând seamă de (112) şi de (109), obţinem, în definitiv, pentru derivata substanţială a fluxului,

$$(113)\qquad \frac{D}{Dt} \int_S \bar{a} . d\bar{\sigma} = \int_S \left\{ \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{v}\, \mathrm{div}\, \bar{a} + \mathrm{rot}\, [\bar{a}, \bar{v}] \right\} d\bar{\sigma} .$$

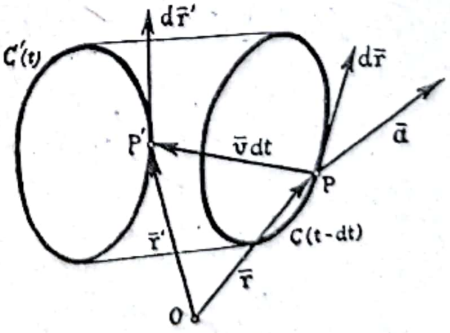
Suprafaţa S fiind arbitrară, o putem lua infinitesimală, astfel încât putem scrie

$$(114)\qquad \frac{D}{Dt} (\bar{a} . d\bar{\sigma}) = \left\{ \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{v}\, \mathrm{div}\, \bar{a} + \mathrm{rot}\, [\bar{a}, \bar{v}] \right\} d\bar{\sigma} .$$

In literatură se însemnează vectorul din paranteza membrului al doilea prin

$$\underline{\dot{\bar{a}}} = \dot{\bar{a}} + \bar{v}\, \mathrm{div}\, \bar{a} + \mathrm{rot}\, [\bar{a}, \bar{v}] ,$$

şi exprimă derivata vectorului $\bar{a}(P, t)$, *legat de punctele unei suprafeţe mobile* în timp. Această derivată apare, în ecuaţiile lui MAXWELL pentru a exprima fluxul vectorului de inducţie magnetică datorit unui circuit electric închis, mobil. (v. *Electromagnetismul*).



(Fig. 56)

2. *Variaţia circulaţiei dealungul unei curbe mobile* (fig. 56). Fie o curbă C, mobilă în timp, astfel încât punctul $P(t-dt)$ să ia poziţia $P'(t)$, pe curba C', noua

poziție a curbei C după timpul dt.

Să evaluăm derivata substanțială a circulației vectorului de câmp $\bar{a}(\bar{r},\ )$, presupus funcție regulată de poziție și timp, admițând derivate finite în raport cu toate variabilele.

Pentru o curbă C fixă, variația în timp a circulației este

$$\int_C \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}\, d\bar{r} \ .$$

Definim derivata substanțială prin relația, similară expresiei (108)

$$(115) \qquad \frac{D}{Dt}\int_C \bar{a}\,.\,d\bar{r} = \frac{1}{dt}\left\{\int_C \bar{a}_t\,.\,d\bar{r}' - \int_C \bar{a}_{t-dt}\,.\,d\bar{r}\right\} .$$

Să aplicăm formula lui Stokes, *în momentul* t, pentru suprafața care a luat naștere prin deplasarea curbei C în poziția C', suprafață, mărginită de aceste două curbe. Observăm că sensurile de circulație pe C și C' sunt contrare. Un element al numitei suprafețe este dat de expresia $d\bar{\sigma} = [\bar{v}, d\bar{r}]\, dt$.

Fie $P'(\bar{r}')$ poziția lui $P(\bar{r})$ după timpul dt. Avem $\bar{r}' = \bar{r} + \bar{v}\, dt$. Deci, $\delta\bar{r}' = \delta\bar{r}_t = \delta\bar{r}_{t-dt} + (d\bar{r}_0\,.\,\text{grad})\,\bar{v}\, dt$.

In aceste condiții, formula lui Stokes se scrie

$$(116) \qquad \int_{C'} \bar{a}_t\,.\,d\bar{r}' - \int_C \bar{a}_t \left\{d\bar{r} + (d\bar{r}.\ \text{grad})\,\bar{v}\right\} = a\int_C [\text{rot}\ \bar{a},\ \bar{v}]\,.\,d\bar{r}\,.$$

Pe de altă parte,

$$(117) \qquad \int_C \bar{a}_t\,.\,a\bar{r} = \int_C \bar{a}_{t-dt}\,.\,d\bar{r} + dt\int_C \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}\, d\bar{r} \ .$$

Scăzând relația (117) din relația (116), se obține

$$(118) \qquad \frac{D}{Dt}\int_C \bar{a}\,.\,a\bar{r} = \int_C \left\{\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \text{grad}\,(\bar{v}\,.\,\bar{a}) + [\text{rot}\ \bar{a},\ \bar{v}]\right\} d\bar{r} \ .$$

In literatură se întrebuințează și următoarea notație

$$(119) \qquad \dot{\bar{a}} = \dot{\bar{a}} + \text{grad}\,(\bar{a}.\ \bar{v}) + [\text{rot}\ \bar{a},\ \bar{v}] \ ,$$

pentru derivata substanțială a unui vector, funcție de poziție și de timp, *legat de punctele unei curbe mobile.*

PROBLEME RECAPITULATIVE DE CALCUL VECTORIAL

1. Să se arate că $|\bar{a}+\bar{b}|\leq|\bar{a}|+|\bar{b}|$; în ce caz are loc egalitatea?

Indicație: Inegalitatea decurge dintr'o proprietate a triunghiurilor. Nu putem avea semnul $=$ decât dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt colineari.

2. Intr'un paralelogram $ABCD$ avem $\overrightarrow{AB}=\bar{m}$ și $\overrightarrow{AD}=\bar{n}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ cu ajutorul vectorilor $\bar{m}$, $\bar{n}$, $(-\bar{m})$ și $(-\bar{n})$.

Ind. Construind figura, se observă imediat că

$$\overrightarrow{AC}=\bar{m}+\bar{n},\quad \overrightarrow{BD}=(-\bar{m})+\bar{n},\quad \text{etc.}$$

3. Pe laturile unui triunghiu ABC se construesc trei paralelograme arbitrare $ABML$, $BCPN$ și $ACQR$. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{RL}$, $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{PQ}$ pot forma un triunghiu.

Ind. Avem $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RL}=0$;

pe de altă parte $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$;

prin scădere obținem $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RL}=0$.

4. Fie un octagon regulat $ABCDEFGH$. Notând $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$, $\overrightarrow{BC}=b$, $\overrightarrow{CD}=\bar{c}$, $\overrightarrow{DE}=\bar{d}$, să se suprime fiecare din vectorii diagonali $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{CA}$ cu ajutorul vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, d.

Ind. Se vede ușor că $\overrightarrow{BF}=\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}-\bar{a}$,

$$\overrightarrow{BG}=-\bar{a}+d+\bar{c},\quad \text{etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

5. AM, BN și CP fiind medianele triunghiului ABC, să se arate că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=0$. Să se interpreteze acest rezultat.

Ind. a) Notând $\overrightarrow{AB}=\bar{c}$, $\overrightarrow{BC}=\bar{a}$, $\overrightarrow{CA}=\bar{b}$, avem $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\bar{c}-\bar{b})$.

Adunând avem $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}[(\bar{c}-\bar{b})+(\bar{a}-\bar{c})+(\bar{b}-\bar{a})]=0$.

b) *Altă metodă:* Avem evident $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}$,

și analog pentru $\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CP}$. Prin adunare

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=0$, de oarece $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$.

6. Fie D, E, F mijloacele laturilor unui triunghiu ABC. Să se arate că, oricare ar fi punctul O, rezultanta vectorilor $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ este egală cu rezultanta vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Ind. $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+$

$$+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

7. Origina vectorului $AB=-6\bar{\imath}+9\bar{\jmath}$ se găsește în punctul $A(2,-3)$. Să se găsească coordonatele extremității B; să se arate că dreapta AB trece prin origina sistemului de coordonate.

Ind. Se găsește $B(-4,6)$. E suficient apoi să vedem că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{OA}=2\bar{\imath}-3\bar{\jmath}$ sunt coliniari.

8. Trei din vârfurile paralelogramului $ABCD$ se găsesc în punctele $A(2,4)$; $B(-7,1)$; $C(-4,-3)$. Să se găsească coordonatele vârfului D. Să se facă versificarea, calculându-se coordonatele mijloacelor diagonalelor AC și BD.

Ind. Componentele lui $\overrightarrow{BA}$ sunt $(9,3)$. La fel și componentele lui $\overrightarrow{CD}$. Verificarea ne dă pentru ambele mijloace aceleași coordonate $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

9. Să se arate că vectorul cu origina în $A(-3,-3)$ și extremitatea în $B(6,3)$ este coliniar cu vectorul cu origina în $C(2,5)$ și extremitatea în $D(-4,1)$.

Ind. Se va arăta că $\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se arate că punctele $A(-3,2,4)$, $B(6,5,10)$ **şi** $C(3,4,8)$ **sunt aşezate pe o aceiaşi dreaptă.**

Ind. Se arată că vectorii $\overrightarrow{AB} = 9\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 6\bar{k}$ şi $\overrightarrow{AC} = 6\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 4\bar{k}$ sunt coliniari.

11. Vârfurile unui patrulater sunt: $A(2,0,-4)$, $B(7,-15,16)$, $C(-1,-1,11)$, $D(-4,8,-1)$. **Să se arate că** $ABCD$ **este un trapez.**

Ind. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari (vezi şi exerciţiul precedent).

12. Vârfurile unui triunghiu sunt $(-1,1)$, $(4,3)$, $(2,6)$. **Să se scrie ecuaţiile dreptelor trecând prin fiecare vârf şi paralele cu laturile opuse.**

Ind. Se va utiliza forma $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n}$ a ecuaţiei dreptei trecând prin (a,b) şi paralelă cu vectorul $m\bar{\imath} + n\bar{\jmath}$.

13. Vârfurile unui tetraedru sunt în punctele $A_1(\bar{r}_1)$, $A_2(\bar{r}_2)$, $A_3(\bar{r}_3)$, $A_4(\bar{r}_4)$. **Să se scrie dreapta trecând prin** A **şi paralelă cu mediana** BM **a triunghiului** BCD.

Ind. Se află parametrii directori (componentele) medianei. Se aplică formula precedentă (în spaţiu).

14. Să se scrie ecuaţia planului trecând prin origina sistemului de coordonate şi prin punctele $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$.

Ind. Se utilizează ecuaţia planului trecând prin trei puncte:

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) + \mu(\bar{r}_3 - \bar{r}_1).$$

15. Fie tetraedrul $A(-1,2,0)$, $B(3,1,2)$, $C(1,-2,-1)$, $D(4,3,1)$. **Să se scrie ecuaţiile următoarelor plane: a) a feţei** ABC, **b) a planului trecând prin muchia** AB **şi paralel cu muchia** CD, **c) a planului trecând prin vârful** D **şi paralel cu faţa** ABC.

Ind. Se aplică direct formulele cunoscute.

16. Dacă într'un exagon strâmb $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ **laturile opuse sunt două câte două paralele** $A_1A_2 \parallel A_4A_5$; $A_2A_3 \parallel A_5A_6$; $A_3A_4 \parallel A_6A_1$ **atunci diagonalele ce unesc vârfurile opuse (adică dreptele** A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6) **sunt concurente şi se taie în părţi egale.**

Ind. Punem $\overrightarrow{A_1A_2} = \bar{a}$, $\overrightarrow{A_2A_3} = \bar{b}$, $\overrightarrow{A_3A_4} = \bar{c}$,

$$\overrightarrow{A_4A_5} = \lambda\bar{a},\quad \overrightarrow{A_5A_6} = \mu\bar{b},\quad \overrightarrow{A_6A_1} = \nu\bar{c}$$

şi observând că rezultanta laturilor e nulă, avem:

$$(1+\lambda)\bar{a} + (1+\mu)\bar{b} + (1+\nu)\bar{c} = 0.$$

Cum însă $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt (conform ipotezei) necoplanuri, rezultă

$\lambda = \mu = \nu = -1$, deci $\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{A_4A_5}$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

17. **Pe laturile A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 ale unui triunghiu se scriu punctele L, M, N. Notând**

$$\frac{\overrightarrow{A_1L}}{\overrightarrow{LA_2}} = \lambda, \quad \frac{\overrightarrow{A_2M}}{\overrightarrow{MA_3}} = \mu, \quad \frac{\overrightarrow{A_3N}}{\overrightarrow{NA_1}} = \nu.$$

Să se arate că pentru ca punctele L, M, N să fie coliniare este necesar și suficient ca $\lambda\mu\nu = -1$. (Teorema lui MENELAOS și reciproca ei).

Ind. $\bar{r}_L = \frac{r_1 + \lambda\bar{r}_2}{1+\lambda}$, $\bar{r}_M = \frac{\bar{r}_2 + \mu\bar{r}_3}{1+\mu}$, $\bar{r}_N = \frac{\bar{r}_3 + \nu\bar{r}_1}{1+\nu}$ deci

$$\overrightarrow{LM} = \frac{\bar{r}_2 + \mu\bar{r}_3}{1+\mu} - \frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1+\lambda} \text{ și } \overrightarrow{MN} = \frac{\bar{r}_3 + \nu\bar{r}_1}{1+\nu} - \frac{\bar{r}_2 + \mu\bar{r}_3}{1+\mu}$$

Ca acești doi vectori să fie coliniari, trebue ca $\overrightarrow{LM} = \omega\,\overrightarrow{MN}$. Luând pentru simplificare origina în A_3 ($\bar{r}_2 = 0$) și comparând coeficienții lui $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$, se obțin două relații, din care, prin eliminarea lui ω, se capătă $\lambda\mu\nu = -1$.

Se pot întrebuința și alte criterii de coliniaritate.

18. **Fie un patrulater strâmb $A_1A_2A_3A_4$. Pe laturile A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 se iau respectiv punctele L, M, N, P și se pune**

$$\frac{\overrightarrow{A_1L}}{\overrightarrow{LA_2}} = \lambda; \quad \frac{\overrightarrow{A_2M}}{\overrightarrow{MA_3}} = \mu; \quad \frac{\overrightarrow{A_3N}}{\overrightarrow{NA_4}} = \nu; \quad \frac{\overrightarrow{A_4P}}{\overrightarrow{PA_1}} = \pi.$$

Condiția necesară și suficientă ca punctele L, M, N, P să fie coplanare este ca $\lambda\mu\nu\pi = +1$. (Generalizare în spațiu a teoremei precedente).

Ind. Avem

$$\alpha\frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1+\lambda} + \beta\frac{\bar{r}_2 + \mu\bar{r}_3}{1+\mu} + \gamma\frac{\bar{r}_3 + \nu\bar{r}_4}{1+\nu} + \delta\frac{\bar{r}_4 + \pi\bar{r}_5}{1+\pi} = 0$$

cu $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. Luând $\bar{r}_4 = 0$, anulăm coeficienții lui $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ (necoplanari!). Eliminând din 3 ecuații astfel obținute și $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, pe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, găsim condiția cerută.

19. **Trei drepte paralele l_1, l_2, l_3 sunt tăiate de trei secante paralele m_1, m_2, m_3. Notând punctul de intersecții a dreptelor l_i și m_χ prin $P_{i\chi}$ ($i, \chi = 1, 2, 3$), să se arate că dreptele $P_{12}P_{21}$, $P_{13}P_{31}$, $P_{23}P_{32}$ sunt concurente.**

Ind. Luăm origina în punctul P_{11} şi punem

$$\bar{r}_{12} = \bar{a} \; ; \; \bar{r}_{13} = \lambda \bar{a} \; ; \; \bar{r}_{21} = \bar{b} \; ; \; \bar{r}_{31} = \mu \bar{b} \; ;$$

atunci $\bar{r}_{23} = \bar{b} + \lambda \bar{a}$ şi $\bar{r}_{32} = \bar{a} + \mu \bar{b}$.

După cum punctul este pe $P_{12} P_{21}$ sau $P_{13} P_{31}$ sau $P_{23} P_{32}$, vectorul său de poziţie e de forma

$$\xi \bar{a} + (1-\xi) \bar{b} \; ; \; \eta \lambda \bar{a} + (1-\eta) \mu \bar{b} \; ; \; \zeta (\bar{b} + \lambda \bar{a}) + (1-\zeta)(\bar{a} + \mu \bar{b}).$$

Totul revine acum la cercetarea compatibilităţii a următoarelor două ecuaţii vectoriale

$$\xi \bar{a} + (1-\xi) \bar{b} = \eta \lambda \bar{a} + (1-\eta) \mu \bar{b} = \zeta (\bar{b} + \lambda \bar{a}) + (1-\zeta)(\bar{a} + \mu \bar{b})$$

cu trei necunoscute ξ, η, ζ. Comparând coeficienţii lui $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, obţinem 4 ecuaţii scalare

$$\xi = \lambda\eta = \lambda\zeta + 1 - \zeta \; ; \; 1 - \xi = \mu(1-\eta) = \zeta + \mu(1-\zeta)$$

care rezolvate ne dau

$$\xi = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu - \lambda} \; , \; \eta = \frac{\mu - 1}{\mu - \lambda} \; , \; \zeta = \frac{\mu}{\mu - \lambda} \; .$$

20. Pe laturile unui triunghiu $A_1 A_2 A_3$ se iau trei puncte $B_1 B_2 B_3$ astfel încât $\overrightarrow{A_2 B_1} = \lambda_1 \overrightarrow{B_1 A_3}$, $\overrightarrow{A_3 B_2} = \lambda_2 \overrightarrow{B_2 A_1}$, $\overrightarrow{A_1 B_3} = \lambda_3 \overrightarrow{B_3 A_2}$. Să se arate, că condiţia necesară şi suficientă ca dreptele $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ să fie concurente este $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1$ (Teorema lui CEVA).

Ind. După cum punctul se află pe $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ sau $A_3 B_3$ vectorul său de poziţie este:

$$\xi_1 \frac{\bar{r}_2 + \lambda_1 \bar{r}_3}{1 + \lambda_1} + (1 - \xi_1) \bar{r}_1 \; ; \; \xi_2 \frac{\bar{r}_3 + \lambda_2 \bar{r}_1}{1 + \lambda_2} + (1 - \xi_2) \bar{r}_2 \; ;$$

$$\xi_3 \frac{\bar{r}_1 + \lambda_3 \bar{r}_2}{1 + \lambda_3} + (1 - \xi) \bar{r}_3 \; .$$

Egalând aceşti vectori şi punând pentru simplificare $\bar{r}_1 = 0$ se obţin pentru cele 3 necunoscute ξ_i, patru ecuaţii. Eliminând dintre aceste ecuaţii pe ξ_i se capătă condiţia cerută.

21. Să se arate că relaţia $\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c} = \alpha \bar{m} + \beta \bar{n} + \gamma \bar{p}$ atrage necesar coplanaritatea vectorilor $\bar{a} - \bar{m}$, $\bar{b} - \bar{n}$, $\bar{c} - \bar{p}$.

Ind. Avem $\alpha(\bar{a} - \bar{m}) + \beta(\bar{b} - \bar{n}) + \gamma(\bar{c} - \bar{p}) = 0$.

22. Să se arate că vectorii $\bar{b} + \bar{c} - 2\bar{a}$, $\bar{c} + \bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$ sunt coplanari. Considerând tetraedrul $P_o P_a P_b P_c$ unde $P_o P_a$, $P_o P_b$, $P_o P_c$ sunt egali în mărime şi direcţie cu vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, să se arate că vectorii

$$\frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c} - 2\bar{a}) \; , \; \frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{a} - 2\bar{b}) \; , \; \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c})$$

Scanned with OKEN Scanner

sunt egali cu medianele triunghiului $P_a P_b P_c$.

Ind. Adunând vectorii dați constatăm imediat coplanaritatea lor.

Vectorul $-\bar{c}$ leagă P_c (ca origine) cu P_o (ca extremitate).

Vectorul $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ leagă P_o cu mijlocul segmentului $P_a P_b$.

Rezultă că $-\bar{c}+\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ unește P_c cu mijlocul lui $P_a P_b$.

Analog pentru ceilalți vectori.

23. **Se dau în plan punctele $A(-2,-3)$ și $B(4,5)$. Să se găsească componentele vectorului unitar al vectorului $\overrightarrow{AB}$.**

Ind. Aceste componente sunt cosinusii directori ai dreptei AB.

24. **Să se arate că, dacă vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ $\frac{\bar{a}}{a}+\frac{\bar{b}}{b}$ sunt construiți cu originea într'un acelaș punct O, atunci ultimul vector bisectează unghiul format de primii doi.**

Ind. Vectorii $\frac{\bar{a}}{a}$ și $\frac{\bar{b}}{b}$ sunt unitari. Paralelogramul construit pe ei este un romb cu diagonala $\frac{\bar{a}}{a}+\frac{\bar{b}}{b}$.

25. **Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil în cerc. Să se demonstreze relația**

$$\frac{(\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD})}{(\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{CD})} = -\frac{|\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{CB}|\,.\,|\overrightarrow{CD}|}$$

Ind. $(\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}) = |\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AD}|\,.\cos \widehat{BAD}$ și

$(\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{CD}) = |\overrightarrow{CB}|\,.\,|\overrightarrow{CD}|\cos \widehat{DCB}$.

Rămâne să observăm că $\widehat{BAD}+\widehat{DCB}=\pi$ și

$\cos \widehat{BAD} = -\cos \widehat{DCB}$.

26. **Să se arate că produsul scalar a doi vectori cari pleacă din vârful unui triunghiu spre celelalte două vârfuri se poate exprima în funcție de laturile triunghiului.**

Ind. $(\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$ cum rezultă din formula cunoscută $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$.

27. **Să se arate că, dacă $\bar{\sigma}$ este un vector unitar și $\bar{a}$ un vector oarecare, atunci vectorii $\bar{a}-(\bar{a}.\bar{\sigma})\,\bar{\sigma}$ și $\bar{\sigma}$ sunt perpendiculari. Să se interpreteze geometric.**

Ind. $\{\bar{a}-(\bar{a}.\bar{\sigma})\bar{\sigma}\}\bar{\sigma}=(\bar{a}.\bar{\sigma})-(\bar{a}.\bar{\sigma})\bar{\sigma}^2=0$ căci $\bar{\sigma}^2=1$.
Vectorul $\bar{a}-(\bar{a}.\bar{\sigma})\bar{\sigma}$ este proecția vectorului $\bar{a}$ pe un plan perpendicular pe $\bar{\sigma}$.

28. Să se arate că vectorii $\bar{a}(\bar{b}.\bar{c})-\bar{b}(\bar{a}.\bar{c})$ și $\bar{c}$ sunt perpendiculari.

Ind. Se arată, ca mai sus, nulitatea produsului lor scalar.

29. Ce condiție trebue să satisfacă vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ pentru ca suma și diferența lor să fie doi vectori perpendiculari?

Ind. Din $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})=a^2-b^2$ rezultă condiția $a=b$ (vectorii au aceiași valoare absolută). Geometricește aceasta înseamnă că pentru ca diagonalele unui paralelogram să fie perpendiculare, acesta trebue să fie un romb.

30. Să se verifice identitatea $(\bar{a}.\bar{b})=\frac{1}{2}(\bar{a}^2+\bar{b}^2-(\bar{a}-\bar{b})^2)$ și să se explice geometric.

Ind. Se verifică calculând direct membrul II. Pentru interpretare vezi problema 26.

31. In ce condiții este posibilă egalitatea $\bar{a}(\bar{b}.\bar{c})=(\bar{a}.\bar{b})\bar{c}$?

Ind. Egalitatea are loc dacă $(\bar{a}.\bar{b})=(\bar{b}.\bar{c})=0$.
Dacă ambele produse nu se anulează simultan, atunci din relația $\bar{a}(\bar{b}.\bar{c})=(\bar{a}.\bar{b})\bar{c}$ rezultă coliniaritatea lui $\bar{a}$ și $\bar{c}$. Fie $\bar{a}=\lambda\bar{c}$, înlocuind în egalitatea noastră, obținem o identitate.

32. Să se găsească mărimea rezultantei a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, aplicați în acelaș punct, cunoscând $|\bar{a}|,|\bar{b}|$ și unghiul $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$. Aceiași chestiune pentru trei vectori $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, cunoscând $|\bar{a}|,|\bar{b}|,|\bar{c}|$ și trei unghiuri între direcțiile vectorilor, luate câte două.

Ind. Fie $\bar{r}=$ rezultanta, $(\bar{a}.\bar{b})=\gamma$. Din $\bar{r}=\bar{a}+\bar{b}$ se găsește $\bar{r}^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\gamma$. Analog pentru trei vectori

33. Să se demonstreze formula

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha=\frac{\sin 2\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Să se generalizeze pentru $\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha$.

Ind. Primul membru poate fi scris sub forma $\bar{1}(\bar{1}+\bar{1}_1+\bar{1}_2+\bar{1}_3)$ unde $\bar{1},\bar{1}_1,\bar{1}_2,\bar{1}_3$ sunt vectorii unitari pentru cari $(\widehat{\bar{1},\bar{1}_1})=\alpha$, $(\widehat{\bar{1},\bar{1}_2})=2\alpha$, $(\widehat{\bar{1},\bar{1}_3})=3\alpha$, deci $(\bar{1}.\bar{1}_1)=(\bar{1}_1.\bar{1}_2)=(\bar{1}_2.\bar{1}_3=\alpha$.

Suma geometrică $\bar{\imath} + \bar{\imath}_1 + \bar{\imath}_2 + \bar{\imath}_3$ formează o linie poligonală $ABCDE$, regulată, deci $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}) = |AE| \cdot \cos \widehat{BAE}$. Dacă înscriem linia poligonală într'un cerc cu centru O, se vede uşor că 1) $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE} = +\frac{\alpha}{2}$; deci $\widehat{BAE} = \frac{3\alpha}{2}$; 2) $\widehat{AOB} = \alpha$, deci $\widehat{AOE} = 4\alpha$. Cum însă coardele sunt proporţionale cu sinusurile jumătăţilor unghiurilor la centru corespunzătoare, rezultă

$$AE : AB = \sin 2\alpha : \sin\frac{\alpha}{2}; \quad \text{deci } AE = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

In general, vom avea

$$\sum_{n}^{k=0} \cos k\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

34. Se dau punctele $A\,(5, -2, 1)$, $B\,(-3, 0, 2)$, $C\,(1, 3, -3)$ şi $D\,(2, 6, -1)$. Să se arate că dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

Ind. Se va stabili că produsul scalar $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD})$ este nul.

35. Să se determine unghiurile interioare ale triunghiului $A\,(2, -5, 1)$, $B\,(6, -3, 5)$, $C\,(6, -4, 9)$.

Ind. Pentru a afla, de ex. unghiul A, calculăm componentele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$. Se utilizează apoi formula

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) : |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|.$$

Pentru a afla unghiurile în grade întrebuinţăm tabelele vectorilor naturale.

36. Trei vectori $X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath} + Z\bar{k}$, $X'\bar{\imath} + Y'\bar{\jmath} + Z'\bar{k}$, $X''\bar{\imath} + Y''\bar{\jmath} + Z''\bar{k}$ perpendiculari pe un acelaş vector $l\bar{\imath} + m\bar{\jmath} + n\bar{k}$ sunt coplanari şi reciproc. Plecând de aici să se găsească condiţia de coplanaritate a trei vectori daţi prin componentele lor.

Ind. Ca cei 3 vectori să fie coplanari este necesar şi suficient să existe un vector $l\bar{\imath} + m\bar{\jmath} + n\bar{k}$ astfel încât

$lX + mY + nZ = 0$, $lX' + mY' + nZ' = 0$, $lX'' + mY'' + nZ'' = 0$.

Ori, ca să existe 3 numere l, m, n care să satisfacă sistemul de mai sus şi să nu fie toate nule este necesar şi suficient ca determinantul sistemului să fie nul — ceiace exprimă condiţia căutată.

Scanned with OKEN Scanner

37. Coliniaritatea a doi vectori $X\bar{\imath}+Y\bar{\jmath}+Z\bar{k}$ și $X'\bar{\imath}+Y'\bar{\jmath}+Z'\bar{k}$ se poate exprima fie prin relația $\frac{X}{X'}=\frac{Y}{Y'}=\frac{Z}{Z'}$, fie prin formula

$$\frac{XX'+YY'+ZZ'}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\ \sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}}=\pm 1\ .$$

Să se arate că fiecare din aceste formule este o consecință a celeilalte.

Ind. Plecând de la prima relație, punem $X'=\lambda X$, $Y'=\lambda Y$, $Z=\lambda Z$. Inlocuind în a doua relație se obține o identitate. Invers, din a doua relație rezultă

$$(XX'+YY'+ZZ')^2=(X^2+Y^2+Z^2)\ (X'^2+Y'^2+Z'^2)\ .$$

Făcând calculele se găsește

$$(XY'-X'Y)^2+(YZ'-Y'Z)^2+(ZX-ZX)^2=0$$

relația ce nu poate avea loc decât dacă toți termenii sunt nuli, ceiace conduce la prima formulă.

38. Fie triunghiul $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$, $C(\bar{r}_3)$. Să se scrie ecuațiile celor trei înălțimi și să se verifice concurența lor.

Ind. Ecuațiile înălțimilor sunt $(\bar{r}-\bar{r}_1)(\bar{r}_2-\bar{r}_3)=0$,
$(\bar{r}-\bar{r}_2)(\bar{r}_3-\bar{r}_1)=0$, $(\bar{r}-\bar{r}_3)(\bar{r}_1-\bar{r}_2)=0$.
Adunând două din aceste ecuații și făcând calcule simple se obține a treia, ceiace ne arată că o înălțime aparține fasciculului de drepte determinat de celelalte două înălțimi.

39. Să se scrie înălțimile triunghiului $A(-1,1)$, $B(4,3)$, $C(2,6)$.

Ind. Se calculează $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$. Se aplică forma din exercițiul precedent.

40. Fie triunghiul $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$, $C(\bar{r}_3)$. Să se scrie ecuațiile dreptelor duse prin mijloacele laturilor și perpendiculare pe laturile respective.

Ind. Scriind condiția de ortogonalitate se obține ușor

$$\bar{r}(\bar{r}_1-\bar{r}_2)=\frac{1}{2}(\bar{r}_1^2-\bar{r}_2^2)\ \text{etc.}$$

41. Să se găsească unghiul format de dreptele $3y-2x=12$ și $5x+4y=15$.

Ind. Se scriu vectorii normali la aceste drepte și se găsește unghiul lor cu ajutorul produsului scalar.

42. Să se găsească locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date $A(\bar{r}_1)$ și $A(\bar{r}_2)$.

Ind. Condiția egalității distanțelor este $(\bar{r}-\bar{r}_1)^2=(\bar{r}-\bar{r}_2)^2$. Făcând calcule se obține $2\bar{r}(\bar{r}_2-\bar{r}_1)=\bar{r}_2^2-\bar{r}_1^2$; adică ecuația dreptei perpendiculare pe $\bar{r}_2-\bar{r}_1$ și trecând prin mijlocul lui AB.

Scanned with OKEN Scanner

43. Să se scrie ecuația dreptei trecând prin punctul $A(\bar{r}_1)$ și echidistantă de punctele $B(\bar{r}_2)$ și $C(\bar{r}_3)$.

Ind. Fie $\bar{r}\,\bar{n}_0 - p = 0$ ecuația dreptei căutate. Atunci $\bar{r}_1\,\bar{n}_0 - p = 0$ și $|\bar{r}_2\,\bar{n}_0 - p| = |\bar{r}_3\,\bar{n}_0 - p|$. Ultima egalitate se descompune în două: fie $\bar{r}_2\,\bar{n}_0 - p = \bar{r}_3\,\bar{n}_0 - p$, de unde $(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)\,\bar{n}_0 = 0$ deci $\bar{n}_0 \perp (\bar{r}_3 - \bar{r}_2)$, deci dreapta căutată este paralelă cu $(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)$ și deci se poate scrie parametric $\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)$; fie $\bar{r}_2\,\bar{n}_0 - p = -(\bar{r}_3\,\bar{n}_0 - p)$ deci $(\bar{r}_2 + \bar{r}_3)\,\bar{n}_0 = 2p$. Eliminând din ultima ecuație și din $\bar{r}_1\,n_0 - p = 0$ pe p se capătă $(\bar{r}_2 + \bar{r}_3 - 2\bar{r}_1)\,\bar{n}_0 = 0$, deci dreapta căutată este paralelă cu vectorul $\bar{r}_2 + \bar{r}_3 - 2\bar{r}_1 \left(= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ și se scrie

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda(\bar{r}_2 + \bar{r}_3 - 2\bar{r}_1).$$

Să se transcrie cartezian ambele cazuri.

44. Să se arate că ecuația vectorială $\bar{r}^2 + (\bar{m}.\,\bar{r}) = \mu$ ($\bar{m}$ = vector constant, μ = un scalar fix) reprezintă un cerc. Să se găsească centrul și raza cercului.

Ind. Adunând în ambii membri $\frac{\bar{m}^2}{4}$ se obține $\left(\bar{r} + \frac{\bar{m}}{2}\right)^2 = \mu + \frac{\bar{m}^2}{4}$

deci un cerc de centru $\left(-\frac{\bar{m}^2}{2}\right)$ și raza $\sqrt{\mu + \frac{\bar{m}^2}{4}}$.

45. Să se scrie ecuația unui cerc având $\overline{AB}$ $(A(\bar{r}_1), B(\bar{r}_2))$ ca diametru.

Ind. Fie $M(\bar{r})$ un punct oarecare al cercului. Atunci $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ adică $(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_2) = 0$.

Altfel: Centrul cercului fiind în punctul $\frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}$, iar raza egală cu $\frac{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}{2}$ rezultă ecuația $\left(\bar{r} - \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}\right)^2 = \frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}{4}$.

46. Fie două puncte A și B. Să se găsească locul geometric al punctelor M pentru care $(\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM}) = \alpha = \text{const.}$

Ind. Punem $\overrightarrow{AB} = 2\bar{c}$ și luăm ca pol jumătatea segmentului AB. Vectorii de poziție a punctelor A și B vor fi deci respectiv $-\bar{c}$ și $\bar{c}$. $\bar{r}$ fiind raza vectoare a lui M, avem

$$(\bar{r} + \bar{c})(\bar{r} - \bar{c}) = \alpha \text{ sau } \bar{r}^2 = \bar{c}^2 + \alpha,$$

deci un cerc (real dacă $\alpha > -c^2$) cu centrul în pol.

47. **Să se găsească condiția ca dreapta $\bar{r}\,\bar{n} = s$ să fie tangentă la cercul $(\bar{r}-\bar{c})^2 = a^2$.**

Ind. Centrul (c) trebue să fie la distanța a de dreaptă. Scriind ecuația dreptei sub forma normală $\dfrac{\bar{r}\,\bar{n} - s}{\pm n} = 0$, se obține condiția căutată $(\bar{r}\,\bar{n} - s)^2 = a^2 n^2$.

48. **Să se scrie ecuația polarei punctului $(\bar{r}_1)$ față de cercul $(\bar{r}-\bar{c})^2 = a^2$.**

Ind. Se consideră polara drept coarda contactelor celor două tangente duse din $(\bar{r}_1)$ la cerc. Se capătă $(\bar{r}_1-\bar{c})\,(\bar{r}-\bar{c}) = a^2$. Se observă că ecuația polarei se obține prin „polarizarea" ecuației cercului (ca și în geometria cartesiană).

49. **Să se arate că planele $2x-5y+z+4=0$ și $3x+2y+4z-1=0$ sunt perpendiculare.**

Ind. Se verifică (cu ajutorul produsului scalar) perpendicularitatea normalelor.

50. **Să se găsească unghiul dintre planele $2x-y+2z-5=0$ și $6x+2y-3z+4=0$.**

Ind. Acest unghiu este egal cu unghiul normalelor.

51. **Fie punctul $M(\bar{r}_1)$ și planul $\bar{r}\,\bar{n}_0 - p = 0$. Să se găsească vectorii de poziție: a) a piciorului perpendicularei duse din M pe plan, b) a punctului M' simetric cu M față de plan.**

Ind. Primul vector este $\bar{r}_1 - (\bar{r}_1\,\bar{n}_0 - p)\,\bar{n}_0$;
al doilea, $\bar{r}'_M = \bar{r}_1 - 2\,(\bar{r}, \bar{n}_0 - p)\,\bar{n}_0$.

52. **Să se demonstreze că, oricare ar fi poziția punctelor A, B, C, D, are loc relația $(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}) = 0$.**

Ind. Exprimăm fiecare vector prin vectorii de poziție ai originii și extremității. Inlocuind, obținem o identitate.

53. **Să se demonstreze că, dacă într'un tetraedru $ABCD$ două muchii sunt respectiv perpendiculare pe muchiile opuse, atunci și cele două muchii rămase sunt perpendiculare.**

Ind. Se va folosi rezultatul problemei precedente. Dacă $(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}) = 0$ rezultă din relația demonstrată că și $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}) = 0$.

54. **Intr'un triunghiu ABC se duce bisectoarea CD. Punând $\overrightarrow{CA} = \bar{b}$, $\overrightarrow{CB} = \bar{a}$, avem $\overrightarrow{CD} = \dfrac{a\bar{b} + b\bar{a}}{a+b}$. Să se deducă de aici formula care ne dă lungimea bisectoarei: $CD = \dfrac{2\,ab\,.\,\cos\frac{C}{2}}{b+c}$.**

Ind. $\overrightarrow{CD}^2 = \dfrac{(a\bar{b} + b\bar{a})^2}{(a+b)^2} = \dfrac{2a^2b^2 + 2\,(\bar{a}\,.\,\bar{b})\,.\,ab}{(a+b)^2}$. Inlocuind $(\bar{a}\,.\,\bar{b})$ prin $ab\cos C$ se obține formula cerută.

55. Să se demonstreze că, dacă într'un patrulater diagonalele sunt perpendiculare, atunci suma patratelor a două laturi opuse este egală cu suma patratelor celorlalte două laturi opuse.

Ind. Fie patrulaterul $ABCD$ și O punctul de intersecție al diagonalelor. Punând $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$, $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$, $\overrightarrow{OC}=-\lambda\bar{a}$, $\overrightarrow{OD}=-\mu\bar{b}$ $(\lambda,\mu>0)$, e suficient să arătăm că fiecare din relațiile $(\bar{a}.\bar{b})=0$ și $(\bar{a}-\bar{b})^2+(\lambda\bar{a}-\mu\bar{b})^2=(\bar{b}+\lambda\bar{a})^2+(\bar{a}+\mu\bar{b})^2$ este o consecință a celeilalte (de fapt, a 2-a relație, după calcul, se aduce la forma $(\bar{a}.\bar{b})(1+\lambda\mu+\lambda+\mu)=0$ deci $(\bar{a}.\bar{b})=0$.

56. Să se demonstreze că într'o piramidă triunghiulară regulată, muchiile opuse sunt perdiculare între ele.

Ind. Fie piramida $OABC$, în care $OA=OB=OC$ și $\hat{AOB}=\hat{BOC}=\hat{COA}$. Atunci $(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}\ (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$ deoarece $(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB})$

57. Fiind dat sistemul triplu-ortogonal de coordonate O,x,y,z, să se găsească unghiul dintre bisectoarele unghiurilor xOy și xOz.

Ind. $\cos\varphi=\dfrac{(\bar{\imath}+\bar{\jmath})\ (\bar{\imath}+\bar{k})}{\sqrt{\bar{\imath}^2+\bar{\jmath}^2}\ \sqrt{\bar{\imath}^2+\bar{k}^2}}=\dfrac{1}{2}$; deci $\varphi+60°$.

58. In interiorul triunghiului ABC se ia un punct O. Să se arate că condiția de echivalență a triunghiurilor OAB, OBC și OCA este $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$.

Ind. Punem $\overrightarrow{OA}=\bar{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\bar{r}_2$, $\overrightarrow{OC}=\bar{r}_3$. Scriem condiția de egalitate a ariilor, în care înlocuim $\bar{r}_1=\xi\bar{r}_2+\eta\bar{r}_3$. Se obține $\xi=\eta=-1$, deci $\Sigma\bar{r}_i=0$.

59. Să se găsească piciorul perpendicularei duse din origină pe dreapta de intersecție a planelor $\bar{r}\bar{n}=s$ și $\bar{r}\bar{n}'=s'$.

Ind. Fie P punctul căutat. Atunci $\bar{r}_P=\alpha\bar{n}+\beta\bar{n}'$. Inlocuind în ecuațiile celor două plane, obținem $\alpha\bar{n}^2+\beta(\bar{n}\bar{n}')=s$, $\alpha(\bar{n}\bar{n}')+\beta\bar{n}'^2=s'$, de unde scoatem pe α și β.

60. Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$. Prin mijlocul fiecărei muchii se duce câte un plan perpendicular pe acea muchie. Să se scrie ecuațiile acestor plane și să se arate că toate trec printr'un același punct. Să se arate că ultima proprietate se păstrează dacă înlocuim fiecare din plane prin câte un plan trecând prin mijlocul muchiei și perpendicular pe muchia opusă.

Ind. Ecuațiile celor 6 plane sunt (vezi probl. 51) $2\bar{r}(\bar{r}_1-\bar{r}_2)=\bar{r}_1^2-\bar{r}_2^2$ etc. Trei din aceste ecuații sunt consecințele ce-

Scanned with OKEN Scanner

lorlalte trei (se vede scăzându-le membru cu membru) deci trei din plane aparţin snopului determinat de celelalte trei. Planele din a 2-a parte a problemei se scriu $2\bar{r}(\bar{r}_3 - \bar{r}_4) = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)(\bar{r}_3 - \bar{r}_4)$; concurenţa lor se arată analog.

61. Să se demonstreze direct formula $[\bar{a}, \bar{b}]^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = a^2 b^2$.

Ind. $[\bar{a}, \bar{b}]^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = (ab \sin \alpha)^2 + (ab \cos \alpha)^2 = a^2 b^2$.

62. Să se arate că $[(\bar{a} - \bar{b}), (\bar{a} + \bar{b})] = 2[\bar{a}, \bar{b}]$ **şi să se interpreteze geometric formula.**

Ind. Formula se verifică prin calcul direct. Interpretarea este: dacă pe diagonalele unui paralelogram se construeşte un nou paralelogram, suprafaţa acestuia din urmă este egală cu dublul suprafeţii primului paralelogram.

63. Fie $\bar{a} = 3\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 4\bar{k}$ **şi** $\bar{b} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - 3\bar{k}$. **Să se găsească componentele vectorului** $[\bar{a}, \bar{b}]$. **Să se verifice că** $[\bar{a}, \bar{b}]$ **este perpendicular pe** $\bar{a}$ **şi** $\bar{b}$.

Ind. Verificarea se face utilizând produsul scalar.

64. Ce semnificaţie geometrică au expresiile:

$$X_1 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_1 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_1 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{şi}$$

$$X_2 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_2 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0$$

unde (X_1, Y_1, Z_1) **şi** (X_2, Y_2, Z_2) **sunt componentele a doi vectori** $\bar{a}$ **şi** $\bar{b}$ **?**

Ind. Exprimă perpendicularitatea lui $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ pe $[\bar{a}, \bar{b}]$.

65. Să se scrie ecuaţia unui plan trecând pe trei puncte date $A(x_1 y_1 z_1)$, $B(x_2 y_2 z_2)$, $C(x_3 y_3 z_3)$.

Ind. Se scrie vectorul normal pe plan, Acest vector are drept componente $\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$ etc. Ecuaţia planului se poate pune sub forma unui determinant unic.

66. Să se arate că dacă $[\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{c}, \bar{d}]$ **şi** $[\bar{a}, \bar{c}] = [\bar{b}, \bar{d}]$ **atunci vectorii** $\bar{a} - \bar{d}$ **şi** $\bar{b} - \bar{c}$ **sunt coliniari.**

Ind. $[\bar{a} - \bar{d}, \bar{b} - \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] - [\bar{a}, \bar{c}] - [\bar{d}, \bar{b}] + [\bar{d}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] - [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{d}] - [\bar{c}, \bar{d}] = 0$.

67. Să se exprime cu ajutorul produsului vectorial condiţia ca trei puncte $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$, $C(\bar{r}_3)$ **să fie coliniare.**

Ind. $[\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1] = 0$ **sau** $[\bar{r}_1, \bar{r}_2] + [\bar{r}_2, \bar{r}_3] + [\bar{r}_3, \bar{r}_1] = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

68. **Să se exprime aria S a unui triunghiu prin vectorii de poziție $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ ai vârfurilor.**

Ind. $S = \frac{1}{2}\left|[\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1]\right|$ sau

$$S = \frac{1}{2}\left|[\bar{r}_1, \bar{r}_2] + [\bar{r}_2, \bar{r}_3] + [\bar{r}_3, \bar{r}_1]\right| .$$

69. **Dacă pentru trei vectori necoliniari avem**

$$[\bar{r}_1, \bar{r}_2] = [\bar{r}_2, \bar{r}_3] = [\bar{r}_3, \bar{r}_1],$$

atunci $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 = 0$. Să se verifice și să se explice geometric.

Ind. Din $[\bar{r}_1, \bar{r}_2] = [\bar{r}_2, \bar{r}_3]$ conchidem că $[(\bar{r}_1 + \bar{r}_3), \bar{r}_1] = 0$ adică $\bar{r}_2 = \lambda(\bar{r}_1 + \bar{r}_3)$. Inlocuind această valoare a lui $\bar{r}_2$ în $[\bar{r}_2, \bar{r}_3] = [\bar{r}_3, \bar{r}_1]$, găsim $\lambda = -1$. Origina este în acest caz „centrul de greutate" al triunghiului $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$, $C(\bar{r}_3)$.

70. **Vectorul $\bar{F} = 2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 3\bar{k}$ este aplicat în punctul $M(1,5,-2)$. Să se găsească momentul lui $\bar{F}$: a) față de origina, b) față de punctul $A(5,-3,4)$.**

Ind. Se aplică definiția momentului.

71. **Fie $A(-1,2,-2)$, $B(-2,5;1)$, $C(-1,6,0)$, $D(2,3,-6)$ vârfurile unui patrulater. Să se arate că acest patrulater este plan și să i se calculeze aria.**

Ind. $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = -6\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 4\bar{k}$; $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = -18\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 12\bar{k}$ deci au aceiași direcție. Rezultă că triunghiurile ABC și ACD sunt coplanare și nu se suprapun. Aria $ABCD$ = aria ABC + + aria ACD = aria ABC + 3 arii ABC = $4\frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 2^2 + 4^2}$.

72. **Să sd calculeze aria din problema precedentă, utilizând formula cunoscută: aria unui paralelogram este egală cu semiprodusul diagonalelor prin sinusul unghiului cuprins între ele.**

Ind. Formula amintită se scrie $S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]\right|$.

73. **$A(2,6,7)$, $B(-3,-2,0)$ și $C(1,1,2)$ fiind vârfurile unui triunghiu, să se găsească lungimea înălțimei AD.**

Ind. $AD = AB \sin B = AB \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|}{AB \cdot BC} = \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|}{BC}$.

74. **Să se efectueze produsele mixte: $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$, $(\bar{k}, \bar{\jmath}, \bar{\imath})$, $(\bar{\imath}, \bar{k}, \bar{\jmath})$, $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k})$.**

Scanned with OKEN Scanner

75. Să se efectueze produsul $(\bar{a}+\bar{b}, \bar{b}+\bar{c}, \bar{c}+\bar{a})$.

76. Să se arate că vectorii $\bar{a}=-\bar{\imath}+3\bar{\jmath}+2\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{\imath}-6\bar{\jmath}+2\bar{k}$, $\bar{c}=-3\bar{\imath}+12\bar{\jmath}+11\bar{k}$ sunt coplanari.

Ind. Se va calcula produsul mixt $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

77. Să se verifice că punctele $A(4,-2,-2)$, $B(3,1,1)$, $C(4,2,0)$, $D(7,-1,-6)$ sunt așezate în același plan.

Ind. Se arată, ca mai sus, coplanaritatea vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AD}$.

78. Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile $A(2,-1,-1)$, $B(5,-1,2)$, $C(3,0,-3)$, $D(6,0,-1)$.

Ind. Se calculează produsul mixt $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

79. Vârfurile unui tetraedru sunt în punctele $A(1,-5,4)$, $B(0,-3,1)$, $C(-2,-4,3)$, $D(4,4,-2)$. Să se găsească înălțimea dusă din A.

Ind. Volumul (produsul mixt) se împarte la aria bazei BCD (valoarea abs. a produsului vectorial).

80. In ce caz $[[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c}]=[\bar{a}[\bar{b}, \bar{c}]]$?

Ind. Utilizând formula $[[\bar{a}, b]\bar{c}]=\bar{b}(\bar{a}, \bar{c})-\bar{a}(\bar{b}, \bar{c})$, chestiunea se reduce la aflarea condiției cu $\bar{a}(\bar{b}, \bar{c})=(\bar{a}, \bar{b})\bar{c}$.

81. Să se arate că $[\bar{a}[\bar{b}, \bar{c}]]+[\bar{b}[\bar{c}, \bar{a}]]+[\bar{c}[\bar{a}, \bar{b}]]=0$.

Ind. Se descompune formula de mai sus.

82. Să se arate că dacă $\bar{a} \perp \bar{b}$ atunci $[\bar{a}[\bar{a}[\bar{a}[\bar{a}, \bar{b}]]]]=a^4\bar{b}$ și să se explice geometric.

Ind. $[\bar{a}[\bar{b}, \bar{c}]]=-a^2\bar{b}$ căci $(\bar{a}.\bar{b})=0$ prin ipoteză, de aici $[\bar{a}[\bar{a}[\bar{a}, \bar{b}]]]=-a^2[\bar{a}, \bar{b}]$ și, în fine $[\bar{a}[\bar{a}[\bar{a}[\bar{a}, \bar{b}]]]]=-a^2[\bar{a}[\bar{a}, \bar{b}]]=-a^2(-a^2\bar{b})=a^4\bar{b}$.

Observăm că operația $[\bar{a}, \bar{b}]$ revine la: 1) o rotație a lui $\bar{b}$ de 90° într'un plan $\perp \bar{a}$ și 2) înmulțire cu scalarul a. Deci, înmulțirea quadruplă revine la o rotație de 360° și înmulțire cu a^4.

83. Să se arate că dacă $\bar{a} \perp \bar{b}-\bar{c}$, atunci $[\bar{a}[\bar{b}, \bar{c}]]$ este paralel cu $\bar{b}-\bar{c}$

Ind. Din condiția de perpendicularitate se deduce $(\bar{a}, \bar{b})=(\bar{a}, \bar{c})$. Se înlocuește în formulă.

84. Fie triunghiul ABC, $(\overrightarrow{CB}=\bar{a}, \overrightarrow{AC}=\bar{b})$. Să se exprime înălțimea $\overrightarrow{AD}=h$ cu ajutorul vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Ind. $\overrightarrow{AD}$ este proecția lui $\overrightarrow{AC}$ pe planul perpendicular pe $\overrightarrow{CB}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\bar{h} = \frac{1}{a^2}[\bar{a}[\bar{b},\bar{a}]]$. Acelaş rezultat se obţine punând $\bar{h} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \bar{b} + \lambda\bar{a}$ şi determinând λ din $(\bar{h}.\bar{a}) = 0$.

85. Să se arate că $[\bar{a},\bar{b}][\bar{c},\bar{d}] + [\bar{a},\bar{c}][\bar{d},\bar{b}] + [\bar{a},\bar{d}][\bar{b},\bar{c}] = 0$.

Ind. Aplicăm fiecărui produs formula cunoscută
$[\bar{a},\bar{b}][\bar{c},\bar{d}] = (\bar{a}.\bar{c})(\bar{b}.\bar{d}) - (\bar{a}.\bar{d})(\bar{b}.\bar{c})$.

86. Să se arate că $([\bar{a},\bar{b}][\bar{b},\bar{c}][\bar{c},\bar{a}]) = (\bar{a},\bar{b},\bar{c})^2$.

Ind. Facem produsul $[[\bar{a},\bar{b}],[\bar{b},\bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{b}\bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$. Înmulţind scalar cu $[\bar{c},\bar{a}]$ se obţine rezultatul cerut.

87. Să se demonstreze că, dacă vectorii $[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{b},\bar{c}]$ **şi** $[\bar{c},\bar{a}]$ **sunt coplanari, ei sunt necesar şi coliniari.**

Ind. Coplanaritatea se exprimă prin $([\bar{a},\bar{b}][\bar{b},\bar{c}][\bar{c},\bar{a}]) = 0$ deci, conform rezultatului precedent $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0$; adică $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ sunt coplanari, deci vectorii consideraţi fiind perpendiculari pe planul lor sunt coliniari.

88. Să se verifice identitatea

$$((\xi\bar{a}+\eta\bar{b}+\zeta\bar{c})(\xi'\bar{a}+\eta'\bar{b}+\zeta'\bar{c})(\xi''\bar{a}+\eta''\bar{b}+\zeta''\bar{c})) = \begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi' & \eta' & \zeta'\\ \xi'' & \eta'' & \zeta''\end{vmatrix}(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$$

Ind. Desfăcând parantezele obţinem 27 de termeni, din care numai 9 nenuli. Scoţând $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ în factor se obţine identitatea enunţată.

89. Să se verifice identităţile :

1. $[\bar{a},[\bar{b},[\bar{c},\bar{d}]]] = [\bar{a},\bar{c}](\bar{b}.\bar{d}) - [\bar{a},\bar{d}](\bar{b}.\bar{c})$

2. $[\bar{p},[\bar{q},[\bar{r},\bar{s}]]] = (\bar{p},\bar{r},\bar{s})\bar{q} - (\bar{p}.\bar{q})[\bar{r},\bar{s}]$

3. $([\bar{a},\bar{b}][\bar{x},\bar{y}]\bar{z}) = \begin{vmatrix}(\bar{a},\bar{x},\bar{y}) & (\bar{b},\bar{x},\bar{y})\\ (\bar{a}.\bar{z}) & (\bar{b}.\bar{z})\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(\bar{x}.\bar{z}) & (\bar{y}.\bar{z})\\ (\bar{a},\bar{b},\bar{x}) & (\bar{a},\bar{b},\bar{y})\end{vmatrix}$

4. $([\bar{a},\bar{b}][\bar{x},\bar{y}][\bar{u},\bar{v}]) = \begin{vmatrix}(\bar{a},\bar{x},\bar{y}) & (\bar{b},\bar{x},\bar{y})\\ (\bar{a},\bar{u},\bar{v}) & (\bar{b},\bar{u},\bar{v})\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(\bar{x},\bar{u},\bar{v}) & (\bar{y},\bar{u},\bar{v})\\ (\bar{a},\bar{b},\bar{x}) & (\bar{a},\bar{b},\bar{y})\end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix}([\bar{a},\bar{b}][\bar{x},\bar{y}]) & ([\bar{a},\bar{b}][\bar{x},\bar{z}])\\ ([\bar{a},\bar{c}][\bar{x},\bar{y}]) & ([\bar{a},\bar{c}][\bar{x},\bar{z}])\end{vmatrix} = (\bar{a}.\bar{x})(\bar{a},\bar{b},\bar{c})(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

6. $[\bar{a},\bar{b}]^2[\bar{a},\bar{c}]^2 - ([\bar{a},\bar{b}][\bar{a},\bar{c}])^2 = \bar{a}^2(\bar{a},\bar{b},\bar{c})^2$

7. $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})([\bar{x},\bar{y}][\bar{x}',\bar{y}']) = \begin{vmatrix}(\bar{a},\bar{x}) & (\bar{a},\bar{y}) & (\bar{a},\bar{x}',\bar{y}')\\ (\bar{b},\bar{x}) & (\bar{b},\bar{y}) & (\bar{b},\bar{x}',\bar{y}')\\ (\bar{c},\bar{x}) & (\bar{c},\bar{y}) & (\bar{c},\bar{x}',\bar{y}')\end{vmatrix}$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. 1. Aplicăm mai întâiu formula $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}.\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}.\bar{b})$

2. Punem în formula de mai sus $\bar{a} = \bar{p}$, $\bar{b} = \bar{q}$, $\bar{c} = [\bar{r}, \bar{s}]$.

3. Scriem primul membru sub forma $[\bar{z}[\bar{a}, \bar{b}]][\bar{x}, \bar{y}]$ sau $[\bar{a}, \bar{b}] . [[\bar{x}, \bar{y}]\bar{z}]$ şi aplicăm aceiaşi formulă.

4. In expresiile demonstrate la punctul (3) punem $\bar{z} = [\bar{u}, \bar{v}]$

5. După formula $[\bar{a}, \bar{b}][\bar{x}, \bar{y}] = \begin{vmatrix} (\bar{a}.\bar{x}) & (\bar{a}.\bar{y}) \\ (\bar{b}.\bar{x}) & (\bar{b}.\bar{y}) \end{vmatrix}$, determinantul este egal cu $[[\bar{a}, \bar{b}][\bar{a}, \bar{c}]][[\bar{x}, \bar{y}][\bar{x}, \bar{z}]]$.
Insă $[[\bar{a}, \bar{b}][\bar{a}, \bar{c}]] = \bar{a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$
şi $[[\bar{x}, \bar{y}][\bar{x}, \bar{z}]] = \bar{x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

6. Se deduce din relaţia demonstrată la (5), unde $\bar{x} = \bar{a}$, $\bar{y} = \bar{b}$, $\bar{z} = \bar{c}$.

7. Se aplică formula $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} (\bar{x}\bar{a}) & (\bar{x}\bar{b}) & (\bar{x}\bar{c}) \\ (\bar{y}\bar{a}) & (\bar{y}\bar{b}) & (\bar{y}\bar{c}) \\ (\bar{z}\bar{a}) & (\bar{z}\bar{b}) & (\bar{z}\bar{c}) \end{vmatrix}$.

90. Vectorii $[\bar{a}, \bar{b}], [\bar{a}, \bar{c}], [\bar{a}, \bar{d}]$ fiind coplanari oricum ar fi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, putem scrie $\beta[\bar{a}, \bar{b}] + \gamma[\bar{a}, \bar{c}] + \delta[\bar{a}, \bar{d}] = 0$. Să se exprime raportul coeficienţilor. Se cere $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})(\bar{a}, \bar{d}, \bar{e}) = \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) & (\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}) \\ (\bar{a}, \bar{c}, \bar{e}) & (\bar{a}, \bar{c}, \bar{e}) \end{vmatrix}$.

Ind. Inmulţind scalar relaţia liniară odată cu $\bar{b}$ şi apoi cu $\bar{c}$, obţinem $\beta : \gamma : \delta = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}) : (\bar{a}, \bar{d}, \bar{b}) : (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Inlocuind în relaţie şi înmulţind ambii membri scalar cu $\bar{e}$ se obţine identitatea cerută.

91. Fie un exagon strâmb $M_1, M_2 \ldots M_5$ având toate cele 6 unghiuri drepte; se construesc perpendicularele comune fiecărei perechi de laturi opuse. Să se arate că aceste perpendiculare sunt paralele cu un plan.

Ind. Notăm $\overrightarrow{M_1 M_2} = \bar{a}_1$, $\overrightarrow{M_2 M_3} = \bar{b}_3$, $\overrightarrow{M_3 M_4} = \bar{a}_2$, $\overrightarrow{M_4 M_5} = \bar{b}_1$, $\overrightarrow{M_5 M_6} = \bar{a}_3$, $\overrightarrow{M_6 M_1} = \bar{b}_2$. Atunci $\bar{b}_3 \| [\bar{a}_1 \bar{a}_2]$, $\bar{b}_1 \| [\bar{a}_2, \bar{a}_3]$, $\bar{b}_2 \| [\bar{a}_3, \bar{a}_1]$. Perpendicularele comune au respectiv direcţiile vectorilor $[\bar{a}_3 [\bar{a}_1, \bar{a}_2]], [\bar{a}_2 [\bar{a}_3, \bar{a}_1]], [\bar{a}_1 [\bar{a}_2 \bar{a}_3]]$. Ele sunt coplanare, ceiace se verifică uşor.

92. Să se demonstreze următoarea teoremă: Condiţia necesară şi suficientă ca înălţimile unui tetraedru $OABC$ să se întâlnească două câte două, este ca suma patratelor muchiilor opuse să fie aceiaşi pentru cele 3 perechi de muchii opuse.

Ind. A spune că înălțimile AA' și BB' sunt concurente este echivalent cu a spune că vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$ și $\overrightarrow{BB'}$ sunt coplanari.

Punând $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$, $\overrightarrow{OC} = \bar{c}$ și observând că $\overrightarrow{AB} = \bar{b} - \bar{a}$, $\overrightarrow{AA'} \parallel [\bar{b}\,\bar{c}]$ și $\overrightarrow{BB'} \parallel [\bar{a}\,\bar{c}]$ condiția de coplanaritate se scrie $((\bar{b}-\bar{a})\,[\bar{a},\bar{c}]\,[\bar{b},\bar{c}]) = 0$. Cum însă $[[\bar{a},\bar{c}]\,[\bar{b},\bar{c}]] = \bar{c}\,(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ și $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) \neq 0$, rezultă $(\bar{b}\,\bar{c}) = (\bar{a}\,\bar{c})$. Inlocuind aici $(\bar{b}\,.\,\bar{c})$ și $(\bar{a}\,.\,\bar{c})$ respectiv prin $\frac{1}{2}(\bar{b}^2+\bar{c}^2-(\bar{b}-\bar{c})^2)$ și $\frac{1}{2}(\bar{a}^2+\bar{c}^2-(\bar{a}-\bar{c})^2)$ se găsește $\bar{a}^2+(\bar{b}-\bar{c})^2 = \bar{b}^2+(\bar{a}-\bar{c})^2$ ceiace demonstrează teorema propusă.

93. Intr'un punct se construesc trei vectori necoplanari $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Să se arate că planul ce trece prin extremitățile lor este perpendicular pe vectorul $[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{b},\bar{c}]+[\bar{c},\bar{a}]$.

Ind. Vectorii $\bar{b}-\bar{a}$ și $\bar{c}-\bar{a}$ sunt în planul considerat; rezultă că vectorul $[\bar{b}-\bar{a},\bar{c}-\bar{a}] = [\bar{a},\bar{b}]+[\bar{b},\bar{c}]+[\bar{c},\bar{a}]$ este perpendicular pe acest plan.

94. Să se găsească piciorul perpendicularei dusă din punctul $(\bar{r}_1)$ pe dreapta $[\bar{r},\bar{a}] = \bar{M}$.

Ind. Totul revine la a găsi pe $\bar{r}$ din ecuațiile vectoriale $[\bar{r},\bar{a}] = \bar{M}$ și $(\bar{r}-\bar{r}_1)\,\bar{a} = 0$. Inmulțind vectorial prima ecuație cu $\bar{a}$, găsim $\bar{a}^2\,\bar{r} - \bar{a}\,(\bar{r}.\bar{a}) = [\bar{a},\bar{M}]$ dar în virtutea celei de a doua ecuații $(\bar{r}.\bar{a}) = (\bar{r}_1.\bar{a})$ deci $\bar{r} = \dfrac{[\bar{a},\bar{M}] + \bar{a}\,(\bar{r}_1\,\bar{a})}{\bar{a}^2}$.

95. Teorema lui PITAGORA. Să se demonstreze că într'un triunghiu dreptunghic suma patratelor catetelor este egală cu patratul ipotenuzei.

Ind. Fie triunghiul ABC, cu unghiul drept în A.

Punem $\overrightarrow{BC} = -\bar{a}$, $\overrightarrow{CA} = \bar{b}$, $\overrightarrow{AB} = \bar{c}$, deci $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$. Ridicând (scalar) la patrat se obține relația cerută.

96. Teorema lui EULER. Intr'un punct oarecare ABC, punctele U = centrul centrului circumscris, O = ortocentrul și S = centrul de greutate (punctul de întâlnire a medianelor) se găsesc pe o dreaptă (dreapta lui EULER), astfel încât $SO = 2\,SU$.

Ind. Se știe că, M fiind mijlocul laturii AB, avem $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{SM}$ și $\overrightarrow{CO} = \bar{a} + \bar{b} = 2\overrightarrow{UM}$. Prin scădere obținem $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{SU}$.

Scanned with OKEN Scanner

97. Să se demonstreze următoarea teoremă: Orice transversală trecând printr'un vârf C al unui triunghiu oarecare ABC, determină pe latura opusă AB două segmente AP și PB astfel încât

$$AP \cdot BP = CA^2 - CP^2 \quad \text{sau} \quad AP \cdot BP = CP^2 - CA^2$$

după cum punctul P este interior sau exterior segmentului AB.

Ind. Fie $\overrightarrow{CA} = \bar{s}$, $\overrightarrow{CB} = \bar{s}$, $\overrightarrow{CP} = \bar{t}$, $\overrightarrow{AP} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BP} = \bar{v}$; avem $\bar{u} = \bar{t} - \bar{s}$ și $\bar{v} = \bar{t} - \bar{s}$. Formăm produsul scalar $(\bar{u}, \bar{v})$ și înlocuim factorul $\bar{u}$ prin $\bar{t} + \bar{s} - (\bar{S} + \bar{s})$ și observând că $\bar{S} + \bar{s} \perp \bar{v}$ avem $(\bar{u}\,\bar{v}) = (\bar{t} + \bar{s})(\bar{t} - \bar{s}) = t^2 - s^2$.

98. Să se exprime aria unui triunghiu în funcție de laturile sale (Formula lui HERON).

Ind. Fie $\overrightarrow{CA} = \bar{b}$ și $\overrightarrow{CB} = \bar{a}$. Dublul ariei S este $2S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$, dar $|[\bar{a}, \bar{b}]|^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = a^2 b^2$, deci $4S^2 = a^2 b^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$. Dar $2(\bar{a} \cdot \bar{b}) = a^2 + b^2 - c^2$, deci $16 S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. Această formulă, prin transformări algebrice simple, notând $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, devine $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$.

99. Teorema lui APOLLONIUS: Locul unui punct P ale cărui distanțe la două puncte fixe A și B sunt într'un raport constant este un cerc (cercul lui APOLLONIUS).

Ind. Fie $AB = e$ și raportul dat $\alpha = \dfrac{m}{n}$. Notăm apoi $\overrightarrow{AP} = \bar{x}$, $\overrightarrow{BP} = \bar{y}$, $\overrightarrow{AM} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BM} = \bar{v}$, $\overrightarrow{MP} = \bar{r}$ unde M este un punct auxiliar, nedeterminat, pe AB. Avem $\bar{x} = \bar{r} + \bar{u}$ și $\bar{y} = \bar{r} + \bar{v}$. Din ipoteză rezultă că $r^2 = \alpha^2 y^2$ sau $r^2 + u^2 + 2(\bar{r} \cdot \bar{u}) = \alpha^2 r^2 + \alpha^2 v^2 + 2\alpha^2 (\bar{r} \cdot \bar{v})$ sau $(\alpha^2 - 1) r^2 + 2r(\alpha^2 \bar{v} - \bar{u}) = u^2 - \alpha^2 v^2$. Alegem pe M astfel încât să dispară paranteza, deci $\bar{u} = \alpha^2 \bar{v}$. Din cele două condiții $\bar{u} - \bar{v} = e$ și $\bar{u} = \alpha^2 \bar{v}$ se obțin, pentru M, distanțele la A și B:

$u = \dfrac{m^2}{m^2 - n^2} e$ și $v = \dfrac{n^2}{m^2 - n^2} e$. Inlocuind aceste câtimi în ecuația $(\alpha^2 - 1) r^2 = u^2 - \alpha^2 v^2$ se obține $\bar{r} = \dfrac{mn}{m^2 - n^2} e$.

Deci distanța lui P la punctul auxiliar, fix, M, rămâne constantă. M este centrul cercului lui Apollonius.

100. Teorema lui PTOLEMEUS. Intr'un patrulater inscriptibil produsul diagonalelor, este egal cu suma produselor laturilor opuse.

Ind. Fie $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$, $\overrightarrow{BC}=\bar{b}$, $\overrightarrow{CD}=\bar{c}$, $\overrightarrow{DA}=\bar{d}$, $\overrightarrow{AC}=\bar{e}$, $\overrightarrow{BD}=f$. Avem $\bar{e}=\bar{a}+\bar{b}$. Inmulţind scalar cu $\frac{\bar{e}}{e}$ obţinem $e=(\bar{a}\,.\,\frac{\bar{e}}{e})+(\bar{b}\,.\,\frac{\bar{e}}{e})=a(\frac{\bar{c}}{c}\cdot\frac{\bar{f}}{f})-b\,(\frac{\bar{d}}{d}\cdot\frac{\bar{f}}{f})$. Inmulţind cu $\frac{\bar{f}}{f}$ şi făcând unele transformări simple se obţine $ef=ac+bd$.

101. Teorema celor trei perpendiculare. Dacă dintr'un punct P se duce o perpendiculară PF pe un plan, din piciorul F al perpendicularei o a doua perpendiculară FO pe o dreaptă OG din plan, atunci şi PO este perpendiculară pe dreapta OG.

Ind. Fie $\overrightarrow{FP}=\bar{h}$, $\overrightarrow{OF}=\bar{f}$, $\overrightarrow{OP}=\bar{p}$ şi $\overrightarrow{OG}=\bar{g}$. Avem $\bar{p}=\bar{f}+\bar{h}$. Conform ipotezei însă $(\bar{g}\,.\,\bar{h})=0$ şi $(\bar{g}\,.\,\bar{f})=0$, deci $(\bar{g}\,.\,\bar{p})=\bar{g}\,(\bar{f}+\bar{h})=0$ sau $\bar{g}\perp\bar{p}$.

102. Să se arate că $\lim\,(\bar{p},\bar{q},\bar{r})=(\lim\bar{p},\ \lim\bar{q},\ \lim\bar{r})$.

Ind. $(\bar{p},\bar{q},\bar{r})=[\bar{p},\bar{q}]\,\bar{r}$ deci $\lim\,(\bar{p},\bar{q},\bar{r})=\lim\,[\bar{p},\bar{q}]\,\lim\bar{r}=$ $=[\lim\bar{p},\ \lim\bar{q}]\,\lim\bar{r}=(\lim\bar{p},\ \lim\bar{q},\ \lim\bar{r})$.

103. Dacă $\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s}$ sunt funcţii de o aceiaşi variabilă scalară t, să se deriveze expresiile $[[\bar{p},\bar{q}]\,\bar{r}]$; $[\bar{p}\ \bar{q}]\,[\bar{r},\bar{s}]$; $[[\bar{p},\bar{q}]\,[\bar{r},\bar{s}]]$.

Ind. $\left[[\frac{d\bar{p}}{dt},\bar{q}]\,\bar{r}\right]+\left[[\bar{p},\frac{d\bar{q}}{dt}]\,\bar{r}\right]+\left[[\bar{p},\bar{q}]\,\frac{d\bar{r}}{dt}\right]$ etc.

104. Să se deducă formula care dă diferenţiala unui determinant de ordinul trei ale cărui elemente sunt funcţii de un acelaş parametru variabil.

Ind. Ne servim de formula $\frac{d}{du}(\bar{p},\bar{q},\bar{r})=(\frac{d\bar{p}}{du},\bar{q},\bar{r})+(\bar{p},\frac{d\bar{q}}{du},\bar{r})$ $+(\bar{p},\bar{q},\frac{d\bar{r}}{du})$. Exprimând produsul mixt cu ajutorul componentelor sub formă de determinant, se obţine

$$d\begin{vmatrix}X & Y & Z\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}dX & dY & dZ\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}X & Y & Z\\ dX_1 & dY_1 & dZ_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}X & Y & Z\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ dX_2 & dY_2 & dZ_2\end{vmatrix},$$

105. Să se calculeze elementul de arc al elicei: $\bar{r}=a\cos\theta\,\bar{\imath}+a\sin\theta\,\bar{\jmath}+b\,\theta\,\bar{k}$. Prin integrare să se găsească arcul dintre $\bar{r}_1(\theta_1)$ şi $\bar{r}_2(\theta_2)$.

Ind. Se ţine seamă de faptul că $ds^2=d\bar{r}^2$. Se obţine $S=\sqrt{a^2+b^2}\,|\theta_2-\theta_1|$.

Scanned with OKEN Scanner

106. **Să se calculeze elementul de arc al cicloidei**

$$\bar{r} = a(u - \sin u)\,\bar{\imath} + a(1 - \cos u)\,\bar{\jmath}.$$

Ind. Procedând ca mai sus se obţine $ds = 2a \sin \frac{u}{2}\, du$.

107. **Raza vectoare a unei curbe plane în funcţie de coordonatele polare fiind $\bar{r} = \rho(\bar{\imath}\cos\varphi + \bar{\jmath}\sin\varphi)$ să se deducă diferenţiala arcului în coordonate polare.**

Ind. $d\bar{r} = d\rho(\bar{\imath}\cos\varphi + \bar{\jmath}\sin\varphi) + \rho\, d\varphi(-\bar{\imath}\sin\varphi + \bar{\jmath}\cos\varphi)$. Observând că $\bar{\imath}\cos\varphi + \bar{\jmath}\sin\varphi$ şi $-\bar{\imath}\sin\varphi + \bar{\jmath}\cos\varphi$ sunt vectori unitari şi perpendiculari între ei, se obţine $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$.

108. **Să se arate că** $d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}\,d\bar{r}}{r^3}$.

Ind. Inlocuim în egalitatea $d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$ diferenţiale lui r prin

$$d\bar{r} = \frac{\bar{r}}{r}\, d\bar{r}.$$

109. **Să se demonstreze că, dacă pentru toate valorile lui u vectorii $\frac{d\bar{r}(u)}{du}$ şi $\frac{d^2\bar{r}(u)}{du^2}$ nu sunt coliniari, vectorul $\frac{d^3\bar{r}(u)}{du^3}$ fiind coplanar cu ei, atunci pentru orice k, $\frac{d^k\bar{r}(u)}{du^k}$ este coplanar cu ei. Să se deducă de aici că $\bar{r} = \bar{r}(u)$ este o curbă plană.**

Ind. Din ipoteză avem $\left(\frac{d\bar{r}}{du}, \frac{d^2\bar{r}}{du^2}, \frac{d^3\bar{r}}{du^3}\right) = 0$. Diferenţiem în raport cu u, şi observăm că produsul mixt cu doi factori egali este identic nul. Se găseşte $\left(\frac{d\bar{r}}{du}, \frac{d^2\bar{r}}{du^2}, \frac{d^4\bar{r}}{du^4}\right) = 0$. Deci am demonstrat proprietatea pentru $k = 4$. Procedând la fel obţinem demonstraţia pentru $k = 5$, 6, etc. Pentru cazul general ne servim de metoda inducţiei complete. Din desvoltarea lui $\bar{r}(u)$ în seria TAYLOR conchidem apoi planicitatea curbei $\bar{r} = \bar{r}(u)$.

110. **Să se demonstreze că, dacă pentru toate valorile lui u, vectorii $\bar{r}(u)$ şi $\frac{d\bar{r}}{du} \neq 0$ sunt coliniari, atunci toţi vectorii $\frac{d^k\bar{r}}{du}$ sunt coliniari cu ei. Să se arate că, în acest caz, curba $\bar{r} = \bar{r}(u)$ este o dreaptă trecând prin pol.**

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Avem $\frac{d\bar{r}}{du} = \lambda \bar{r}$, deci $\frac{d^2\bar{r}}{du^2} = \frac{d\lambda}{du}\bar{r} + \lambda \frac{d\bar{r}}{du} = \mu \bar{r}$ etc. (sau : din $\left[\bar{r}, \frac{d\bar{r}}{du}\right] = 0$ obţinem succesiv $\left[\bar{r}, \frac{d^2\bar{r}}{du^2}\right] = 0, \left[\bar{r}, \frac{d^3\bar{r}}{du^3}\right] = 0$ etc). In desvoltarea TAYLOR toţi vectorii din membrul al doilea sunt coliniari cu un vector constant $\bar{r}(u_0)$, $\bar{r}(u) = \varphi(u)\,\bar{r}(u_0)$.

Integrarea ecuaţiilor diferenţiale vectoriale. Exemple din Mecanică şi Fizică. (vezi *Mecanica*).

111. Să se integreze $\ddot{\bar{r}} = 0$ (Mişcarea unui punct în absenţa forţelor. Notăm $\frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}$, etc).

Ind. $\dot{\bar{r}} = \bar{a}$ (= const) ; $\bar{r} = \int \bar{a}\, dt = \bar{a}t + \bar{b}$. Punând două condiţii iniţiale, de ex. $\bar{r}(0) = \bar{r}_0$, $\dot{\bar{r}}(0) = \bar{v}_0$ avem $\bar{r} = \bar{v}_0 t + \bar{r}_0$.

112. Să se integreze $\ddot{\bar{r}} = \bar{E}$ ($\bar{E}$ = const; mişcarea unui punct într'un câmp uniform : un punct greu în câmpul gravităţei pământeşti sau un electron într'un câmp electric uniform).

Ind. $\dot{\bar{r}} = \bar{E}t + \bar{a}$ şi $\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{E}t^2 + \bar{a}t + \bar{b}$ unde $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt vectori constanţi arbitrari. Se vede că vectorul $\bar{r} - \bar{b}$ este coplanar cu $\bar{E}$ şi $\bar{a}$. Considerând $\bar{E}$, $\bar{a}$ ca vectorii de bază a unui sistem (afin) de coordonate se vede că componentele lui $\bar{r} - \bar{b}$ sunt proporţionale cu t şi t^2, adică traiectoria este o parabolă. $\bar{a}$, $\bar{b}$ se determină din condiţii iniţiale.

113. Să se integreze $\dot{\bar{r}} + \alpha(t)\,\bar{r} = \bar{p}(t)$ unde $\alpha(t)$ şi $\bar{p}$ sunt funcţii (scalară şi vectorială) date. (Ecuaţie liniară de ordinul I).

Ind. Inmulţind ambii membri cu $e^{\int \alpha(t)\,dt}$ se obţine $\frac{d}{dt}(\bar{r}e^{\int \alpha\, dt}) = \bar{p}e^{\int \alpha dt}$; de unde $\bar{r}e^{\int \alpha dt} = \int \bar{p}\, e^{\int \alpha dt}\, dt + \bar{c}$ şi $\bar{r} = e^{-\int \alpha\, dt}\left(\int \bar{p}\, e^{\int \alpha dt}\, dt + \bar{c}\right)$ cu $\bar{c}$ = const. şi arbitrar.

114. Să se integreze $\ddot{\bar{r}} + \bar{r} = 0$ (α = const > 0) (mişcarea planetelor).

Ind. Din ecuaţie rezultă că vectorii $\bar{r}$ şi $\ddot{\bar{r}}$ sunt coliniari, adică $[\bar{r}, \ddot{\bar{r}}] = 0$, dar $[\bar{r}, \ddot{\bar{r}}] = \frac{d}{dt}[\bar{r}, \dot{\bar{r}}]$ deci $[\bar{r}, \dot{\bar{r}}] = \bar{a}$ = const. (integrala

ariilor). Se vede că $\bar{r} \perp \bar{a}$, deci mișcarea este plană. Inmulțind vectorial ecuația dată cu $\bar{a} = [\bar{r}, \dot{\bar{r}}]$ avem:

$$[\bar{a}, \ddot{\bar{r}}] = -\frac{\alpha}{r^3}\left[[\bar{r}, \dot{\bar{r}}], \bar{r}\right] = -\frac{\alpha}{r^3}\left\{r^2 \dot{\bar{r}} - \bar{r}(\bar{r}.\dot{\bar{r}})\right\}.$$

Cum $\bar{r}\,\dot{\bar{r}} = r\dot{r}$ rezultă $[\bar{a}, \ddot{\bar{r}}] = -\alpha \frac{r\dot{\bar{r}} - \dot{r}\,\bar{r}}{r^2} = -\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)$,

$\frac{d}{dt}[\bar{a}, \dot{\bar{r}}] + \alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right) = 0$; deci $[\bar{a}, \dot{\bar{r}}] + \alpha \frac{\bar{r}}{r} = \bar{b}$ (const).

Eliminând din ultima ecuație și integrala ariilor pe $\dot{\bar{r}}$ (înmulțind ultima ecuație scalar cu $\bar{r}$ și ținând seamă că $[\bar{a}, \dot{\bar{r}}]\bar{r} = \bar{a}[\dot{\bar{r}}, \bar{r}] - a^2$, avem $-a^2 + \alpha r = (\bar{b}.\bar{r})$ ceiace reprezintă ecuația traectoriei în planul ei. Introducând coordonatele polare, axa polară fiind vectorul $\bar{b}$, avem $r = \rho$; $(\bar{b}.\bar{r}) = b\rho\cos\varphi$, obținem $a^2 + \alpha\rho = b\rho\cos\varphi$ deci

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \left(\text{cu } p = \frac{a^2}{\alpha},\ \varepsilon = \frac{b}{\alpha}\right).$$

115. Să se integreze ecuația $\ddot{\bar{r}} = [\dot{\bar{r}}, \bar{H}]$ unde $\bar{H} =$ const. (mișcarea unui electron într'un câmp magnetic constant).

Ind. Din ecuație se vede că $\ddot{\bar{r}} \perp \dot{\bar{r}}$ și $\ddot{\bar{r}} \perp \bar{H}$ deci $(\dot{\bar{r}}.\ddot{\bar{r}}) = 0$, și $(\ddot{\bar{r}}.\bar{H}) = 0$; integrând avem $\dot{\bar{r}}^2 =$ const. și $(\dot{\bar{r}}.\bar{H}) =$ const. Prima ecuație ne arată că $|\dot{\bar{r}}| =$ const (viteza pe traectorie constantă); din a 2-a se vede că unghiul dintre $\dot{\bar{r}}$ și $\bar{H}$ este constant. Integrând ecuația inițială avem $\dot{\bar{r}} = [\bar{r}, \bar{H}] + \bar{c}$ (=const) de unde $[\bar{H}, \dot{\bar{r}}] = [\bar{H}[\bar{r}, \bar{H}]] + [\bar{H}, \bar{c}]$. Dar valoarea absolută lui $[\bar{H}, \dot{\bar{r}}]$ fiind constantă, rezultă $\{[\bar{H}[\bar{H}, \bar{r}]] - [\bar{c}, \bar{H}]\}^2 =$ const. Observând apoi că $\frac{1}{H^2}[\bar{H}[\bar{r}, \bar{H}]]$ este proecția lui $\bar{r}$ pe un plan $\perp \bar{H}$; concludem că traiectoria se proectează pe acest plan după un cerc, cu centrul în extremitatea vectorului $\frac{[\bar{c}, \bar{H}]}{H^2}$. Deci traectoria este o elice circulară, mișcarea fiind uniformă.

116. Să se integreze ecuația $\mu\,\ddot{\bar{r}} = \frac{1}{r^3}[\bar{r}, \dot{\bar{r}}]$ ($\mu =$ const.) (mișcarea unui electron în câmpul unui pol magnetic).

Ind. Avem $(\dot{\bar{r}}.\ddot{\bar{r}}) = 0$, deci $\dot{\bar{r}}^2 =$ const. Mișcarea pe traectorie este uniformă. Inmulțind ecuația vectorial cu $\bar{r}$ avem

$$\mu[\bar{r}, \ddot{\bar{r}}] = \frac{1}{r^3}\left\{\bar{r}(\bar{r}.\dot{\bar{r}}) - \dot{\bar{r}}\,r^2\right\} = \frac{\bar{r}\,\dot{r} - \dot{\bar{r}}\,r}{r^2}, \text{ sau } \mu\frac{d[\bar{r}, \dot{\bar{r}}]}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)$$

deci $\mu [\bar{r}, \dot{\bar{r}}] = \bar{c} - \frac{\bar{r}}{r}$, ($\bar{c} =$ const). Inmulțind scalar cu $\bar{r}$, găsim $(\bar{c}, \bar{r}) = r$, ecuația unui con circular drept (dacă $|\bar{c}| > 1$). Deci traiectoria este o curbă așezată pe acest con. Se poate arăta că această curbă este geodezică a conului.

117. $\varphi(\bar{r}) = f(r)$ **reprezintă distanța punctului** $M(\bar{r})$ **de un pol fix. Care sunt liniile de nivel (pentru câmpul plan) și suprafețele de nivel (pentru câmpul spațial) ?**

Ind. Cercuri, respectiv sfere concentrice.

118. $\varphi(M)$ **este suma distanțelor punctului** M **la două puncte fixe (în spațiu). Să se găsească suprafețele de nivel.**

Ind. Scriind ecuația locului lui M se vede că suprafețele de nivel sunt elipsoizi de revoluție, axul comun trecând prin punctele fixe.

119. $\varphi(M)$ **este distanța punctului** M **la o dreaptă fixă în spațiu. Care sunt suprafețele de nivel.**

Ind. Procedând la fel se găsesc cilindrii coaxiali, ceiace se vede și direct.

120. $\varphi(\bar{r}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{r}) + (\bar{m}, \bar{r}, \bar{n})$. **Să se găsească suprafețele de nivel.**

Ind. Se constată ușor că sunt planele perpendiculare pe vectorul $[\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{n}, \bar{m}]$ (dacă acesta este $\neq 0$; în cazul contrar $\varphi(\bar{r}) = 0$ este o identitate).

121. $\varphi(x, y) = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$; **să se găsească componentele vectorului grad** φ.

Ind. Se aplică formula de definiție grad $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\bar{\jmath}$.

122. **Să se găsească derivata funcției** $\varphi(x, y) = 5x^2 - 3x - y^2 + 1$ **în punctul** $M(2, 1)$ **în direcția dreptei ce unește acest punct cu punctul** $N(5, 5)$.

Ind. Se aplică definiția derivatei într'o direcție.

123. **Să se găsească derivata funcției** $3x^4 - xy + y^3$ **în punctul** $M(1,2)$ **într'o direcție făcând cu** OX **un unghiu de** 60°.

Ind. Se aplică direct definiția.

124. **Să se găsească derivata funcției** $\varphi(x, y)$ **în direcția 1) bisectoarei unghiului** XOY, **2) semiaxei** x**-lor negativi.**

Ind. Aplicând definiția se găsește $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$; $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Scanned with OKEN Scanner

125. **Să se găsească punctele singulare ale câmpului dat de**

$$\varphi = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2.$$

Ind. Se rezolvă sistemul obţinut prin anularea derivatelor parţiale.

126. **Fiind dat câmpul $\varphi = x^2 - 2x - y^4 + 3$, să se găsească punctul singular şi curba de nivel ce trece prin acel punct.**

Ind. Punctul este $A(1, 0)$. Cum $\varphi(A) = 2$ rezultă că ecuaţia curbei de nivel este $x^2 - 2x - y^4 + 1 = 0$, care se descompune în două $x - 1 = y^2$ şi $x - 1 = -y^2$, două parabole având în A o tangentă comună.

127. $\varphi(x, y, z) = x^3 y^2 z$. **Să se scrie vectorul grad φ.**

Ind. $\operatorname{grad} \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\bar{\imath} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\bar{\jmath} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\bar{k}$.

128. **Să se găsească derivata funcţiei $\varphi(x, y, z) = y^2 z - 2xyz + z^2$ în punctul $M(3, 1, 1)$ şi în direcţia făcând cu OX, OY, OZ unghiurile de 60°, 45°, 60°.**

Ind. Se aplică definiţia derivatei într'o direcţie.

129. **Să se scrie grad φ pentru câmpurile: 1) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{r})$, 2) $[\bar{a}, \bar{r}]\,[\bar{b}, \bar{r}]$ 3) $[\bar{a}\,[\bar{r}, \bar{a}]]^2$, vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ fiind constanţi.**

Ind. Se aplică definiţia gradientului.

130. **$\varphi(M)$ = distanţa punctului M de dreapta $\bar{r} = \lambda\bar{a} + \bar{b}$. Să se găsească grad φ. Să se interpreteze geometric rezultatul.**

Ind. Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie a lui M. Avem $\varphi^2 = \dfrac{[\bar{b} - \bar{r}, \bar{a}]^2}{\bar{a}^2}$

deci $\varphi\, d\varphi = \dfrac{\bar{a}}{a^2}[\bar{b} - \bar{r}, \bar{a}]\, d\bar{r}$; $\operatorname{grad} \varphi = \dfrac{1}{a^2 \varphi}[\bar{a}[\bar{b} - \bar{r}, \bar{a}]]$.

Dar $\dfrac{1}{a^2}[\bar{a}[\bar{b} - \bar{r}, \bar{a}]]$ este proecţia lui $\bar{b} - \bar{r}$ pe un plan $\perp \bar{a}$, adică vectorul $\bar{h}$ (perpendicular din M pe dreaptă) şi cum $\varphi = h$, rezultă $\operatorname{grad} \varphi = -\dfrac{\bar{h}}{h}$ = vectorul unitar îndreptat după normala exterioară la suprafaţa cilindrică de nivel.

131. **Să se demonstreze că dacă două curbe plane $\varphi(x, y) =$ const, $\psi(x, y) =$ const au un punct comun P, atunci unghiul format de tangentele curbelor în P este egal unghiul vectorilor $\operatorname{grad} \varphi_P$ şi $\operatorname{grad} \psi_P$. Să se aplice la următoarea problemă: în ce caz elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ şi iperbola $\dfrac{x^2}{a_1^2} - \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1$ sunt ortonale?**

Ind. a) Prima parte rezultă imediat; b) avem cei doi gradienți $2\left(\frac{x}{a^2}\bar{\imath}+\frac{y}{b^2}\bar{\jmath}\right)$ și $2\left(\frac{x}{a_1^2}\bar{\imath}+\frac{y}{b_1^2}\bar{\jmath}\right)$; ei sunt perpendiculari dacă $\frac{x^2}{a^2 a_1^2}-\frac{y^2}{b^2 b_1^2}=0$. Condiția de compatibilitate a ultimei ecuații cu ecuațiile celor 2 curbe este $a^2-b^2=a_1^2-b_1^2$. (Curbele sunt în acest caz omofocale).

132. Să se scrie planul tangent și normala la suprafața $\varphi(x, y, z)=x^3+xyz+z^2-3xz=2y=11$ în punctul $A(1, 3, 2)$.

Ind. Avem grad $\varphi=(3x^2+yz-3z)\bar{\imath}+(xz+2)\bar{\jmath}+(xy+2z-\bar{k}$ și grad $\varphi_A=3\bar{\imath}+4\bar{\jmath}+4\bar{k}$. Planul tangent: $3(x-1)+4(y-3)+4(z-2)=0$, normala: $(x-1):3=(y-3):4=(z-2):4$.

133. Să se demonstreze că dacă $\bar{p}(u_0)=0$ și $\varphi(u_0)=0$ și dacă în vecinătatea lui u_0 există derivatele $\dot{\bar{p}}(u)$ și $\dot{\varphi}(u)$ și $\lim_{u\to u_0}\frac{\dot{\bar{p}}(u)}{\dot{\varphi}(u)}$, atunci $\lim_{u\to u_0}\frac{\bar{p}(u)}{\varphi(u)}=\lim_{u\to u_0}\frac{\dot{\bar{p}}(u)}{\dot{\varphi}(u)}$ (regula lui l'Hôpital).

Ind. Aplicăm regula lui l'Hôpital, cunoscută din Analiza scalară fiecărui raport $\frac{X(u)}{\varphi(u)}$, $\frac{Y(u)}{\varphi(u)}$, $\frac{Z(u)}{\varphi(u)}$; X, Y, Z fiind componentele lui $\bar{p}$.

134. În teoria efectului Zeeman intervine ecuația vectorială $\ddot{\bar{r}}=-a^2\bar{r}-b^2[\dot{\bar{r}}\,\bar{M}]$, unde $\bar{a}, \bar{b}, \bar{M}$ sunt vectori constanți. Să se deducă de aici $\dot{\bar{r}}^2=\alpha-a^2r^2$ și $(\bar{M}\bar{r})=\beta\sin at+\gamma\cos at$, unde α, β, γ sunt constante scalare arbitrare.

Ind. Se înmulțește scalar ecuația odată cu $2\dot{\bar{r}}$ și apoi cu $\bar{M}$ și se integrează.

135. Fiind date două funcții $\varphi(\bar{r})$ și $\psi(\bar{r})$, să se verifice valabilitatea formulelor grad $(\varphi+\psi)=$ grad $\varphi+$ grad ψ **și** grad $(\varphi\psi)=\varphi$ grad $\psi+\psi$ grad φ.

Ind. Ne servim de formule analoage pentru $d(\varphi+\psi)$ și $d(\varphi\,.\,\psi)$ și de $d\varphi=(\text{grad}\, d\varphi.\, d\bar{r})$.

136. Valoarea funcției φ în punctul M este suma pătratelor distanțelor lui M la n puncte fixe: $A_1 A_2 \ldots A_n$. Să se arate că singurul punct singular al câmpului este $\bar{r}=\frac{\sum_1^n \bar{r}_i}{n}$.

Ind. $\varphi = \sum_{k=1}^{n} (\bar{r} - \bar{r}_k)^2$; grad $\varphi = 2\sum_{k=1}^{n} (\bar{r} - \bar{r}_k) = 2n\left(\bar{r} - \frac{\sum_{1}^{n} \bar{r}_k}{n}\right)$ deci grad $\varphi = 0$ în punctul $\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \bar{r}_k$ și numai în acel punct.

137. Să se găsească unghiul curbelor de nivel a două câmpuri plane $\varphi(M)$ și $\psi(M)$ în punctul de intersecție al acestor curbe.

Ind. Evident $\cos \omega = \frac{(\text{grad } \varphi \,.\, \text{grad } \psi)}{|\text{ grad } \varphi\,| \,.\, |\text{ grad } \psi\,|}$, unde se iau valorile gradienților în punctul comun.

138. Fie $\bar{r}$ raza vectoare și $\frac{1}{R}$ curbura unei curbe. Să se arate că $\oint \bar{r} d\left(\frac{1}{R}\right) = 0$, integrarea fiind efectuată dealungul unui contur închis oarecare.

Ind. $\oint \bar{r}\, d\left(\frac{1}{R}\right) = \oint d\left(\frac{\bar{r}}{R}\right) - \oint \frac{1}{R} d\bar{r} = -\oint \frac{d\bar{r}}{R} = -\oint \frac{\bar{t}}{R} ds =$

$= \oint \frac{d\bar{n}}{ds} ds = 0$.

139. Prin fiecare punct M al unei curbe plane (C) se duce tangenta la (C) pe care se ia un punct M_1 astfel ca segmentul $MM_1 = a = \text{const.}$ Când M descrie curba (C), M_1 descrie o altă curbă (C_1). Să se arate că normalele la cele două curbe, duse în punctele corespunzătoare M și M_1 se taie în centrul de curbură al curbei (C). Ce se întâmplă dacă (C) nu este o curbă plană?

Ind. $\bar{r}_1 = \bar{r} - a\bar{t}$ deci $\frac{d\bar{r}_1}{ds} = \bar{t} + \frac{a}{R}\bar{n}$ este vectorul tangetei în M_1 la (C_1). Dacă N este centrul de curbură al lui (C) relativ la punctul M atunci $\overrightarrow{MN} = R\bar{n}$, $\overrightarrow{M_1N} = R\bar{n} - a\bar{t}$ deci $\left(\frac{d\bar{r}_1}{ds}, \overrightarrow{M_1N}\right) = 0$, adică $\overrightarrow{M_1N}$ este normal la (C_1) în punctul M_1. Dacă (C) ar fi o curbă strâmbă, centrul de curbură N s'ar găsi la intersecția normalei principale la (C) cu planul normal la (C_1) (în punctele corespunzătoare M și M_1).

140. Dacă transportăm vectorii $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ în polul O, obținem un triedru care se va roti în jurul lui O ca un sistem rigid atunci când punctul va descrie curba. Să se arate că există un vector $\bar{\omega}(s)$ astfel încât vectorii $\bar{t}'$, $\bar{n}'$, $\bar{b}'$ se scriu $\bar{t}' = [\bar{\omega}, \bar{t}]$; $\bar{n}' = [\bar{\omega}, \bar{n}]$; $\bar{b} = [\bar{\omega}, \bar{b}]$ (vectorii lui DARBOUX).

Ind. Dacă vectorul $\bar{\omega}$ există, el trebue să satisfacă ecuaţiile (conf. form. lui FRENET) $[\bar{\omega}, \bar{t}] = \frac{\bar{n}}{R}$, $[\bar{\omega}, \bar{b}] = -\frac{\bar{n}}{T}$, $[\bar{\omega}, \bar{n}] = -\frac{\bar{t}}{R} + \frac{\bar{b}}{T}$ (*). Inmulţind scalar aceste relaţii respectiv cu $\bar{n}, \bar{t}, \bar{b}$ găsim $(\bar{\omega}, \bar{t}, \bar{n}) = \frac{1}{R}$; $(\bar{\omega}, \bar{b}, \bar{t}) = 0$ şi $(\bar{\omega}, \bar{n}, \bar{b}) = \frac{1}{T}$, sau $(\bar{\omega} . \bar{b}) = \frac{1}{R}$; $(\bar{\omega} . \bar{t}) = \frac{1}{T}$; $(\bar{\omega} . \bar{n}) = 0$ care sunt proiecţiile lui $\bar{\omega}$ după triedrul fundamental. Cum însă $\bar{\omega} = (\bar{\omega} . \bar{t})\,\bar{t} + (\bar{\omega} . \bar{n})\,\bar{n} + (\bar{\omega} . \bar{b})\,\bar{b}$ rezultă că singura expresie posibilă pentru $\bar{\omega}$ este de formă $\bar{\omega} = \frac{\bar{t}}{T} + \frac{\bar{b}}{R}$. Inlocuind în (*) vedem că aceste relaţii sunt în adevăr verificate.

141. Curba $\bar{r} = \bar{r}(s)$ este aşezată pe o sferă de rază a. Să se găsească descompunerea vectorului $\bar{r}$ după $\bar{n}$ şi $\bar{b}$. Să se arate că $R^2 + (TR')^2 = a^2$.

Ind. Diferenţiind identitatea $(\bar{r}(s))^2 = a^2$, avem $(\bar{r} . \bar{t}) = 0$, $(\bar{t} . \bar{t}) + \frac{1}{R}(\bar{r} . \bar{n}) = 0$ de unde $(\bar{r} . \bar{n}) = -R$; în fine $(\bar{t} . \bar{n}) + \bar{r}\left(-\frac{\bar{t}}{R} + \frac{\bar{b}}{T}\right) = -R'$ deci $(\bar{r} . \bar{b}) = -TR'$ Cum însă $\bar{r} = (\bar{r} . \bar{t})\,\bar{t} + (\bar{r} . \bar{n})\,\bar{n} + (\bar{r} . \bar{b})\,\bar{b}$ rezultă că $\bar{r} = R\bar{n} - TR'\,\bar{b}$. Inlocuind în $\bar{r}^2 = a^2$ găsim relaţia cerută.

142. Să se scrie ecuaţia planului osculator la curba dată prin $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, $\psi(x, y, z) = \text{const}$, în punctul (x, y, z) de pe curbă. Să se aplice rezultatul găsit curbei $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$.

Ind. Notăm $[\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi] = \bar{T}$, atunci $\dot{\bar{r}} = \lambda \bar{T}$; deci

$$\ddot{\bar{r}} = \dot{\lambda}\bar{T} + \lambda\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\dot{z}\right); \quad [\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}] = \lambda^2\left\{[\bar{T}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}]\dot{x} + [\bar{T}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}]\dot{y} + [\bar{T}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}]\dot{z}\right\} = \lambda^3\left\{[\bar{T}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}](\bar{T}, \bar{\imath}) + [\bar{T}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}](\bar{T}, \bar{\jmath}) + [\bar{T}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}](\bar{T}, \bar{k})\right\}$$. Prin urmare vectorul $\left[\bar{T}, (\bar{T} . \bar{\imath})\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + (\bar{T} . \bar{\jmath})\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + (\bar{T} . \bar{k})\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right]$ ne dă direcţia binormalei; ceiace permite scrierea ecuaţiei planului osculator.

Scanned with OKEN Scanner

In cazul concret propus grad $\varphi = 2\,(x\bar{\imath}+z\bar{\mathrm{k}})$, grad $\psi = 2\,(y\bar{\jmath}+z\bar{\mathrm{k}})$. Putem lua $\overline{T}=yz\bar{\imath}+xz\bar{\jmath}+xy\bar{\mathrm{k}}$. Vectorul

$$(\overline{T}\,.\,\bar{\imath})\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}+(\overline{T}\,.\,\bar{\jmath})\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}+(\overline{T}\,.\,\bar{\mathrm{k}})\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}=$$

$$=x(z^2+y^2)\bar{\imath}+y(z^2+x^2)\bar{\jmath}+z(x^2+y^2)\bar{\jmath}\,.$$

Inmulţind vectorial cu $\overline{T}$ obţinem vectorul $\bar{b}$.

143. Raza vectoare a unei curbe este dată în funcţie de arc s prin relaţia $\bar{r}=as\,\bar{m}+[\bar{m},\overline{E}(s)]$, unde vectorul unitar $\bar{m}$ şi scalarul a sunt constanţi, iar $\overline{E}(s)$ este o funcţie vectorială, oarecare, de s. Să se arate că tangentele la această curpă fac un unghiu constant cu $\bar{m}$, că normele principale sunt $\perp\bar{m}$ şi că raportul dintre curbură şi torsiune este constant.

Ind. Derivând succesiv ecuaţia curbei, avem :

$\bar{r}'=\bar{\mathrm{t}}=a\,\bar{m}+[\bar{m},\overline{E}']\,;\ \bar{r}''=[\bar{m},\overline{E}'']$, deci $(\bar{\mathrm{t}},\bar{m})=a$ şi $(\bar{\mathrm{n}}\,.\,\bar{m})=0$. Derivând (tot în raport cu s) ecuaţia $(\bar{\mathrm{n}}\,.\,\bar{m})=0$, obţinem $0=\bar{m}\,\bar{\mathrm{n}}'=-R\,(\bar{m}\,.\,\bar{\mathrm{t}})+T\,(\bar{m}\,.\,\bar{b})$.

Cum însă $(\bar{m}\,.\,\bar{b})^2=1-a^2=$ const, rezultă că şi raportul $\frac{R}{T}$ este constant. Se vede că avem o elice.

144. Fie curba $\bar{r}=\bar{a}\,\alpha+\bar{b}\,(1-\alpha)$, unde $\bar{a},\bar{b}$ sunt vectori constanţi, iar α un parametru scalar. Să se determine arcul s al curbei în funcţii de α.

Ind. $\bar{r}$ fiind o funcţie liniară de parametru, curba este o linie dreaptă Pentru $\alpha=0$ şi $\alpha=1$, dreapta trece prin extremităţile vectorilor $\bar{b}$ şi $\bar{a}$.

145. Dându-se elipsa $\bar{r}=\bar{a}\cos\alpha+\bar{b}\sin\alpha$, să se arate că vectorul $\bar{s}=\frac{d\bar{r}}{d\alpha}$ este un diametru al elipsei, conjugat cu $\bar{r}$.

Ind. $\bar{s}=-\bar{a}\sin\alpha+\bar{b}\cos\alpha=\bar{a}\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})+\bar{b}\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})$

este evident o rază vectoare a elipsei. Direcţia sa este paralelă cu tangenta în extremitatea lui $\bar{r}$.

146. Să se calculeze elementul de suprafaţă $d\bar{\sigma}=\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\,,\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]du\,dv$ pentru suprafaţa $\bar{r}=\bar{\imath}\cos u+\sin u\,\{\bar{\jmath}\cos v+\bar{\mathrm{k}}\sin v\}$.

Ind, Avem $\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}=-\bar{\imath}\sin u+\bar{\jmath}\cos u\cos v+\bar{\mathrm{k}}\cos u\sin v$ şi

$\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}=-\bar{\jmath}\sin u\sin v+\bar{\mathrm{k}}\sin u\cos v$, deci

$$d\bar{\sigma} = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right] du\, dv = (\bar{\imath} \sin u \cos u + \bar{\jmath} \sin^2 u \cos v +$$

$+ \bar{k} \sin^2 u \sin v)\, du\, dv$, deci $|d\bar{\sigma}| = \sqrt{\sin^2 u}.\, du\, dv$ (dacă $du\, dv > 0$). Este o suprafaţă sferică. Curbele $v = \text{const}$ sunt cercuri meridiane.

Altfel: $E = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right)^2 = 1$, $F = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = 0$, $G =$

$= \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)^2 = \sin^2 u$; deci $|d\bar{\sigma}| = du\, dv \sqrt{E\,G - F^2} = \sqrt{\sin^2 u}\, du dv$.

147. Să se calculeze pentru suprafaţa $\bar{r} = (u + v^2)\bar{a} + (v + u^2)\bar{b} + uv\bar{c}$, **cantităţile** E, F, G **şi elementul superficial** $d\bar{\sigma}$.

Ind. E, F, G se calculează ca mai sus. Se obţine apoi

$$d\bar{\sigma} = du\, dv\{[\bar{a},\bar{b}](1 - 4uv) + [\bar{b},\bar{c}](2u^2 - v) + [\bar{c},\bar{a}](2v^2 - u)\}.$$

Curbele coordonate $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ sunt parabole. Suprafaţa este un paraboloid.

148. O suprafaţă S **este mărginită de o curbă plană** (C), **a cărei binormală este** $\bar{b}$. **Să se formeze integrala** $\int_S d\bar{\sigma} = \bar{\sigma}$ **şi să se arate că** $[\bar{b}, \bar{\sigma}] = 0$. **Care este semnificaţia lui** $|\bar{\sigma}|$ **?**

Ind. $\bar{\sigma}$ are aceiaşi valoare pentru toate suprafeţele mărginite de (C) deci şi pentru aria plană închisă de (C). Este deci valoarea acestei arii plane, iar direcţia lui $\bar{\sigma}$ este $\perp$ pe planul curbei (C).

149. Fiind dată suprafaţa $\varphi(\bar{r}) = \text{const}$. **să se scrie ecuaţiile vectoriale ale planului tangent şi ale normalei într'un punct al suprafeţii.**

Ind. Fie $\bar{r}$ un punct al suprafeţii şi $\bar{\rho}$ un punct al planului tangent. Ecuaţia acestui plan este $(\bar{\rho} - \bar{r})\ \text{grad}\ \varphi = 0$. Dacă $\bar{\rho}$ fixează un punct al normalei, ecuaţia ei vectorială va fi $[\bar{\rho} - \bar{r}, \text{grad}\,\varphi] = 0$.

150. Să se arate că dacă un fascicol de suprafeţe $\varphi(\bar{r}) = \text{const}$ **are proprietatea că pe fiecare suprafaţă** $(\text{grad}\ \varphi)^2 = \text{const}$, **atunci suprafeţele fascicolului sunt paralele.**

Ind. Distanţa a două suprafeţe vecine $\varphi = \text{const}$. este invers proporţională cu valoarea absolută a lui grad φ. Cum aici $(\text{grad}\ \varphi)^2 = \text{const}$, rezultă că două suprafeţe vecine au în toate punctele aceiaş distanţă.

151. Să se găsească $\text{grad}\,[\bar{c}, \bar{r}]^2$, **unde** $\bar{c}$ **este un vector unitar constant.**

Ind. Punem $\varphi = [\bar{c}, \bar{r}]^2$ şi privim $\bar{r}$ ca funcţie de un parametru scalar. Avem $d\varphi = 2\,[[\bar{c}, \bar{r}]\,\bar{c}]\, d\bar{r} = \text{grad}\ \varphi\, d\bar{r}$, care fiind

adevărată pentru orice deplasare $d\bar{r}$, putem scrie grad $\varphi = 2\,[[\bar{c}, \bar{r}]\,\bar{c}] = 2\,\{\bar{r} - \bar{c}\,(\bar{r}.\,\bar{c})\}$. Suprafeţele $[\bar{c}\,\bar{r}]^2 = \text{const}$ sunt cilindri coaxiali (axa este $[\bar{c}, \bar{r}] = 0$). Notând cu ρ raza cilindrului avem $\varphi = \rho^2$ şi grad $\varphi = 2\rho$. grad ρ.

152. Să se găsească grad φ, dacă φ **este azimutul unui plan ce se roteşte în jurul axei** $[\bar{c}, \bar{r}] = 0$.

Ind. Suprafeţele de nivel sunt planele meridiane $\varphi = \text{const}$. grad φ este $\perp$ pe aceste plane şi îndreptat în sensul lui φ crescător. Fie $\rho = |[\bar{c}, \bar{r}]| =$ distanţa axului $[\bar{c}, \bar{r}] = 0$ la origină. Într'o deplasare $[\bar{c}, \bar{r}]\,d\varphi$ perpendiculară pe planul $\varphi = \text{const}$, unghiul azimutul variază cu $d\varphi$. Avem deci grad $\varphi = \dfrac{[\bar{c}, \bar{r}]}{[\bar{c}, \bar{r}]^2}$, $|\text{grad } \varphi| = \dfrac{1}{\rho}$.

153. Să se arate că dacă grad φ formează cu doi vectori unitari $\bar{m}$ şi $\bar{n}$ un unghiu ascuţit, atunci avem $\dfrac{\partial\varphi}{\partial m} > \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$.

Ind. Avem $(\bar{m} - \bar{n})$ grad $\varphi > 0$. Rezultă în grad $\varphi > \bar{n}$ grad φ deci $\dfrac{\partial\varphi}{\partial m} > \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$.

154. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\oint\!\!\oint (\bar{c}\,.\,\bar{r})\,d\bar{\sigma}$, **unde** $\bar{c}$ **este un vector unitar constant.**

Ind. Se observă că putem scrie $\oint\!\!\oint (\bar{c}\,.\,\bar{r})\,d\bar{\sigma} = \int\limits_{(v)} \text{grad } (\bar{c}\,.\,\bar{r})\,d\tau$; cum însă grad $(\bar{c}\,.\,\bar{r}) = \bar{c}$, căci pentru orice deplasare $d\bar{r}$ avem $\bar{c}\,d\bar{r} = d\,(\bar{c}\,.\,\bar{r}) =$ grad $(\bar{c}\,.\,\bar{r})\,d\bar{r}$, se obţine $\oint\!\!\oint (\bar{c}\,.\,\bar{r})\,d\bar{\sigma} = \bar{c}\int\limits_{(v)} d\tau = \bar{c}\,V$ (V fiind volumul mărginit de suprafaţa pe care am integrat.

155. Să se calculeze $\oint\!\!\oint (\bar{c}\,.\,d\bar{\sigma})\,(\bar{c}\,.\,\bar{r})$, $\bar{c}$ **fiind unitar şi constant.**

Ind. $\oint\!\!\oint (\bar{c}\,.\,d\bar{\sigma})\,(\bar{c}\,.\,\bar{r})$ este produsul scalar dintre integrala precedentă şi $\bar{c}$. Deci $\oint\!\!\oint (\bar{c}\,.\,d\bar{\sigma})\,(\bar{c}\,.\,\bar{r}) = V$. Dacă introducem un sistem ortogonal cartezian, cu Oz în direcţia $\bar{c}$, atunci $\oint\!\!\oint (\bar{c}\,.\,d\bar{\sigma})\,(\bar{c}\,.\,\bar{r}) = \iint z\,dx\,ay = V$.

156. Să se calculeze $\oint (\bar{c}.\, d\bar{\sigma})\, \bar{r}$; **(unde** $\bar{c}$ **= unitar şi constant).**

Ind. Inmulţind scalar cu $\bar{c}$ obţinem integrala din problema precedentă $\oint (\bar{c}\,.\, d\bar{\sigma})\,(\bar{c}\,.\,\bar{r}) = V$. Dacă alegem ca suprafaţă de integrare un cilindru cu generatoarele $\| \bar{c}$, atunci şi integrala căutată va fi $\| \bar{c}$. Cum însă orice domeniu spaţial se poate descompune în astfel de cilindri, vom avea pentru o suprafaţă arbitrară $\oint (\bar{c}.\, d\bar{\sigma})\, \bar{r} = \bar{c}\ V$. Din exerciţiile precedente rezultă că

$$\oint (\bar{c}.\, d\bar{\sigma})\, \bar{r} = \oint (\bar{c}.\, \bar{r})\, d\bar{\sigma}$$ (Nu rezultă însă că pentru un $\bar{a}$ $(\bar{r})$ oarecare, am avea $\oint (\bar{c}.\, \bar{a})\, d\bar{\sigma} = \oint (\bar{c}.\, d\bar{\sigma})\, \bar{a}$.

157. Să se calculeze $\oint [\bar{c}, d\bar{\sigma}]\, [\bar{c}, \bar{r}]$ **($\bar{r}$ vector de poziţie, $\bar{c}$ = un vector unitar constant).**

Ind. Avem $[\bar{c}, d\bar{\sigma}]\, [\bar{c}, \bar{r}] = c^2 (d\bar{\sigma}.\, \bar{r}) - (\bar{c}.\, d\bar{\sigma})\ (\bar{c}.\, \bar{r}) = (d\bar{\sigma}.\ \bar{r}) - (\bar{c}.\, d\bar{\sigma})\,(\bar{c}.\, \bar{r})$. Deoarece, cum se arată uşor $\oint (d\bar{\sigma}.\ \bar{r}) = 3\ V$, rezultă $\oint [\bar{c}, d\bar{\sigma}]\, [\bar{c}, \bar{r}] = \oint (d\bar{\sigma}.\, \bar{r}) - \oint (\bar{c}.\, d\bar{\sigma})\, (\bar{c}.\, \bar{r}) = 2\ V$.

158. Să se calculeze div $\bar{r}$.

Ind. Din relaţia de mai sus $\oint d\bar{\sigma}.\ \bar{r}) = 3\ V$ rezultă că div $\bar{r} = 3$.

Sau, analitic: $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$, deci

$$\text{div}\ \bar{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3\,.$$

159. Să se calculeze div $\{\bar{c}\ (\bar{c}.\, \bar{r})\}$ **($\bar{c}$ = unitar constant).**

Ind. Se verifică prin calculul analitic direct formula generală pentru un scalar λ şi un vector $\bar{a}$:

$$\text{div}\ (\lambda \bar{a}) = \lambda\ \text{div}\ \bar{a} + \bar{a}\ \text{grad}\ \lambda$$

Aplicând-o în cazul nostru avem: div $\{\bar{c}\,(\bar{c}.\, \bar{r})\} = (\bar{r}.\, \bar{c})\ \text{div}\ \bar{c} + \bar{c}\ \text{grad}\ (\bar{r}.\, \bar{c}) = 0 + c^2 = 1$.

160. Să se calculeze div $[\bar{c}, [\bar{r}, \bar{c}]]$ **($\bar{c}$ = unitar şi constant).**

Ind. div $[\bar{c}\,[\bar{r}, \bar{c}]] = \text{div}\ c^2\, \bar{r} - \text{div}\ \bar{c}\ (\bar{r}.\, \bar{c}) = 3\, c^2 - c^2 = 2$.

161. Să se calculeze div $\dfrac{\bar{r}}{r}$.

Ind. $\operatorname{div}\frac{\bar{r}}{r}=\frac{1}{r}\operatorname{div}\bar{r}+\bar{r}\ \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3}{r}-\frac{\bar{r}}{r^2}\operatorname{grad}\bar{r}$; însă

$\operatorname{grad}\bar{r}=\frac{\bar{r}}{r}$; deci $\operatorname{div}\frac{\bar{r}}{r}=\frac{3}{r}-\frac{(\bar{r}.\bar{r})}{r^3}=\frac{2}{r}$.

162. Să se arate că $\bar{c}$ fiind un vector constant, avem $\operatorname{div}[\bar{c},\bar{r}]=0$.

Ind. Se verifică prin calcul analitic direct.

163. Să se calculeze div $f(r)\,\bar{r}$.

Ind. $\operatorname{div} f(r)\,\bar{r}=3f(r)+\bar{r}\ \operatorname{grad} f(r)=3f(r)+\bar{r}\frac{dt}{dr}\operatorname{grad} r=$

$=3f(r)+r\frac{dt}{dr}$.

164. Ce formă trebue să aibă funcţia $f(r)$ din exerciţiul precedent, ca să avem div $f(r)\,\bar{r}=0$?

Ind. f trebue să verifice ecuaţia diferenţială

$$3f+r\frac{df}{dr}=0,\quad \text{deci}\quad f=\frac{\text{const}}{r^3}\ .$$

165. Un corp omogen este limitat de două suprafeţe sferice concentrice, ţinute la temperatură constantă. Care este distribuţia temperaturii în interiorul corpului, dacă în corp nu se găsesc surse de căldură?

Ind. Temperatura T trebue să fie, din motive de simetrie, constantă pe toate sferile concentrice din corp, deci T e o funcţie numai de r. Vectorul densităţii curentului de căldură este

$\bar{E}=a\ \operatorname{grad} T=a\frac{dT}{dr}\ \operatorname{grad} r=a\frac{dT}{dr}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$. Cum nu avem surse în interior, avem $\operatorname{div}\bar{E}=0=a\ \operatorname{div}\left(\frac{dT}{dr}\cdot\frac{\bar{r}}{r}\right)$ sau

$\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{d^2T}{dr^2}=0=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)$ deci $\frac{dT}{dr}=\frac{\text{const}}{r^2}$ şi integrând $\operatorname{grad} T=T_0+\frac{\text{const}}{r}$.

166. Aceiaşi problemă pentru un corp limitat de două suprafeţe cilindrice, conxiale şi infinit lungi.

Ind. Din motive de simetrie T depinde numai de distanţa $\rho=|[\bar{c},\bar{r}]|$; ($[\bar{c},\bar{r}]=0$ axa cilindrilor). Vectorul $\bar{E}$ este $\bar{E}=a\frac{dT}{d\rho}\operatorname{grad}\rho=\frac{a}{\rho}\frac{dT}{d\rho}[\bar{c}\,[\bar{r},\bar{c}]]$, căci $2\rho\operatorname{grad}\rho=\operatorname{grad}\rho^2=$ $=\operatorname{grad}[\bar{c},\bar{r}]^2=2[\bar{c}\,[\bar{r},\bar{c}]]$. Cum nu avem surse în interior, $\operatorname{div}\bar{E}=0$. Notăm $\frac{a}{\rho}\frac{dT}{d\rho}=f(\rho)$ şi determinăm f astfel ca

div $\bar{E}$ să fie nulă. Avem div $\{f(\rho)\,[\bar{c}[\bar{r},\bar{c}]]\} = f(\rho)$ div $[\bar{c}[\bar{r},\bar{c}]] + \frac{df}{d\rho}\,[\bar{c}\,[\bar{r},\bar{c}]]$ grad $\rho = 2f(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}\,[\bar{c}\,[\bar{r},\bar{c}]]^2 = 2f + \rho\frac{df}{d\rho} = 0$; de aici rezultă $f(\rho) = \frac{\text{const}}{\rho^2} = \frac{a}{\rho}\frac{dT}{d\rho}$ sau integrând $T - T_0 = \text{const.}\,\log\frac{\rho}{\rho_0}$ (ρ_0 este distanța pentru care $T = T_0$).

167. Să se calculeze rot $\bar{r}$. ($\bar{r}$ = **vector de poziție**).

Ind. a) Unim două puncte $P_0(\bar{r}_0)$ și $P(\bar{r})$ printr'o curbă arbitrară (C) și formăm integrala curbilinie

$$\int_{(C)} \bar{r}\,d\bar{r} = \frac{1}{2}\int_{(C)} d(\bar{r}^2) = \frac{1}{2}(\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2).$$

Integrala nu depinde de drum, și deci pe orice curbă închisă $\oint \bar{r}\,d\bar{r} = 0$. Vectorul $\bar{r}$ n'are deci vârtejuri, rot $\bar{r} = 0$.

b) Analitic: rot $\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$

168. Să se calculeze rot $\{f(r)\,\bar{r}\}$, **unde** f **este o funcție arbitrară.**

Ind. Se aplică formula rot $(\lambda\bar{a}) = \lambda$ rot $\bar{a} - [\bar{a}, \text{grad}\,\lambda]$; se obține rot $f(\bar{r})\,\bar{r} = f(r)$ rot $\bar{r} - [\bar{r}, \text{grad}\,f(r)] = -\frac{df}{dr}[\bar{r}, \text{grad}\,r] = 0.$

169. Fiind dat vectorul $\bar{a} = f(\rho)\,[\bar{c}, \bar{r}]$, **unde** $\bar{c}$ **este un vector unitar constant,** $\rho = |\,[\bar{c}, \bar{r}]\,|$, **să se determine funcția** $f(\rho)$ **astfel încât să avem** rot $\bar{a} = 0$.

Ind. Avem rot $\bar{a} = f(\rho)$ rot $[\bar{c}, \bar{r}] - [[\bar{c}, \bar{r}]\,\text{grad}\,\rho]\,\frac{df}{d\rho}$. Se vede ușor că $[\text{rot}\,\bar{c}, \bar{r}] = 2\bar{c}$ și $\rho\,\text{grad}\,\rho = [[\bar{c}, \bar{r}]\,\bar{c}]$ deci

$$[[\bar{c}, \bar{r}], \text{grad}\,\rho] = \frac{1}{\rho}\left\{[\bar{c}, \bar{r}]\,\bar{c}\,[\bar{c}, \bar{r}] - \bar{c}\,[\bar{c}, \bar{r}]^2\right\} = -\frac{\rho^2 c}{\rho} = -\rho c.$$

Prin urmare rot $\bar{a} = 2f(\rho)\,\bar{c} + \rho\frac{df}{d\rho}\,\bar{c}$. Anulând această expresie obținem o ecuație diferențială, care ne dă $f(\rho) = \frac{\text{const}}{\rho^2}$.

170. Să se calculeze rot $\{\bar{c}\,(\bar{r}, \bar{c})\}$; $\bar{c}$ **fiind un vector unitar constant.**

Ind. rot $\bar{c}\,(\bar{r}.\,\bar{c}) = (\bar{r}.\,\bar{c})$ rot $\bar{c} - [\bar{c},$ grad $(\bar{r}.\,\bar{c})] = 0 - [\bar{c},\bar{c}] = 0.$

171. Să se calculeze rot $\{\bar{c}\,f\,(\bar{r},\bar{c})\}$ **unde** $\bar{c}$ = **vector unitar constant şi** f **funcţie arbitrară.**

Ind. rot $\{\bar{c}\,f\,(\bar{r},\bar{c})\} = -\,[\bar{c},$ grad $(\bar{r}.\,\bar{c})]\,\dfrac{df}{d(\bar{r},\bar{c})} = 0.$

172. Să se calculeze rot $[\bar{c}\,[\bar{r},\bar{c}]]$; $\bar{c}$ = **vector unitar constant.**

Ind. rot $[\bar{c}\,[\bar{r},\bar{c}]]$ = rot $\{\bar{r} - \bar{c}\,(\bar{r}.\,\bar{c})\} = 0.$ Din ultimele trei exerciţii se poate deduce că rotorul unui vector este nul, dacă liniile de câmp sunt drepte $\perp$ pe o dreaptă dată, valoarea absolută a vectorului fiind funcţie numai de distanţa originii vectorului de această dreaptă.

173. Să se arate că $\oint_{(C)} \varphi\, d\bar{r} = \int_{(S)} [d\bar{\sigma}, \text{grad}\,\varphi]$, S **fiind o suprafaţă oarecare mărginită de curba** (C).

Ind. Să înmulţim integrala curbilinie, scalar, cu un vector arbitrar, constant $\bar{a}$. Aplicând teorema lui STOKES, avem

$$\bar{a}\oint_{(C)} \varphi\, d\bar{r} = \oint_{(C)} (a\bar{r}.\,\bar{a})\,\varphi = \int_{(S)} (d\bar{\sigma}.\,\text{rot}\,(\bar{a}\,\varphi)) = \int_{(S)} d\bar{\sigma}\,[\text{grad}\,\varphi,\bar{a}] =$$

$$= \bar{a}\int_{(S)} [d\bar{\sigma}, \text{grad}\,\varphi],\ \bar{a}$$ fiind arbitrar proprietatea este demonstrată.

174. Să se calculeze divergenţa şi rotorul vectorului $\bar{K} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + yz^2\bar{k}$, **apoi integrala de volum din divergenţă extinsă asupra unui cub având lungimea muchiei** $= 2$, **centrul în origină şi muchiile paralele cu** $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$. **Să se verifice teorema lui** GAUSS. **In fine să se calculeze fluxul rotorului prin suprafaţa tăiată în cub prin planul** $(\bar{\imath}.\,\bar{r}) = 0$ **şi să verifice teorema lui** STOKES.

Ind. Avem, făcând calculul direct div $\bar{k} = 2 + 2\,yz$, şi rot $\bar{k} = \bar{\imath}z^2$. (Sau, întrebuinţând operatorul „grad“: (grad, $\bar{k}$) $= 2 + 2\,yz$; [grad, $\bar{k}$] $= [\bar{\jmath}, \bar{k}]\,z^2 = \bar{\imath}\,z^2$). Integrala spaţială extinsă la cubul considerat din div $\bar{k}$ este dublul volumului cubului $= 16$. Pe de altă parte integrala de suprafaţă $\oint \bar{k}.\,d\bar{\sigma} = \oint (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath})\,d\bar{\sigma} =$

$= 2.4 + 2.4 = 16$, (căci $yz^2\,\bar{k}\,d\bar{\sigma}$ se reduce la integrare) ceiace verifică teorema lui GAUSS. Fluxul rotorului este:

$$\iint z^2\,dy\,dz = 2\int_{-1}^{+1} z^2\,dz = \frac{4}{3}\cdot$$ Iar $\oint \bar{k}.\bar{r}$ dealungul conturu-

lui patratului de intersecţie $= \int_{-1}^{+1} y \cdot y + \int_{-1}^{+1} z^2\,dz + \int_{+1}^{-1} y\,dy - \int_{+1}^{-1} z^2\,dz = \frac{4}{3}$. Deci şi teorema lui STOKES este verificată.

175. Să se calculeze $[\text{grad}, \bar{a}]\,\bar{b}$; $[[\bar{a}, \text{grad}]\,\bar{b}]$; $[[\text{grad}, \bar{a}]; \bar{b}]\,[\bar{a}, \text{grad}]\,\bar{r}$; $[[\bar{a}, \text{grad}]\,\bar{r}]$.

Ind. a) $[\text{grad}, \bar{a}]\,\bar{b} = (\text{grad}, [\bar{a}, \bar{b}]) = \bar{b}\ \text{rot}\ \bar{a} - \bar{a}\ \text{rot}\ \bar{b}$.

b) $[[\bar{a}, \text{grad}]\,\bar{b}] = \text{grad}.(\bar{a}.\bar{b}) - \bar{a}\,(\text{grad}.\bar{b}) = (\bar{a}.\ \text{grad})\,\bar{b} + [\bar{a}, \text{rot}\,\bar{b}] - \bar{a}\ \text{div}\ \bar{b}$.

c) $[[\text{grad}, \bar{a}]\,\bar{b}] = (\text{grad}.\ \bar{b})\ \bar{a} - \text{grad}\ (\bar{a}.\ \bar{b}) = \bar{a}\ \text{div}\ \bar{b} - (\bar{a}.\ \text{grad})\,\bar{b} - [\bar{a}, \text{rot}\,\bar{b}] - [\bar{b}, \text{rot}\,\bar{a}]$.

d) $[\bar{a}, \text{grad}]\,\bar{r} = (\bar{a}.\ \text{rot}\,\bar{r}) = 0$.

e) $[[\bar{a}, \text{grad}]\,\bar{r}] = (\text{grad}.\ (\bar{a}.\ r)) - \bar{a}\ \text{div}\,\bar{r} = (\bar{a}.\ \text{grad})\ \bar{r} - 3\,\bar{a} = -2\,\bar{a}$.

176. Fiind dat pe o sferă de rază r **un triunghiu sferic** ABC, **cu laturile** a, b, c **şi unghiurile opuse respectiv** A, B, C, **să se stabilească relaţia fundamentală** $\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C$.

Ind. Introducem 5 vectori $\overrightarrow{OC} = \bar{r}$, $\overrightarrow{OH} = \bar{X}$, $\overrightarrow{CH} = \bar{x}$, $\overrightarrow{OK} = \bar{Y}$, $\overrightarrow{CK} = \bar{y}$, unde CH respectiv CK sunt segmentele tangentelor la cercurile mari a resp. b până la întâlnire cu OB respectiv OA. Avem $(\bar{X}.\bar{Y}) = XY\cos c$. Inlocuim $\bar{X} = \bar{r} + \bar{x}$ şi $\bar{Y} = \bar{r} + \bar{y}$; găsim $(\bar{r}.\bar{r}) + (\bar{r}.\bar{y}) + (\bar{r}.\bar{x}) + (\bar{x}.\bar{y}) = XY\cos c$. Cum $\bar{r} \perp \bar{y}$ şi $\bar{r} \perp x$ rămâne $r^2 = xy\cos C = XY\cos c$ sau $\cos c = \frac{r}{X}\ \frac{r}{Y} + \frac{x}{X}\ \frac{y}{Y}\cos C$. Insă din triunghiurile dreptunghice OCH şi OCK avem $\frac{r}{X} = \cos a$, $\frac{r}{Y} = \cos b$, $\frac{x}{X} = \sin a$, $\frac{y}{Y} = \sin b$. Inlocuind găsim formula cerută.

Altfel. Notând $\overrightarrow{OA} = \bar{A}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{B}$, $\overrightarrow{OC} = \bar{C}$, considerăm produsul $([\bar{A}, \bar{C}].[\bar{B}, \bar{C}])$; dacă consider că raza sferei $= 1$ atunci valorile absolute ale produselor vectoriale sunt $\sin b$ şi $\sin a$. Dar $[\bar{A}, \bar{C}] \perp$ (planul OAC) şi $[\bar{B}, \bar{C}] \perp$ (planul OBC); deci unghiul acestor vectori $= C$; deci $([\bar{A}, \bar{C}].[\bar{B}, \bar{C}]) = \sin a \sin b \cos C$. Pe de altă parte valoarea produsului este

$$\begin{vmatrix} (\bar{A}.\bar{B}) & (\bar{A}.\bar{C}) \\ (\bar{C}.\bar{B}) & (\bar{C}.\bar{C}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos c & \cos b \\ \cos a & 1 \end{vmatrix} = \cos c - \cos a \cos b.$$

Comparând cu valoarea de mai sus, obţinem formula cerută.

Scanned with OKEN Scanner

177. Să se demonstreze formula sinusurilor din trigonometrie sferică.

Ind. Cu notaţiile de mai sus calculăm $[[\bar{A}, \bar{C}], [\bar{B}, \bar{C}]] = (\bar{A}\,\bar{C}\,\bar{C})\,\bar{B} - (\bar{A}, \bar{C}, \bar{B})$. Primul produs fiind nul, avem $[[\bar{A}, \bar{C}], [\bar{B}, \bar{C}]] = (\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})\,\bar{C}$. Scriind egalitatea valorilor absolute din ambii membri, avem $\sin a \sin b \sin C = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, şi prin permutări circulare; $\sin b \sin c \sin A = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ şi $\sin c \sin a \sin B = (\bar{A}, \bar{C}, \bar{C})$ deci $\sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin a \sin b \sin C$. Impărţind prin $\sin a \sin b \sin c$ se obţine formula sinusurilor.

178. Să se demonstreze formula

$$\bar{a}\ \text{grad}\ (\bar{b}.\ \text{grad}\ \varphi) - \bar{b}\ \text{grad}\ (\bar{a}.\ \text{grad}\ \varphi) = (\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b} - \bar{b}\ \text{grad}.\ \bar{a})\ \text{grad}\ \varphi.$$

Ind. Avem $\bar{a}\ \text{grad}\ (\bar{b}\ \text{grad}\ \varphi) - \bar{b}\ \text{grad}\ (\bar{a}\ \text{grad}\ \varphi) = (\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b} - \bar{b}\ \text{grad}.\ \bar{a}).\ \text{grad}\ \varphi + \bar{a}\ \text{grad}\ (\bar{\mathbf{b}}\ \text{grad}\ \varphi) - \bar{b}\ \text{grad}\ (\bar{\mathbf{a}}\ \text{grad}\ \varphi)$ (aici de exemplu $\bar{a}\ \text{grad}\ (\bar{\mathbf{b}}\ \text{grad}\ \varphi)$ înseamnă că operaţia „grad" se aplică *numai* factorului $\bar{b}$ din paranteză); cum însă $\bar{a}\ \text{grad}\ (\bar{\mathbf{b}}\ \text{grad}\ \varphi) = \bar{b}\ \text{grad}\ (\bar{\mathbf{a}}\ \text{grad}\ \varphi)$, rezultă relaţia cerută.

179. Să se calculeze $\Delta(\varphi\,\bar{a})$, unde φ este o funcţie scalară.

Ind. $\Delta\,\varphi\,\bar{a} = \varphi\,\Delta\,\bar{a} + \bar{a}\,\Delta\,\varphi + 2\ \text{grad}_{\varphi}\ \text{grad}_{\bar{a}}\ (\varphi\,\bar{a}) = \varphi\,\Delta\,\bar{a} + \bar{a}\,\Delta\,\varphi + 2\ (\text{grad}\ \varphi)\ \text{grad}\,\bar{a}$; $(\text{grad}_{\bar{a}}\ (\varphi\bar{a})$ arată că „grad" operează numai asupra lui $\bar{a}$ din $(\varphi\bar{a})$.

180. Să se calculeze $\text{div}\ (\bar{a}.\ \text{grad}\ \bar{b})$.

Ind. Consider formula $\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b} + \bar{b}\ \text{grad}.\ \bar{a} = \text{grad}\ (\bar{a}.\ \bar{b}) - [\bar{a}, \text{rot}\,\bar{b}] - [\bar{b}, \text{rot}\,\bar{a}]$ şi calculez $\text{div}\ (\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b} + \bar{b}\ \text{grad}.\ \bar{a})$ şi $\text{div}\ (\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b} - \bar{b}\ \text{grad}.\ \bar{a})$, adunând obţinem $\text{div}\ (\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b}) = \bar{a}\ \text{grad div}\ \bar{b} - \text{rot}\,\bar{a}\ \text{rot}\,\bar{b} + \frac{1}{2}\{\Delta(\bar{a}.\bar{b}) - \bar{a}\Delta\bar{b} - \bar{b}\Delta\bar{a}\} = \bar{a}\ \text{grad div}\ \bar{b} - \text{rot}\,\bar{a}\ \text{rot}\,\bar{b} + \text{grad}_{\bar{a}}\ \text{grad}_{\bar{b}}\ (\bar{a}.\ \bar{b})$.

181. Să se calculeze $\text{rot}\ (\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b})$.

Ind. Calculând rotorul aceloraşi vectori ca mai sus se deduce $\text{rot}\ (\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b}) = \bar{a}\ \text{grad}.\ \text{rot}\,\bar{b} - \text{rot}\,\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b} + \text{div}\,\bar{b}\ \text{rot}\,\bar{a} - [\text{rot}\,\bar{a}, \text{rot}\,\bar{b}] + \frac{1}{2}\{\Delta[\bar{a}, b] - [\bar{a}, \Delta b] + [\bar{b}, \Delta\bar{a}] = \bar{a}\ \text{grad}.\ \text{rot}\,\bar{b} - \text{rot}\,\bar{a}\ \text{grad}.\ \bar{b} + \text{div}\,\bar{b}\ \text{rot}\,\bar{a} - [\text{rot}\,\bar{a}, \text{rot}\,\bar{b}] + \text{grad}_{\bar{a}}\ \text{grad}_{\bar{b}}\ .\ [\bar{a}, \bar{b}]$.

182. Fie un element de suprafaţă $d\bar{\sigma}$ dat prin două elemente liniare:

$d\bar{\sigma} = [d_1\bar{r}, d_2\bar{r}]$. **Să se arate că o deplasare $d\bar{r}$ a punctului satisface relația** $\delta\bar{r}$ grad. $d\bar{\sigma} = d\bar{\sigma}$ div $\delta\bar{r}$ — grad $(d\bar{\sigma}.\delta\bar{r})$.

Ind. Avem $\delta\bar{r}$ grad. $d_1\bar{r} = d_1\bar{r}$ grad. $\delta\bar{r}$ și $\delta\bar{r}$ grad. $d_2\bar{r} = d_2\bar{r}$ grad. $\delta\bar{r}$; deci $\delta\bar{r}$ grad. $d\bar{\sigma} = \delta\bar{r}$ grad. $[d_1\bar{r}, d_2\bar{r}] = [(\delta\bar{r}$ grad. $d_1\bar{r}), d_2\bar{r}] + [d_1\bar{r}, (\delta\bar{r}$ grad. $d_2\bar{r})] = [(d_1\bar{r}$ grad. $\delta\bar{r}), d_2\bar{r}] + [d_1\bar{r}, (d_2\bar{r}$ grad. $\delta\bar{r})]$. Insă, oricare ar fi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ avem $[\bar{a}, (\bar{b}$ grad. $\bar{v})] + [(\bar{a}$ grad $\bar{c}), \bar{b}] = -[[\bar{a}, \bar{b}]$, grad$]\bar{c}]$; înlocuind găsim formula cerută.

183. **Fie un element de volum dat de trei elemente liniare $d\bar{v} = d_1\bar{r}\,[d_2\bar{r}, d_3\bar{r}]$. Să se arate că o deplasare $\delta\bar{r}$ a punctului satisface relația** $\delta\bar{r}$ grad $dv = dv$ div $\delta\bar{r}$

Ind. Avem relațiile de permutabilitate, ca mai sus. Deci $\delta\bar{r}$ grad $dv = \delta\bar{r}$ grad. $(d_1\bar{r}, d_2\bar{r}, d_3\bar{r}) = [d_2\bar{r}, d_3\bar{r}](\delta\bar{r}$ grad $d_1\bar{r} + [d_3\bar{r}, d_1\bar{r}](\delta\bar{r}$ grad. $d_2\bar{r}) + [d_1\bar{r}, d_2\bar{r}](\delta\bar{r}$ grad. $d_3\bar{r}) = [d_2\bar{r}, d_3\bar{r}](d_1\bar{r}$ grad. $\delta\bar{r}) +$ termeni obținuți prin permutare $= (d_1\bar{r}, d_2\bar{r}, d_3\bar{r})$ div $\delta\bar{r}$. deci: $\delta\bar{r}$ grad. $dv = dv$ div $\delta\bar{r}$.

184. **Să se demonstreze relația** $\delta\int_{(C)}\bar{a}\,d\bar{r} = \int_{(C)} d\bar{r}\,\{\text{grad}\,(\bar{a}.\delta\bar{r}) + [\text{rot}\,\bar{a}, \delta\bar{r}]\}$.

Ind. Consider variația elementului $\bar{a}\,d\bar{r}$. Avem $\delta\bar{r}$ grad $(\bar{a}.d\bar{r}) = \bar{a}(\delta\bar{r}$ grad. $d\bar{r}) + d\bar{r}(\delta\bar{r}$ grad. $\bar{a}) = d\bar{r}\{\delta\bar{r}$ grad. $\bar{a} +$ grad. $(\bar{a}.d\bar{r})\}$; dar, grad $(\bar{a}.\delta\bar{r}) =$ grad $(\bar{a}.\delta\bar{r}) +$ grad $(\bar{a}.\delta\bar{r})$ și grad $(\bar{a}.\delta\bar{r}) = \delta\bar{r}$ grad. $\bar{a} + [\delta\bar{r}, \text{rot}\,\bar{a}]$ rezultă că $\delta\bar{r}$ grad $(\bar{a}.d\bar{r}) = \{\text{grad}\,(\bar{a}.\delta\bar{r}) - [\delta\bar{r}.\text{rot}\,\bar{a}]\} = \{\text{grad}\,(\bar{a}.\delta\bar{r}) + [\text{rot}\,\bar{a}\,\delta\bar{r}]\}$. Integrând pe *(C)* obținem relația cerută. Dacă *(C)* este curbă închisă, atunci transformând relația găsită prin formula lui STOKES, găsim $\delta\int_{(S)} d\bar{\sigma}\,\text{rot}\,\bar{a} = \int_{(S)} d\bar{\sigma}\,\text{rot}[\text{rot}\,\bar{a}, \delta\bar{r}]$.

185. **Să se deducă formula**

$$\delta\int_{(C)}[d\bar{r}, \bar{a}] = \int_{(C)}\{[d\bar{r}, \delta\bar{r}\text{ grad. }\bar{a}] + [(d\bar{r}\text{ grad. }\delta\bar{r}), \bar{a}]\}.$$

Ind. Făcând calculele asemănătoare celor din exercițiul precedent, găsim $\delta\bar{r}$ grad. $[d\bar{\sigma}, \bar{a}] = [d\bar{\sigma}, \{\delta\bar{r}$ grad. $\bar{a} +$ grad $(\bar{a}.\delta\bar{r})] + [d\bar{\sigma}, \bar{a}]$ grad. $\delta\bar{r} = [d\bar{\sigma}, \{$ grad $(\bar{a}.\delta\bar{r}) + [\text{rot}\,\bar{a}, \delta\bar{r}]\}] + [d\bar{\sigma}, \bar{a}]$ grad. $\delta\bar{r}$, de unde rezultă ușor formula cerută.

186. **Un lichid omogen se mișcă astfel încât fiecare moleculă are viteza $\bar{v}$. Cum variază densitatea ρ a lichidului, dacă viteza într'un punct $P(\bar{r})$ este dată de $\bar{v} = \bar{c}(\bar{r}.\bar{c})$; $\bar{c}$ fiind un vector unitar constant?**

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Folosim ecuaţia de continuitate $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0$. Or, în cazul nostru, $\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div} (\bar{c}\,(\bar{r}.\,\bar{c})) = c^2 = 1$; deci $\dot{\rho} + \rho = 0$; adică $\rho = \rho_0 e^{-t}$.

187. Aceiaşi problemă pentru cazul când $\bar{v} = [[\bar{c}, \bar{r}], \bar{c}]$.

Ind. Aici $\operatorname{div} [[\bar{c}, \bar{r}]\,\bar{c}] = 2$, deci $\dot{\rho} + 2\rho = 0$ şi $\rho = \rho_0 e^{-2t}$.

188. Aceiaşi chestiune pentru cazul $\bar{v} = \bar{r}$.

Ind. $\operatorname{div} \bar{r} = 3$; $\dot{\rho} + 3\rho = 0$ deci $\rho = \rho_0 e^{-3t}$. Deci, în fiecare caz ρ este o funcţie numai de timp.

189. Aceiaşi chestiune pentru cazul $\bar{v} = \varphi[\bar{c}, \bar{r}]$, unde φ este o funcţiune arbitrară de $|[\bar{c}, \bar{r}]|$.

Ind. Avem $\operatorname{div} \varphi[\bar{c}, \bar{r}] = 0$, dacă φ depinde numai de $|[\bar{c}, \bar{r}]|$. Ecuaţia continuităţii se reduce la $\dot{\rho} = 0$ şi deci $\rho = \rho_0$, adică densitatea fluidului rămâne constantă în timpul mişcării. Deci: dacă un corp se deformează astfel încât toate punctele sale descriu cercuri coaxiale, deformarea depinzând numai de distanţa punctului considerat la axa comună, atunci volumul corpului rămâne neschimbat.

190. Să se găsească rotorul câmpului electric $\bar{E}$ într'un punct al unui corp material mobil în câmpul dat al vectorului de inducţie magnetică $\bar{B}$ (variabil în timp şi spaţiu), astfel încât un punct al mobilului are la un moment dat viteza $\bar{v}$ (funcţie de poziţie şi timp).

Ind. Notând cu Φ fluxul lui $\bar{B}$ printr'o suprafaţă materială mărginită de o curbă (C) formată din punctele corpului mobil, şi ţinând seamă că $\operatorname{div} \bar{B} = 0$, avem $\int_{(C)} \bar{E}\, d\bar{r} = -\frac{d\Phi}{dt} =$

$$= -\frac{d}{dt}\int_{(S)} \bar{B}\, d\bar{\sigma} = -\int_{(S)} d\bar{\sigma} \left\{ \bar{v} \operatorname{div} \bar{B} + \operatorname{rot} [\bar{B}, \bar{v}] + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right\} =$$

$$= -\int_{(S)} d\bar{\sigma} \left\{ \operatorname{rot} [\bar{B}, \bar{v}] + \frac{\partial B}{\partial t} \right\} = \int_{(S)} d\bar{\sigma} \operatorname{rot} \bar{E}.$$ Cum însă suprafaţa (S) trebue să fie arbitrară, avem $\operatorname{rot} \bar{E} = \operatorname{rot} [\bar{v}, \bar{B}] - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$.

Observ că ultima relaţie se scrie $\bar{E}_0 = \bar{E} + [\bar{B}, \bar{v}] = -\operatorname{grad} \chi$, căci $\operatorname{rot} (\bar{E} + [\bar{B}, \bar{v}]) = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$. Deci vectorul $\bar{E}_0$ este fără vârtejuri. Dacă corpul este rigid, atunci $\bar{v} = \bar{v}_0 + [\bar{\omega}, \bar{r}]$ cu $\operatorname{div} = 0$ şi $\bar{B} \operatorname{grad}. \bar{v} = -[\bar{B}, \bar{\omega}]$. Putem atunci scrie

$$-\operatorname{rot} \bar{E} = \bar{v} \operatorname{grad}. \bar{B} + [\bar{B}, \bar{\omega}] + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

191. **Să se demonstreze relația** $\bar{t}\cdot \operatorname{rot}\bar{t}-\bar{n}\cdot\operatorname{rot}\bar{n}-\bar{b}\cdot\operatorname{rot}\bar{b}=\frac{2}{T}$ **($\bar{t}$ = vectorul unitar al tangentei, $\bar{n}$ = al normalei principale, $\bar{b}$ = al binormalei la o curbă, T = torsiunea).**

Ind. Avem $\bar{t}\operatorname{rot}\bar{t}=\bar{t}\operatorname{rot}[\bar{n},\bar{b}]=\bar{t}\{\operatorname{grad}\bar{b}\cdot\bar{n}-\operatorname{grad}\bar{n}\cdot\bar{b}\}=\bar{t}\{\bar{b}\operatorname{grad}\cdot\bar{n}+\bar{n}\cdot\operatorname{grad}\bar{b}-\bar{n}\operatorname{grad}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\operatorname{grad}\bar{n}\}$; dar $\bar{t}\perp\bar{n}\operatorname{grad}\bar{b}$ și $\bar{t}\perp\bar{b}\cdot\operatorname{grad}\bar{n}$, deci $\bar{t}\operatorname{rot}\bar{t}=\bar{t}(b\operatorname{grad}\cdot\bar{n}-\bar{n}\operatorname{grad}\cdot\bar{b})=\bar{b}\{\bar{t}\operatorname{grad}\cdot\bar{n}+[t,\operatorname{rot}\bar{n}]\}-\bar{n}\{t\operatorname{grad}\cdot\mathbf{b}+[\bar{t},\operatorname{rot}\bar{b}]\}=\bar{n}\operatorname{rot}\bar{n}+\bar{b}\operatorname{rot}\bar{b}+\bar{b}\,(\bar{t}\ \operatorname{grad}.\ \bar{n})\,\bar{n}\,(\bar{t}\ \operatorname{grad}.\ \bar{b})$. Ținând seamă că din formulele lui FRENET rezultă $\bar{b}\,(\bar{t}\operatorname{grad}.\,\bar{n})=\frac{1}{T}$ și $\bar{n}\,(\bar{t}\operatorname{grad}.\,\bar{b})=-\frac{1}{T}$, deducem relația enunțată.

192. **Să se demonstreze formula** $\operatorname{div}\mathbf{b}=-\bar{t}\operatorname{rot}\bar{n}$ **(formula lui** R. ROTHE**)**

Ind. $\operatorname{div}\bar{b}=\operatorname{div}[\bar{t},\bar{n}]=\bar{n}\operatorname{rot}\bar{t}-\bar{t}\operatorname{rot}\bar{n}$. Se vede însă ușor că $\bar{n}\perp\operatorname{rot}\bar{t}$, de unde rezultă formula.

193. **Să se calculeze elementul de arc, de suprafață și de volum în coordonatele cilindrice.**

Ind. Avem $d\bar{r}=\bar{s}ds=\bar{k}dz+\frac{[\bar{k}\,[\bar{r},\bar{k}]]}{|\,[\bar{r},\bar{k}]\,|}d\rho+[\bar{k},\bar{r}]\ d\varphi$; $d\bar{r}^2=ds^2=dz^2+d\rho^2+\rho^2d\varphi^2$. Pentru 3 elemente superficiale perpendiculare pe $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ avem: $\bar{u}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$, $\bar{v}\,\rho\,dz\,d\varphi$, $\bar{w}\,dz\,d\rho$. In fine $d\tau=\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$.

194. **Se consideră vectorul $\bar{a}$ de componente R,Φ,Θ în coordonate sferice ρ,φ,θ. Să se arate că**

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2R)+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot\Theta).$$

Ind. Ținem seamă de formulele $\operatorname{grad}r=\frac{\bar{r}}{r}$ $\operatorname{grad}\theta=-\frac{[\bar{r}[\bar{k},\bar{r}]]}{r^2\rho}$, $\operatorname{grad}\varphi=\frac{[\bar{k},\bar{r}]}{\rho^2}$.

195. **Să se arate că volumul (V) închis de suprafața (S) se exprimă prin relația** $V=\frac{1}{3}\int_{(S)}r\cos(\bar{r},\bar{n})\,d\sigma$, **$\bar{r}$ fiind vectorul de poziție și $\bar{n}$ vectorul unitar al normalei exterioare.**

Ind Aplicăm câmpului $\bar{r}(x,y,z)$ teorema lui GAUSS.

196. **Se consideră un fluid în mișcare și se formează circulația vectorului viteză $\bar{v}$ dealungul unei curbe închise (C) formată din mo-**

Scanned with OKEN Scanner

lecule fluidului. Să se arate că această circulație nu variază cu timpul (deși curba se deformează) dacă este satisfăcută ecuația diferențială $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\,\text{grad.}\,\bar{v} = \text{grad}\,(V - P)$ **(ecuația de mișcare a lui** EULER **în cazul forței conservative** $= \text{grad}\,V$, **densitatea fiind o funcție de presiune ;** $P = \int_{P_0}^{P} \frac{dp}{\rho}$ **).**

Ind. E suficient să arătăm că „variația substanțială" a circulației $\oint_{(C)} \bar{v}\,d\bar{r}$ este nulă. Scriind-o desvoltat avem $\frac{d}{dt}\oint_{(C)} \bar{v}\,d\bar{r} = \oint_{(C)} \left\{ \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\,\text{grad.}\,\bar{v} + [\bar{v}, \text{rot}\,\bar{v}] \right\} d\bar{r}$; cum însă $\bar{v}\,\text{grad}\,\bar{v} + [\bar{v}, \text{rot}\,\bar{v}] = \frac{1}{2}\,\text{grad}\,\bar{v}^2$, și $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\,\text{grad.}\,\bar{v} = \text{grad}\,(V - P)$, rezultă $\frac{d}{dt}\oint_{(C)} \bar{v}\,d\bar{r} = \oint_{(C)} d\bar{r}\,\text{grad}\,(V - P + \frac{1}{2}\bar{v}^2) = 0$.

197. Să se arate că dacă vectorul $\bar{p}\,(u)$ **este derivabil în intervalul** (a, b), **atunci există o valoare** c **a parametrului** u $(a \leq c \leq b)$ **pentru care** $\frac{d\,\bar{p}\,(c)}{d\,u}$ **este coplanar cu** $\bar{p}\,(a)$ **și** $\bar{p}\,(b)$.

Ind. Aplicăm funcțiunii $(\bar{p}\,(u)\,,\,\bar{p}\,(a)\,,\,\bar{p}\,(b))$ care se anulează pentru $u = a$ și $u = b$, teorema lui ROLLE. Să se explice geometric.

198. Să se găsească liniile de nivel și punctele singulare ale câmpului $\varphi\,(\bar{r}) = (\bar{m}\bar{r} + \alpha)\,(\bar{m}\bar{r} + \beta)$, unde $\bar{m}, \alpha, \beta$ sunt constante și $m \neq 0$.

Ind. Liniile de nivel se compun aici din perechi de drepte paralele cu dreapta $\bar{m}\,.\,\bar{r} + \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$, care reprezintă locul geometric al punctelor singulare.

199. Să se arate că normalele principale la o curbă $\bar{r} = \bar{r}\,(s)$ **nu pot fi paralele în toate punctele.**

Ind Dacă am avea $\bar{\mathfrak{n}} = \text{const}$, atunci din formulele lui FRENET am avea $-\frac{\bar{\mathfrak{t}}}{R} + \frac{\bar{\mathfrak{b}}}{T} = 0$, cum însă $\bar{\mathfrak{t}}$ și $\bar{\mathfrak{b}}$ nu sunt coliniare rezultă $\frac{1}{R} = \frac{1}{T} = 0$, deci am avea o linie dreaptă (care se exclude, căci în acest caz $\bar{\mathfrak{n}} =$ nedeterminat).

Scanned with OKEN Scanner

200. Fie curba $\bar{r} = \frac{1}{2a}\left\{(\sigma\sqrt{a^2-\sigma^2} - a^2 \text{ arc } \cos\frac{\sigma}{a})\,\bar{i} + \sigma^2\bar{j}\right\}$.

Să se arate că parametrul σ poate fi privit ca abscisă curbilinie. Să se găsească raza de curbură (a = const).

Ind. Făcând calculul direct avem $\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 = 1$.

Aplicând formula $\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2}$ se găsește apoi $R = \sqrt{a^2-\sigma^2}$.

NOŢIUNI
DE
TEORIA POTENŢIALELOR

CAP. I

Potenţialul unei distribuţii discrete

138. Formularea problemei. Am amintit că un întins domeniu de probleme pe care Natura le pune Fizicii se încadrează în concepţia matematică şi fizică de *câmp*.

Să luăm ca exemplu problema *atracţiei universale* (ISAAC NEWTON; vezi *Mecanica*), problemă, în care se poate pune în evidenţă existenţa unui *câmp gravitaţional* derivând dintr'un potenţial scalar. In adevăr, după *legea atracţiei universale* toate corpurile materiale din univers se atrag între ele cu o forţă, care pentru două corpuri de massă m_1 şi m_2, aşezate în punctele P_1 şi P_2 aflate la distanţa $\bar{r} = \overrightarrow{P_1 P_2}$, este exprimată prin relaţia

$$\bar{F}(P_1 P_2) = -f m_1 m_2 \frac{\bar{r}}{r^3} , \tag{1}$$

unde f este o constantă universală (v. *Mecanica*). Aşadar, forţa de atracţie este un vector având direcţia dreptei ce uneşte cele două corpuri şi sensul (pentru *atracţie*) de la corpul atras spre cel atractiv, iar valoarea absolută este proporţională cu massele corpurilor şi invers proporţională cu patratele distanţei lor.

Formularea *corpusculară* a legii (1), care presupune existenţa reală şi simultană a ambelor corpuri P_1 şi P_2, pentru ca forţa (1) să ia fiinţă, ilustrează vechea concepţie a *acţiunii ins-*

Scanned with OKEN Scanner

tantanee la distanță, anterioară ideilor prin care FARADAY a deschis drum nou concepției fecundă a *acțiunii din aproape în aproape*, (acțiune „locală"), care stă ca bază intuitivă noțiunii de câmp, esențială în Electricitate, Optică și multe alte capitole ale Fizicii moderne (v. *Electromagnetismul*).

In concepția de câmp, legea newtoniană (1) poate să fie formulată precum urmează: orice particulă materială de massă m, aflătoare într'un spațiu dat, este izvor al unui câmp de vectori care-și au origina în punctul S unde se află particula, și extremitatea într'un punct oarecare P al câmpului (punct curent), astfel în cât, dacă $\overline{SP} = \bar{r}$, câmpul este definit prin relația

$$\bar{a}\,(P) = -\frac{m}{r^3}\,\bar{r} \quad , \tag{2}$$

alegând, pentru simplificare, unitățile de măsură astfel încât $f = 1$. Forța cu care particula de massă m_1, așezată în punctul P, este atrasă de particula din S, este $m_1\,\bar{a}$.

Se observă că, astfel definit, câmpul (2) derivă din *potențialul scalar*

$$\bar{a}(P) = \operatorname{grad}_P \frac{m}{r} \quad . \tag{3}$$

Prin aceasta, câmpul gravitațional se prezintă ca un câmp de potențial, iar funcția potențială este

$$\varphi\,(P) = -\frac{m}{r} \quad . \tag{4}$$

Această imagină nu este particulară numai câmpului gravitațional, ci se întâlnește în descrierea fenomenelor electromagnetice, hidrodinamice și toate problemele de câmp din Fizica modernă și clasică.

139. Potențialul unei distribuții discrete de izvoare. Fie într'un punct fix S al unui domeniu dat, un izvor de randament e. Cantitatea de substanță creiată (sau distrusă) de acest izvor, în unitatea de timp, este dată de integrala divergenții vectorului de câmp născut prin prezența izvorului, integrală extinsă la o regiune V din domeniu, care cuprinde izvorul dat:

$$e = \frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{div}\,\bar{a}\,d\tau \quad , \tag{5}$$

unde factorul 4π însemnează că am luat, convențional, ca uni-

tate de volum cătimea $4\pi - cm^3$ (pentru simplificarea unor formule ulterioare). Dar, după teorema lui GAUSS, din (5), rezultă

$$e = \frac{1}{4\pi} \oint a_n \, d\sigma \quad , \tag{6}$$

admiţând că integrala din membrul al doilea există pe suprafaţa care închide regiunea considerată. Să luăm ca suprafaţă care limitează domeniul V o sferă de rază r, cu centrul în S, şi să observăm că normala exterioară coincide cu raza sferei $\overrightarrow{SP}$ având sensul de la S spre punctul P de pe sferă. In aceste condiţii, componenta normală sferei devine componenta *radială* a_r (cu specificarea : de la centru spre periferie). In această regiune, a_r posedă o valoare determinată numai de poziţia relativă a punctelor S şi P, astfel încât, după (6),

$$e = a_r r^2 \quad ,$$

şi deci,

$$a_r = \frac{e}{r^2} \quad ,$$

sau încă, după § 104,

$$\bar{a}(P) = - \operatorname{grad}_P \frac{e}{r} = + \operatorname{grad}_S \frac{e}{r} \quad ,$$

(observând că, în coordonate cartesiene rectangulare,

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \quad ,$$

x, y, z, şi ξ, η, ζ, fiind coordonatele punctelor P şi S).

Vom numi un izvor izolat, în structura matematică a problemei câmpurilor de izvoare, prin numele generic de *pol* (de intensitate e). Aşadar *potenţialul unui pol* cu intensitatea e, este

$$\varphi(P) = \frac{e}{r} \quad , \tag{8}$$

unde r este distanţa de la poziţia fixă a polului până la punctul curent P al domeniului considerat, sediu al câmpului de izvor.

Echivalenţa relaţiilor (8) şi (4) stabileşte caracterul câmpului gravitaţional : câmp de izvoare !

Dacă alegem origina axelor de coordonate într'un punct dat O, faţă de care vectorii de poziţie a lui S şi P sunt $\bar{r}_0$ şi $\bar{r}$, potenţialul unui pol izolat se scrie

$$\varphi(P) = \frac{e}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \quad , \tag{9}$$

câmpul fiind dat atunci de $\bar{a} = - \operatorname{grad} \varphi$.

Dacă există un număr *finit* de N poli izolați, așezați în puncte fixe, la distanțe finite în domeniu, avem ceeace se numește o *distribuție discretă* de poli, respectiv, de izvoare.

Potențialul unei distribuții discrete de N poli izolați și independenți, așezați în punctele S_i, este egal cu suma algebrică a potențialelor polilor, întrucât ei sunt independenți, iar funcția potențială este un scalar:

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} \quad , \tag{10}$$

și exprimă contribuția tuturor polilor la valoarea potențialului în punctul curent $P(\bar{r})$. Cu excepția punctelor S_i, funcția φ este regulată în tot domeniul; în punctele S_i funcția potențială φ devine infinită.

Proprietate. Pentru toate punctele P, care nu coincid cu punctele S_i, câmpul este solenoidal.

Izolând toate punctele S_i prin câte o sferă foarte mică σ_i și aplicând domeniului cuprins între suprafețele acestor sfere și suprafața Σ care înconjoară întreg domeniul, teorema lui Gauss, obținem

$$\left(\int_{\Sigma} - \sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} \right) \bar{a} \cdot d\bar{\sigma} = \int_{V} \operatorname{div} \bar{a} \, d\tau = 0 \, , \tag{11}$$

căci domeniul astfel căpătat este lipsit de izvoare, deci divergența este pretutindeni nulă. Semnul minus care apare în formula de mai sus, provine din convenția adoptată pentru sensul pozitiv al normalelor pe suprafața frontieră, anume, normalele trebue să fie îndreptate spre exteriorul acestor suprafețe care compun suprafața totală de frontieră. Ori, se constată că normalele la suprafețele sferice sunt de sens contrar normalei la Σ.

Din această observație deducem că, pentru punctele spațiului cosmic, unde nu există materie, câmpul gravitațional este solenoidal.

In câmpurile solenoidale, ecuația lui Laplace

$$\Delta \varphi = 0 \quad ,$$

este satisfăcută identic de funcția φ. Evident, este suficient să verificăm că

$$\Delta \frac{1}{r} \equiv 0 \, ;$$

avem, în adevăr,

$$(12) \qquad -\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = \frac{\bar{r}}{r^3} = \frac{x-\xi}{r^3}\bar{\imath} + \frac{y-\eta}{r^3}\bar{\jmath} + \frac{z-\zeta}{r^3}\bar{k} ;$$

apoi,

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{1}{r^2} - 3\frac{(x-\xi)^2}{r^4} ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{y-\eta}{r^3} = \frac{1}{r^2} - 3\frac{(y-\eta)^2}{r^3} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-\zeta}{r^3} = \frac{1}{r^2} - 3\frac{(z-\zeta)^2}{r^3} ,$$

astfel încât, adunând aceste expresii, se obţine

$$-\Delta\varphi = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = 0 .$$

In general, funcţiile care satisfac ecuaţiei lui LAPLACE, se numesc *funcţii armonice*. Asupra proprietăţilor generale ale acestor funcţii vom reveni mai târziu.

Prin urmare, funcţia potenţială (10) este o funcţie armonică, continuă şi finită în toate punctele $P(x, y, z)$ ale spaţiului, admiţând derivate continui şi finite, cu excepţarea punctelor $S_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ unde funcţia şi derivatele ei devin infinite.

Teoremă. Cantitatea de substanţă ce trece printr'o suprafaţă închisă (Σ), care înconjoară la distanţă finită toate izvoarele este egală cu $4\pi\sum_{i=1}^{N} e_i$ (fig. 57).

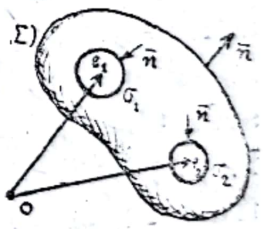


Fig. 57

Prin urmare

$$\oint_{(\Sigma)} a_n \, d\sigma = 4\pi\sum_{i=1}^{N} e_i .$$

In adevăr, conform teoremei lui GAUSS, integrala $\int_{(V)} \operatorname{div}\bar{a} \, . \, d\tau$ întinsă la un volum V care nu conţine nici un izvor (deci, pentru care $\operatorname{div}\bar{a} = 0$) va fi nulă ; aşa dar

$$\int_{(V)} \operatorname{div}\bar{a} \, . \, d\tau = 0 = \oint_{(\Sigma)} a_n \, d\sigma - \sum_{i=1}^{N} \oint_{(\sigma_i)} a_n \, d\sigma .$$

Am exclus din domeniul de integrare izvoarele prin nişte sfere mici $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_N$, şi am integrat (în membrul al doilea) pe suprafaţa care înconjoară noul domeniu fără izvoare, adică pe suprafaţa care se compune din suprafaţa iniţială Σ, care cu-

Scanned with OKEN Scanner

prinde toate izvoarele, şi din suprafeţele sferelor mici, care exclud izvoarele. Integralele din membrul al doilea extinse la σ_i ($i = 1, 2, \ldots N$) se iau cu semnul minus, după observaţia făcută mai înainte.

Dar, conform definiţiei randamentului unui singur pol

$$\int_{(\sigma_i)} a_n \, d\sigma = 4\pi . e_i$$

deci

$$0 = \oint_{(\Sigma)} a_n \, d\sigma - 4\pi \sum_{i=1}^{N} e_i \; ;$$

aşadar,

$$\oint_{(\Sigma)} a_n \, d\sigma = 4\pi \sum_{i=1}^{N} e_i \; .$$

140. Dipol. Quadrupol, Multipol. Distribuţia discretă de izvoare permite construirea unor aranjamente, care ilustrează anumite *modèle de atom*, folosite în toate teoriile fizice.

a) *Un pol izolat*, este idealizarea matematică a noţiunii fizice de izvor izolat, sediu al unei masse atractive sau repulsive (câmp gravitaţional, electrostatic) sau al unei producţii de materie (hidrodinamică), regiune, care în realitate ocupă un domeniu finit în câmp, dar pe care ne-o închipuim redusă la dimensiunile unui punct matematic dotat cu proprietatea de a poseda un *randament specific*, caracterizat printr'un parametru finit: massă, încărcare electrică, intensitate magnetică etc. pentru care noi întrebuinţăm denumirea generică de *intensitate* (mărime scalară).

b). *Un dipol* (fig. 58), este idealizarea matematică a noţiunii fizice de izvor dublu: două izvoare de randamente egale şi de semne contrare $+e$ şi $-e$, aşezate la distanţă finită p. Dreapta care uneşte aceste două izvoare, se numeşte *axul sistemului*. Dispozitivul acesta este curent în Fizica experimentală. El este ilustrat prin *oscilatorul lui* Hertz, considerat în Fizica clasică drept model de atom; sau prin *magnetul elementar*, căci se ştie că magnetismul permanent îşi are sediul în natură în magneţii elementari, cari, prin secţionare nu-şi pierd individualitatea. Matematic, un dipol se obţine dacă ne închipuim că am

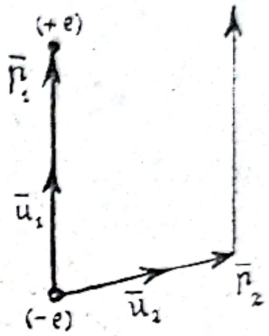
Fig. 58

deplasat un izvor pozitiv $+e$ din poziția P_1 în poziția P_2, astfel încât, în P_1 să rămână un izvor negativ de aceiași intensitate $-e$. Facem apoi, ca distanța $\overrightarrow{P_1 P_2} = p_1 \bar{u}_1$ să tindă către zero, dar, în același timp, intensitatea e să tindă, în valoare absolută, către infinit, astfel încât $\lim e \bar{p}_1 = m_1 \bar{u}_1 = \bar{m}_1$ să rămână finită ; acest vector definește momentul dipolului.

c). *Quadrupolul* se obține prin deplasarea unui dipol de moment $\bar{m}_1$ și ax de vector unitar $\bar{u}_1$, într'o poziție infinit vecină, prin translația $\bar{p}_2 = p_2 \bar{u}_2$, unde $\bar{u}_2$ este, în general, diferit de $\bar{u}_1$. (fig. 59) ; astfel încât, dacă facem pe $\bar{p}_2$ să tindă către zero,

$$\lim m_1 p_2 = \frac{1}{2} \lim p_1 p_2 = \frac{1}{2} m_2$$

să rămână finită. Factorul $^1/_2$ este introdus din cauza simetriei factorilor p_1 și p_2.



(Fig. 59)

Momentul quadrupolului este o mărime tensorială, asupra căreia nu este locul acum să insistăm. Vectorii unitari $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$ determină axele sistemului.

Necesitatea introducerii în Fizică a acestui model de atom, s'a resimțit, mai ales, când s'a constatat experimental (J. Franck) că pe lângă liniile spectrale admise de teoria quantelor, în spectrele de linii ale elementelor chimice, concepute ca dipoli, apăreau unele linii, de intensitate mult mai mică, interzise de teorie. Prin calcul, s'a putut arăta (I. Plăcinteanu) că astfel de linii pot să fie atribuite unor atomi cu caracter de quadrupoli. De altfel, aceste modèle fizice sunt astăzi indispensabile pentru explicarea unor proprietăți de-ale nucleelor atomice.

d) Un *multipol* de ordin n se obține repetând procedeul descris mai sus, prin translația unui multipol de ordinul $n-1$, întocmai precum quadrupolul a fost obținut din dipol. Momentul unui multipol are valoarea $m_n = \lim e p_1 p_2 \ldots p_n$ și este o mărime tensorială de ordinul n determinată de valoarea momentului și *axele*, având direcțiile $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n$, în general, distincte.

141. Potențialul unui multipol, se poate construi pornind de la potențialul unui pol simplu, dipol, quadrupol, etc., precum urmează.

Potențialul unui pol izolat, de intensitate e, a fost găsit sub forma

$$\varphi_0 = \frac{e}{r} \tag{15}$$

unde r este distanța de la punctul unde se află polul până la punctul curent $P(x, y, z)$ în spațiu.

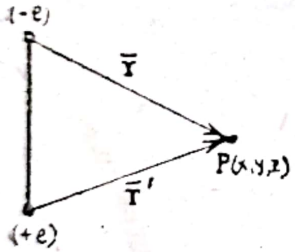
Pentru un dipol, construit prin procedeul descris mai sus, potențialul se obține precum urmează. Acest potențial se compune din potențialii celor doi poli (fig. 60), prin trecere la limită:

$$\varphi_d = \lim_{p_1 \to 0} \left(\frac{e}{r'} - \frac{e}{r}\right) = \lim_{p_1 \to 0} (ep) \lim \frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right).$$

Prin definiție, $\lim e\bar{p}_1 = \bar{m}_1$. Așadar,

$$\varphi_d = m_1 \lim_{p_1 \to 0} \frac{\delta \frac{1}{r}}{p_1} = m_1 \lim \frac{\delta r}{p_1} \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta r} = m_1 \cos(\bar{m}_1, \bar{r}) \lim \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta r} =$$

$$= -\, m_1 \frac{1}{r^2} \cos(\bar{m}_1, \bar{r}) ;$$



(Fig. 60)

unde $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ este patratul distanței dintre punctul izvor $S(x_0, y_0, z_0)$ și punctul curent $P(x, y, z)$, iar $\delta\bar{r} = \overrightarrow{SS'}$. Expresia precedentă a lui φ_d se poate scrie, evident, sub forma

$$\varphi_d = (\bar{m}_1 . \operatorname{grad}_S \frac{1}{r}) = -(\bar{m}_1 . \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}) . \tag{16}$$

fiind funcție de P și S.

Fie $\bar{u}_1$ versorul lui $\bar{m}_1$ și deci, al lui $\bar{p}_1 = p_1 \bar{u}_1$. Expresia (16) se scrie

$$\varphi_d = (\bar{p}_1 . \operatorname{grad})\, \varphi_0 = (\bar{m}_1 . \operatorname{grad}) \frac{1}{r} = m_1 (\bar{u}_1 . \operatorname{grad}) \frac{1}{r} , \tag{17}$$

ceeace exprimă potențialul unui dipol.

Pentru un quadrupol, procesul de formare este același; anume, după (17),

$$\varphi_q = (\bar{p}_2 . \operatorname{grad})\, \varphi_d = \frac{1}{2} m_2 (\bar{u}_2 . \operatorname{grad}) (\bar{u}_1 . \operatorname{grad}) \frac{1}{r} .$$

Să presupunem că am format, pe rând, toate expresiile similare până la ordinul $n-1$. Atunci, pentru un multipol de ordinul n, vom avea

(18)

$$\varphi_n = (\bar{p}_n \cdot \text{grad})\,\varphi_{n-1} = \frac{m_n}{n!}(\bar{u}_n \cdot \text{grad})\,(\bar{u}_{n-1} \cdot \text{grad}) \ldots (\bar{u}_1 \cdot \text{grad})\,\frac{1}{r} \quad ,$$

luând gradientul relativ la punctul S (vezi relația 16).

Observăm însă, că $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n$ sunt vectori unitari dați, deci constanți, ei desemnând direcțiile și sensurile axelor multipolului. Apoi,

(19) $$\text{grad}\,\frac{1}{r^n} = -n\,\frac{\bar{r}}{r^{n+2}}\,; \quad \text{grad}\,(\bar{u}\,.\,\bar{r}) = \bar{u}\,.$$

Acestea fiind stabilite, constatăm că relația (18) se poate scrie

(20) $$\varphi_n = (-1)^n\, m_n \frac{1}{r^{n+1}}\, Y_n \quad ,$$

unde Y_n sunt funcții întregi, raționale și omogene de vectorul unitar $\bar{r}$ (versorul lui $\bar{r}$) și simetrice în raport cu vectorii unitari $\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n$. In adevăr, să punem

(21) $$z_i = \bar{u}_i\,.\,\bar{r} = \cos\,(\bar{u}_i\,.\,\bar{r}) \;;\; \bar{u}_i\,.\,\bar{u}_j = \cos\,(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = a_{ij}\,.$$

Construind succesiv funcțiile Y_n, obținem

$$Y_0 = 1 \quad ,$$

$$Y_1 = z_1 \quad ,$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}(3 z_1 z_2 - a_{12}) \quad ,$$

$$Y_3 = \frac{1}{6}(15 z_1 z_2 z_3 - 3a_{23} z_1 - 3a_{31} z_2 - 3a_{12} z_3) \quad ,$$

. . . . . .

$$Y_n = \frac{1}{n!}\{1\,.\,3 \ldots (2n-1)\, z_1 z_2 \ldots z_n -$$

$$-1\,.\,3 \ldots (2n-3)\, \Sigma\, a_{12} z_3 \ldots z_n +$$

$$+1\,.\,3 \ldots (2n-5)\, \Sigma\, a_{12} a_{34} z_5 \ldots z_n + \ldots\}.$$

unde sumele produselor ce figurează în Y_n înseamnă că se formează și se adună toate produsele ce se deduc prin toate permutările dintre indicii $1, 2, \ldots n$. Fiecare termen este format din produse de cosinusuri de două feluri: unele conținând ter-

Scanned with OKEN Scanner

meni constanți a_{ij} (raportându-se la unghiurile făcute între direcțiile axelor), altele, conținând termeni variabili cu z_i (raportându-se la unghiurile făcute de vectorul de poziție $\bar{r}$, al punctului curent, cu axele sistemului).

Pentru funcția generală (22) putem scrie

$$Y_n = \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s}{n!} 1.3\ldots(2n-2s-1)\,\Sigma\, a_{12}\, a_{34}\ldots a_{2s-1,2s}\, z_{2s+1}\ldots z_n \tag{23}$$

unde: $n = 2k$, pentru n par și $n = 2k+1$, pentru n impar; $a_{-1,0} = 1$.

Aceste funcții, numite *funcții sferice* sau *funcții armonice* au fost introduse în studiul distribuțiilor discrete de izvoare, de către Maxvell (*Treatise*, I, Cap. IX).

Legea de formare succesivă a funcțiilor sferice se deduce din relația (18), anume,

$$\varphi_{n+1} = p_{n+1}\,(\bar{\imath}_{n+1}\,.\,\mathrm{grad})\,\varphi_n\,, \tag{24}$$

unde φ_n se exprimă sub forma (20), iar

$$\varphi_{n+1} = (-1)^{n+1}\, m_{n+1}\, \frac{1}{r^{n+2}}\, Y_{n+1}\,, \tag{25}$$

unde am pus $p_{n+1}\, m_n = \dfrac{1}{n+1}\, m_{n+1}$.

Efectuând operația de derivare din membrul al doilea al relației (24) și comparând cu (25), găsim relația de recurență

$$(n+1)\, z_{n+1}\, Y_n - r\,\bar{\imath}_{n+1}\,.\,\mathrm{grad}\, Y_n = (n+1)\, Y_{n+1}\,, \tag{26}$$

formulă, care ne permite să stabilim o relație care leagă coeficienții funcțiilor Y_n. Pentru aceasta, observăm că

$$r\,\bar{\imath}_j\,.\,\mathrm{grad}\; z_i = a_{ij} - z_i\, z_j\,, \tag{27}$$

ceeace se verifică imediat, ținând seamă de relațiile (19).

Fie

$$A_{n,s} = \frac{(-1)^{s+1}}{n!}\, 1.3\ldots(2n-2s-1)\,, \tag{28}$$

coeficientul termenului de ordinul s din funcția sferică Y_n. Observăm că acest termen conține s factori cu indici dubli a_{ij} și $n-2s$ factori cu indici simpli z_i. Pentru a pune acest lucru în evidență, putem să scriem termenul de ordinul s din Y_n sub forma

(29) $$Y_n^s = A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s}),$$

astfel încât,

$$Y_n = \Sigma_s A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s}) .$$

Primul termen din relaţia (26) va fi

(30) $$(n+1) z_{n+1} A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s}) = (n+1) A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s+1}).$$

Al doilea termen din (26), ţinând seamă de (27), devine

$$-r \bar{u}_{n+1} . \text{grad } Y_n = A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s \{ \Sigma_{i=2s+1}^{n} z_{n+1} z_i^{n-2s} - a_{n+1} \})$$

(31) $$= (n-2s) A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s+1}) - A_{n,s} \Sigma \overset{n+1}{\Pi} (a^{s+1} z^{n-2s}),$$

căci, în primul termen avem $n-2s$ termeni z_i de derivat; apoi, în ultimul termen, $\overset{n+1}{\Pi}$ indică permutarea fiecărui indice $1, 2, \ldots n$ numai cu $n+1$.

Adunând primul termen din (31) cu (30), obţinem

(32) $$(2n-2s+1) A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s+1}) .$$

Relaţia (26), devine, ţinând seamă de (32) şi (31), dacă punem în evidenţă în Y_{n+1} numai termenul de ordinul s,

$$(2n-2s+1) A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s+1}) - A^{n,s} \Sigma \overset{n+1}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s}) =$$

$$= (n+1) A_{n+1,s} \Sigma \overset{n+1}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s+1}) .$$

Al doilea termen din primul membru trebuind să conţină s factori a şi $n-2s+1$ factori z, înlocuim în acest termen pe s cu $s-1$; astfel, avem

(33) $$(2n-2s+1) A_{n,s} \Sigma \overset{n}{\underset{1}{\Pi}} (a^s z^{n-2s+1}) - A_{n,s-1} \Sigma \overset{n+1}{\Pi} (a^s z^{n-2s+1}) =$$

$$= (n+1) A_{n+1,s} \Sigma \overset{n+1}{\underset{1}{\Pi}} (a^s + z^{n-2s+1}) .$$

Primul termen conţine toţi factorii obţinuţi prin permutările indicilor $1, 2, \ldots n$ între ei; al doilea termen conţine factorii obţinuţi prin permutarea fiecărui indice $1, 2, \ldots n$ numai cu indicele $n+1$. Putem să descompunem şi membrul al doilea în doi termeni conţinând separat aceste două categorii de factori. Dar atunci, coeficienţii respectivi trebue să fie egali ca relaţia (33)

să subsiste. Aşadar,

$$(34) \qquad (2n-2s+1)\, A_{n,s} = -\, A_{n,s-1} = (n+1)\, A_{n+1,s} \,.$$

Din această formulă de recurenţă pentru formarea coeficienţilor succesivi, ai funcţiilor Y_n, deducem, făcând $s = 0$,

$$(n+1)\, A_{n+1,s} = (2n+1)\, A_{n,s} \,.$$

Cum, $A_{1,0} = 1$, rezultă

$$A_{n,0} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \,,$$

şi deci, în general,

$$(35) \qquad A_{n,s} = (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\, (n-s)!} \,,$$

care e formula (28) regăsită sub o formă mai convenabilă.

In definitiv, putem scrie

$$(36) \qquad Y_n = \sum_s (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\, (n-s)!} \sum_1^{n+1} a^s z^{n-2s} \,.$$

In studiul proprietăţilor funcţiilor sferice, (1) se obicinueşte ca în locul variabilelor z_i, date de relaţia (21), să se ia drept variabile idependente unghiurile θ pe care vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului curent P îl face cu axa polară şi ψ, azimutul planului meridian, al lui $\bar{r}$, faţă de un sistem de coordonate sferice.

Dacă însemnăm cu θ_i şi ψ_i aceleaşi unghiuri pentru axele multipolului, avem, după cunoscutele formule ale Trigonometriei sferice.

$$(37) \qquad \begin{aligned} z_i &= \cos\theta_i \cos\theta + \sin\theta_i \sin\theta \cos(\psi - \psi_i) \,, \\ a_{ij} &= \cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j \cos(\psi_i - \psi_j) \,. \end{aligned}$$

Expresia (36) ne dă valoarea funcţiei sferice Y_n în toate punctele unei suprafeţe sferice ($r =$ const.), în funcţie de unghiul polar θ şi unghiul azimutal ψ; precum şi de parametrii θ_i, ψ_i, corespunzători direcţiilor fixe ale axelor sistemului.

---

(1) v. J. C. MAXWELL, *Treatise*, Cap. IX.
G. PRASAD, *Spherical Harmonics*, Benares City (India), 1930.
WHITTAKER AND WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge, 1940.
E. HEINE, *Kugelfunktionen*, Berlin, 1861.
J. FRENKEL, *Elektrodynamik*, Berlin, 1926.
E. HOBSON, *Proceedings of the London Math. Soc.* XXII; „*The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*", Cambridge Univ. Press, 1931.

Scanned with OKEN Scanner

Este uşor de constatat că, dacă schimbăm sensul unui ax al multipolului, funcţia sferică schimbă semnul. In adevăr, în fiecare termen din (36) apare o singură dată indicele corespunzător unui anumit pol, iar cosinusul schimbă semnul pentru unghiul suplimentar.

Dacă toate *axele multipolului sunt paralele*, toţi $a_{ij} = 1$ şi toate variabilele $z_i = z$ sunt egale. In aceste condiţii, funcţiile sferice generale Y_n se transformă în *polinoamele lui* LEGENDRE, numite şi *functii armonice zonale*:

$$(38) \qquad P_n = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n\, s!\,(n-s)!\,(n-2s)!}\, z^{n-2s} \quad ,$$

unde k este cel mai mic întreg care nu depăşeşte pe $^1/_2\ n$. Coeficientul membrului al doilea din (38) se obţine prin observaţia următoare: numărul termenilor cari iau naştere prin permutarea numerilor $1, 2, 3 \ldots 2s$, în expresia

$a_{12}\, a_{23} \ldots a_{2s-1,\,2s}\, z_{2s+1} \ldots z_n$ este $\frac{(2s)!}{2^s\, s!}$; numărul tuturor termenilor sumei expresiilor precedente este $\frac{n!}{2^s\,!\,(n-2s)!}$. Cum, în P_n toţi aceşti termeni sunt egali între ei, va trebui să înmulţim coeficientul $A_{n,s}$, care figurează în (36), prin

$$\frac{(2s)!}{2^s\,.\,s!}\,\frac{n!}{(2s)!\,(n-2s)!} = \frac{n!}{2^s\,.\,s!\,(n-2s)!} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-2s+1)}{2\,.\,4\ldots 2s}$$

spre a obţine coeficientul numeric al termenului de ordin s din P_n; de unde rezultă expresia lui P_n scrisă sub forma (38).

Se obicinueşte ca P_n să se scrie sub forma echivalentă

$$(39) \qquad P_n(z) = \frac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{n\,(n-1)\ldots(n-2s+1)}{2\,.\,4\ldots 2s\,.\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots(2n-2s+1)}\, z^{n-2s}$$

pentru n întreg pozitiv. Expresia precedentă se deduce prin transformarea coeficientului numeric din (38), fără dificultate.

Din (39) deducem polinoamele succesive

Scanned with OKEN Scanner

$$P_0(z) = 1,$$
$$P_1(z) = z,$$
$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1),$$
$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z),$$
$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z + 3), \tag{40}$$
$$P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z),$$
$$P_6(z) = \frac{1}{16}(231z^6 - 315z^4 + 105z^2 - 5),$$
$$P_7(z) = \frac{1}{16}(429z^7 - 693z^5 + 315z^3 - 35z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

142. Desvoltarea lui 1/r în serie de funcţii sferice. O altă metodă, de altfel echivalentă precedentei, pentru determinarea potenţialului unui sistem de multipoli, constă în desvoltarea funcţiei $1/r$ după seria lui TAYLOR, observând că, în această desvoltare, coeficienţii sunt identici funcţiilor sferice Y_n, respectiv, polinomilor lui LEGENDRE P_n. In adevăr, fie un sistem S de poli cu intensităţile e_i conţinut într'un domeniu închis de o sferă de rază finită R, cu centrul într'un punct $O(\bar{r})$; fie $S_i(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ poziţiile polilor faţă de un sistem de coordonate ortogonale şi $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i$ componentele vectorului $\overrightarrow{S_i P}$ faţă de acel sistem de coordonate.

Potenţialul sistemului de poli, în punctul P, este

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_i \frac{e_i}{\sqrt{(x_1 - x_1^i)^2 + (x_2 - x_2^i)^2 + (x_3 - x_3^i)^2}}. \tag{41}$$

Să desvoltăm această funcţie, care este continuă şi derivabilă în fiecare punct $P(x, y, z)$ diferit de x_1^i, x_2^i, x_3^i, unde devine infinită. φ poate să fie considerată ca funcţie de variabilele $x_s^i, (s = 1, 2, 3)$ în vecinătatea punctului O. Avem

$$\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} = \frac{1}{r} + \sum_s \xi_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{1}{r}\right)_0 + \frac{1}{2}\sum_{sk} \xi_s \xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)_0 + \cdots \tag{42}$$

termenul de rang $n = n_1 + n_2 + n_3$ fiind

$$(43) \qquad \sum \frac{1}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \left(\frac{1}{r}\right)_0 \xi_1^{n_1}\ \xi_2^{n_2}\ \xi_3^{n_3} \ .$$

Admiţând că punctul curent P se află în exteriorul sferei de rază R, potenţialul φ se va exprima în forma unei serii absolut şi uniform convergentă

$$\varphi(x_1, x_2 x_3) = \sum_{\alpha=0} \varphi^{(\alpha)}(x_1, x_2, x_3) \ ,$$

unde am pus

$$(44) \quad \varphi^{(0)} = \frac{e}{r} \ ; \ \varphi^{(1)} = \sum_s e_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{1}{r}\right) \ ; \ \varphi^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{sk} e_{sk} \frac{\partial^2}{\partial x_s\, \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)$$

şi, în general,

$$(45) \qquad \varphi^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum \frac{n!\, e(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \left(\frac{1}{r}\right),$$

cu $n = n_1 + n_2 + n_3$ şi

$$(46) \qquad e = \sum e_i \ ; \ e_s = \sum e_i \xi_s \ ; \ e_{sk} = \sum e_i \xi_s \xi_k \ ; \ldots$$
$$e(n_1, n_2, n_3) = \sum e_i \xi_1^{n_1}\ \xi_2^{n_2}\ \xi_3^{n_3} \ .$$

Dacă punctul P se găseşte atât de departe de O, încât toţi termenii din (42) conţinând factori ξ_s să fie neglijabili, potenţialul se reduce la $\varphi^{(0)}$, care este potenţialul unui pol simplu. La o aşa distanţă, întreg sistemul apare drept un singur pol concentrat în centrul sferei, care închide ansamblul de poli.

Dacă distanţa lui P de O, rămânând suficient de mare, permite totuşi „să distingem“ termenul al doilea din desvoltarea (42), obţinem potenţialul unui dipol $\varphi^{(1)}$ (presupunând $\sum e_i = 0$, pentru a face să dispară primul termen).

Procedând din aproape în aproape, obţinem potenţialul unui quadrupol, şi în general, al unui multipol de un ordin oarecare.

In general, potenţialul unui multipol, ale cărui axe coincid cu axele de coordonate, ortogonale, va fi dat de unul din termenii expresiei (45).

Considerând pe φ dat de o desvoltare în serie după puterile negative ale lui r, termenul de ordin n va fi proporţional cu $r^{-(n+1)}$, astfel încât putem scrie

$$(47) \qquad \varphi^{(n)} = r^{-n-1} H_n(n_1, n_2, n_3) \ ,$$

unde H_n nu mai depinde de distanța r, ci numai de direcția vectorului $\bar{r}$. Avem

$$(48) \qquad H_n(n_1, n_2, n_3) = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3!}\, a(n_1, n_2, n_3),$$

unde am pus

$$(49) \qquad a(n_1, n_2, n_3) = r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \left(\frac{1}{r}\right).$$

Momentul multipolului se definește prin

$$(50) \qquad p_n = \frac{n!\, e(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3!}.$$

Considerând, în (45), și derivata de ordin zero (operator identic cu unitatea) și observând că ordinul uneia din derivatele parțiale ce figurează în (45) este determinat de celelalte două derivate (din cauza relației $n = n_1 + n_2 + n_3$), vom putea să formăm în (45) atâtea derivate de ordinul n câte combinări cu repetiție de $n+1$ obiecte luate câte două avem. Așadar, obținem $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ termeni. Pe de altă parte, funcția $1/r$ fiind armonică, satisface identic ecuației lui LAPLACE, pe care o putem considera drept o relație liniară între derivatele de ordinul al doilea ale funcției. Desvoltarea (42) arată că și fiecare derivată, de ordin oarecare, este armonică. Cum avem $\frac{1}{2}n(n-1)$ astfel de relații, de forma

$$\frac{\partial^{n-2}\left(\partial^2 \frac{1}{r}\right)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}},$$

rezultă, în definitiv, că în (45) vom putea forma numai

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1) = 2n+1$$

termeni independenți. Aceste $2n+1$ valori ne permit să determinăm cele $2n+1$ elemente care definesc un multipol oarecare, anume, momentul p_n, dat de relația (50) și cele n direcții $\bar{u}_i$, diferite și independente ale axelor (câte doi parametri de fiecare direcție).

Să punem

$$\bar{u}_k . \text{grad} = u_{k1} \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{k2} \frac{\partial}{\partial x_2} + u_{k3} \frac{\partial}{\partial x_3} ,$$

unde u_{ki} sunt cosinusurile directoare ale direcției $\bar{u}_k$, sub condiția de ortogonalitate $u_{k1}^2 + u_{k2}^2 + u_{k3}^2 = 1$.

In aceste condiții, vom putea determina momentul și direcțiile axelor multipolului, astfel încât să subsiste egalitatea

$$(51) \qquad \sum \frac{e(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} =$$

$$= \frac{1}{n!} m'_n (\bar{u}_1 . \text{grad})(\bar{u}_2 . \text{grad}) \ldots (\bar{u}_n . \text{grad}) \frac{1}{r} .$$

Această relație permite ca în locul momentelor $e(n_1, n_2, n_3)$ să determinăm momentul unui multipol oarecare cu ajutorul celor $2n + 1$ parametri independenți, prin relația

$$m_n = m'_n \overset{n_1}{\underset{1}{\Pi}} u_{k1,1} \overset{n_2}{\underset{1}{\Pi}} u_{k2,2} \overset{n_3}{\underset{1}{\Pi}} u_{k3,3} .$$

Rezultă proprietatea: un număr oarecare de multipoli de același ordin, aflați în același punct, pot fi compuși într'un multipol *rezultant*, de moment m_n .

Expresia (51) comparată cu relația (18), ne arată că potențialul unui multipol rezultant de ordinul n, se exprimă, în adevăr, cu ajutorul funcțiilor sferice definite în paragraful precedent.

Trebue observat însă, că nu este posibil să se prescrie o regulă simplă și generală după care să se poată determina axele și momentul multipolului rezultant din datele multipolilor componenți, pentru $n > 1$. (v. J. Frenckel, *Lehrbuch der Elektrodynamik*, I, p. 101).

Pentru $n = 0$, avem polul simplu; pentru $n = 1$, avem dipolul lui Hertz pentru $n = 2$ avem quadrupolul, a cărui determinare a fost făcută de I. Plăcinteanu.

143. Câteva proprietăți de-ale polinoamelor lui Legendre. Reamintesc, în acest paragraf, câteva din proprietățile acestor polinoame, necesare în studiul problemelor de Mecanică ondulatorie (v. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, II) și alte probleme clasice de Fizică și Mecanică.

1. *Formula lui* DIRICHLET. Să considerăm cazul când direcţiile axelor sistemului de multipoli coincid, toate, cu o direcţie dată $\bar{u}$, pe care s'o luăm ca axă polară a unui sistem de coordonate polar, cu origina în O pe $\bar{u}$. Fie un pol al sistemului aşezat în A pe dreapta-suport a lui $\bar{u}$, astfel în cât $\overrightarrow{OA}=\bar{p}$ şi $\overrightarrow{OP}=\bar{R}$ (unde P este un punct curent); fie γ unghiul făcut de $\bar{u}$ cu $\overrightarrow{AP}$. In aceste condiţii, avem

$$r=\overline{AP}=\sqrt{R^2-2pR\cos\gamma+p^2}\ ,$$

unde, după (37),

$$z=\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_i+\sin\theta\sin\theta_i\cos(\psi-\psi_i)\ .$$

Funcţia $1/\overline{AP}$ se poate desvolta după puterile raportului $p/R=h$. După (42) avem, în aceste condiţii, *formula lui* DIRICHLET

$$(52)\qquad (1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_0^\infty h^n P_n\ .$$

In adevăr, desvoltând funcţia din membrul întâi al relaţiei precedente după puterile lui h, observăm că termenul de ordin n are coeficientul

$$(53)\qquad \frac{(-1)^n}{n!}r^{n+1}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{r}\right)=P_n\ ,$$

după relaţiile (47) şi (49), pentru toate direcţiile coincidente.

2. *Formula lui* OLINDE RODRIGUES. Să considerăm factorul numeric al termenului de ordin s în desvoltarea (39), a lui P_n:

$$(54)\qquad A_{n,s}=\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}(-1)_s\ \frac{n(n-1)...(n-2s+1)}{2.4...2s.(2n-1)(2-3)...(2n-2s+1)}\ .$$

Avem, prin transformări evidente, pentru primul factor

$$(55)\qquad \frac{1.3...(2n-1).2.4...2n}{n!\ 2.4...2n}=\frac{(2n)!}{n!\,2^n.n!}=\frac{(2n)(2n-1)...(n+1)}{n!}\ .$$

Inmulţind valoarea (55) cu al doilea factor din (54), deducem

$$A_{n,s}=(-1)^s\frac{(2n)(2n-1)...(n+1).n.(n-1)...(n-2s+1)}{n!\,2^n.2.4...2s.(2n-1)(2n-3)...(2n-2s+1)}\ .$$

Simplificăm factorii impari din numărător şi numitor; rămâne

$$A_{n,s}=(-1)^s\frac{(2n)(2n-2)\ldots(2n-2s+2).(2n-2s)\ldots(n-2s+1)}{n!\,2^n.2^s.s!}$$

sau, simplificând primii s factori cu 2, avem

$$(56)\quad A_{n,s}=(-1)^s\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{2^n.n!\,s!}(2n-2s)\ldots(n-2s+1).$$

Observăm, apoi, că are loc relaţia evidentă

$$(57)\qquad (2n-2s)\ldots(n-2s+1)\,z^{n-2s}=\frac{d^n}{dz^n}(z^{2n-2s}).$$

Acestea fiind stabilite, putem scrie

$$(58)\quad A_{n,s}\,z^{n-2s}=(-1)^s\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{n!\,2^n\,s!}\frac{d^n}{dz^n}(z^{2n-2s}).$$

Dar, după (39),

$$(59)\qquad P_n=\sum_s A_{n,s}\,z^{n-2s}\ .$$

Pe de altă parte, este evidentă desvoltarea după binomul lui NEWTON

$$(60)\qquad (z^2-1)^n=\sum_s(-1)^s\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{s!}z^{2n-2s}\ .$$

Comparând (58) cu (59) şi (60), deducem

$$(61)\qquad P_n(z)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dz^n}\{(z^2-1)^n\}\ ;$$

relaţie, care poartă numele de formula lui O. RODRIGUES.

3. *Ecuaţia diferenţială a lui* LEGENDRE. Derivând funcţia

$$Z=(z^2-1)^n$$

obţinem

$$(z^2-1)\frac{dZ}{dz}=2n\,z\,Z\ .$$

Derivând această ecuaţie de $(n+1)$— ori, se deduce, fără dificultate,

$$(62)\qquad (z^2-1)\frac{d^{n+2}Z}{dz^{n+2}}+2z\frac{d^{n+1}Z}{dz^{n+1}}-n(n-1)\frac{d^nZ}{dz^n}=0.$$

Aşadar, după (61), putem scrie pentru (62),

$$(63)\qquad (1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2}-2z\frac{dP_n}{dz}+n(n+1)P_n=0,$$

ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, la care satisfac polinomii lui LEGENDRE. Luând în loc de $z = \cos\vartheta$, ca variabilă independentă pe ϑ şi punând $P_n(\vartheta) = \Theta$, ecuaţia (63) se scrie, în coordonate polare

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)+n(n+1)\Theta=0 \quad . \tag{64}$$

4. *Zerorile lui $P_n(z)$, unde n este un întreg pozitiv.*

1. „Toate rădăcinile ecuaţiei $P_n(z)=0$ sunt reale şi se află între $+1$ şi -1". In adevăr,

$$(z^2-1)^n \equiv (z-1)^n(z+1)^n \tag{65}$$

se anulează de n ori pentru $+1$ şi de n ori pentru -1. Din teoria ecuaţiilor algebrice se ştie că, în acest caz, derivata de ordinul n a funcţiei din membrul întâi din (65), aşadar, după (61), însuşi $P_n=0$ are n rădăcini reale cuprinse în intervalul $(-1,+1)$.

2. „Toate rădăcinile sunt distincte". In adevăr, dacă nu ar fi aşa, atunci cel puţin două din rădăcini vor fi egale. In acest caz, ecuaţiile

$$P_n(z)=0 \quad , \quad \frac{dP_n(z)}{dz}=0 \quad ,$$

vor avea o rădăcină comună. Dar atunci, după (63), această rădăcină ar satisface şi ecuaţia

$$\frac{d^2P_n}{dz^2}=0 \quad .$$

Formând cu diferenţialele succesive ecuaţia diferenţială de forma (62), ajungem la concluzia că toate derivatele lui P_n, egalate cu zero, vor trebui să aibă o rădăcină comună; chiar şi

$$\frac{d^nP_n}{dz^n}=0 \quad .$$

Această concluzie este însă absurdă, căci, după formula lui RODRIGUES, derivata de ordinul n al polinomului P_n este egală cu constanta $\frac{(2n)!}{2^n.n!}$.

5. *Integrala definită a lui* LAPLACE. Polinomii lui LEGENDRE pot să fie definiţi cu ajutorul integralelor definite

$$(66)\qquad P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^n\,d\psi\ ,$$

și

$$(67)\qquad P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^{-n-1}\,d\psi\ .$$

A doua expresie este echivalentă cu prima; ceeace se verifică făcând $P_n=P_{-n-1}$. Pentru a stabili relațiile de mai sus, să considerăm integrala

$$(68)\qquad \int_0^{\pi}\frac{d\psi}{a-b\cos\psi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\ .$$

unde $a^2>b^2$, și să facem substituțiile

$$(69)\qquad a=1-hz\ ;\ b=h\sqrt{z^2-1}\ ;\ \text{deci, } a^2-b^2=1-2hz+h^2.$$

Din (68), rezultă

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{1-h(z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)}\ .$$

Să desvoltăm ambii membrii ai relației precedente după puterile lui h, obținem

$$\pi\,\Sigma h^n P_n=\Sigma\int_0^{\pi}h^n(z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^n\,d\psi\ ,$$

de unde rezultă relația (66). Procedeul e valabil fiindcă seria din membrul al doilea e uniform convergentă.

6. *Formule de recurență.* Intre polinomii consecutivi se pot scrie formule de recurență sub diferite forme. Avem

$$(70)\qquad n\,P_n=(2n-1)\,z\,P_{n-1}-(n-1)\,P_{n-2}\ .$$

In adevăr, punând

$$\chi=(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}\ ,$$

și derivând în raport cu parametrul h, obținem

$$\chi^2(h-z)+\chi\frac{d\chi}{dh}(1-2hz+h^2)=0\ ,$$

sau încă, desvoltând,

$$(h-z)\Sigma h^n P_n + (1-2hz+h^2)\Sigma n h^{n-1} P_n = 0 \quad ;$$

egalând coeficientul lui h^{n-1} cu zero, obţinem relaţia (70).

Altă relaţie de recurenţă este

$$(71) \qquad (z^2-1)\frac{dP_n}{dz} = n(zP_n - P_{n-1}) = -(n+1)(zP_n - P_{n-1}).$$

In adevăr, efectuând diferenţa din membrul al doilea, cu ajutorul exprimării (66), deducem

$$zP_n - P_{n-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^{n-1}(z^2+z\sqrt{z^2-1}\cos\psi-1)\,d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)\left(1+\frac{z\cos\psi}{\sqrt{z^2-1}}\right)d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{n\pi}\frac{d}{dz}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^2\,d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{n}\frac{d}{dz}P_n(z) \quad ;$$

aşadar, prima relaţie (71). A doua relaţie (71) se deduce punând $P_{-n-1} = P_n$.

Alte relaţii de recurenţă se pot scrie sub formele

$$(72) \qquad nP_n = z\frac{dP_n}{dz} - \frac{dP_{n-1}}{dz}$$

$$(73) \qquad (z^2-1)\frac{dP_n}{dz} = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}) \quad .$$

In tratatele speciale, citate mai sus, se pot găsi diferite astfel de relaţii de recurenţă, folositoare in calculele cu polinomii lui LEGENDRE.

7. *Relaţii de ortogonalitate.* Intre diferitele polinoame există următoarele relaţii, numite relaţii de ortogonalitate:

$$(74) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n(z)\,P_m(z)\,dz = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \neq m\,; \\ \dfrac{2n+1}{2}, \text{ dacă } n = m\,. \end{cases}$$

sau încă, desvoltând,

$$(h-z)\Sigma h^n P_n + (1-2hz+h^2)\Sigma n h^{n-1} P_n = 0 \quad ;$$

egalând coeficientul lui h^{n-1} cu zero, obţinem relaţia (70).

Altă relaţie de recurenţă este

$$(71) \qquad (z^2-1)\frac{dP_n}{dz} = n(zP_n - P_{n-1}) = -(n+1)(zP_n - P_{n-1}).$$

In adevăr, efectuând diferenţa din membrul al doilea, cu ajutorul exprimării (66), deducem

$$zP_n - P_{n-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^{n-1}(z^2+z\sqrt{z^2-1}\cos\psi-1)\,d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)\left(1+\frac{z\cos\psi}{\sqrt{z^2-1}}\right)d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{n\pi}\frac{d}{dz}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^2\,d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{n}\frac{d}{dz}P_n(z) \quad ;$$

aşadar, prima relaţie (71). A doua relaţie (71) se deduce punând $P_{-n-1} = P_n$.

Alte relaţii de recurenţă se pot scrie sub formele

$$(72) \qquad nP_n = z\frac{dP_n}{dz} - \frac{dP_{n-1}}{dz}$$

$$(73) \qquad (z^2-1)\frac{dP_n}{dz} = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}) \quad .$$

In tratatele speciale, citate mai sus, se pot găsi diferite astfel de relaţii de recurenţă, folositoare in calculele cu polinomii lui LEGENDRE.

7. *Relaţii de ortogonalitate.* Intre diferitele polinoame există următoarele relaţii, numite relaţii de ortogonalitate:

$$(74) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n(z)\,P_m(z)\,dz = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \neq m ; \\ \dfrac{2n+1}{2}, \text{ dacă } n = m . \end{cases}$$

sau încă, desvoltând,

$$(h-z)\Sigma h^n P_n + (1-2hz+h^2)\Sigma n h^{n-1} P_n = 0 \quad ;$$

egalând coeficientul lui h^{n-1} cu zero, obţinem relaţia (70).

Altă relaţie de recurenţă este

$$(71) \qquad (z^2-1)\frac{dP_n}{dz} = n(zP_n - P_{n-1}) = -(n+1)(zP_n - P_{n-1}).$$

In adevăr, efectuând diferenţa din membrul al doilea, cu ajutorul exprimării (66), deducem

$$zP_n - P_{n-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^{n-1}(z^2+z\sqrt{z^2-1}\cos\psi - 1)\,d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)\left(1+\frac{z\cos\psi}{\sqrt{z^2-1}}\right)d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{n\pi}\frac{d}{dz}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)^2\,d\psi$$

$$= \frac{z^2-1}{n}\frac{d}{dz}P_n(z) \quad ;$$

aşadar, prima relaţie (71). A doua relaţie (71) se deduce punând $P_{-n-1} = P_n$.

Alte relaţii de recurenţă se pot scrie sub formele

$$(72) \qquad nP_n = z\frac{dP_n}{dz} - \frac{dP_{n-1}}{dz}$$

$$(73) \qquad (z^2-1)\frac{dP_n}{dz} = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}) \quad .$$

In tratatele speciale, citate mai sus, se pot găsi diferite astfel de relaţii de recurenţă, folositoare în calculele cu polinomii lui LEGENDRE.

7. *Relaţii de ortogonalitate.* Între diferitele polinoame există următoarele relaţii, numite relaţii de ortogonalitate:

$$(74) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n(z)\,P_m(z)\,dz = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \neq m; \\ \dfrac{2n+1}{2}, & \text{dacă } n = m. \end{cases}$$

Din ecuaţiile lui LEGENDRE, scrie sub forma

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right\}+n(n+1)P_n=0 \quad ,$$

pentru ambele polinoame, deducem

$$P_m\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right\}-P_n\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_m}{dz}\right\}+(n-m)(n+m+1)P_mP_n=0 \; .$$

Prin urmare,

$$\int_{-1}^{+1}\left[P_m\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right\}-P_n\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_m}{dz}\right\}\right]dz=$$

$$=-\int_{-1}^{+1}(n-m)(n+m1)P_mP_n\,dz \quad ,$$

sau încă, integrând prin părţi,

$$(1-z^2)\left(P_m\frac{dP_n}{dz}-P_n\frac{dP_m}{dz}\right)\Bigg|_{-1}^{+1}=-\int_{-1}^{+1}(n-m)(n+m+1)P_mP_n\,dz \; .$$

Primul membru este zero, deci pentru $n\neq m$, rezultă prima afirmaţie (74). Pentru $n=m$, avem

$$(75)\qquad \int_{-1}^{+1}\{P_n(z)\}^2\,dz=\frac{(2n)!}{2^n.(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^n\,dz \; ,$$

dacă ne servim de formula lui RODRIGUES.

Dar,

$$\int_{-1}(1-z^2)^n dz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-z^2)^n\,dz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta=2\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)} \; .$$

Prin urmare, primul membru al relaţiei (75) este egal cu

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\cdot 2\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2}{2n+1} \; .$$

8. *Expresia lui* $P_n(z)$ *cu ajutorul unei intagrale de contur.* Din teoria funcţiilor de variabilă complexă se ştie că, dacă $z=x+iy$ şi $Z=X+iY$, avem

$$(76)\qquad f(Z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}Z^n\int_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad ,$$

după teorema lui CAUCHY. Expresia

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz \quad ,$$

redă teorema reziduurilor; conturul C înconjorând origina.

Acestea fiind amintite, putem scrie, după (76),

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma h^n P_n = f(h) = \frac{1}{2\pi i}\,\Sigma h^n \int_C \frac{f(h)}{h^{n+1}}\,dh \quad .$$

Egalând în ambii membrii ai relației precedente coeficienții lui h^n, obținem

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dh}{h^{n+1}(1-2hz+h^2)^{1/2}} \quad , \tag{78}$$

integrala fiind extinsă dealungul unui contur C, care înconjoră origina.

9. *Integrala lui* SCHLÄFLI. Aplicând teorema lui CAUCHY funcției din membrul al doilea din formula lui RODRIGUES, avem

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n.n!}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t-z}\,\frac{d^n}{dz^n}\,(t^2-1)^n\,dt \quad ,$$

conturul C înconjorând punctul $t=z$.

Integrând prin părți odată, obținem

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\left|\frac{1}{t-z}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\right|_C + \int_C \frac{1}{t-z}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\,dt \, .$$

Primul termen din membrul al doilea este nul. Repetând integrarea prin părți de un număr suficient de ori, obținem

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n.n!}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt \quad , \tag{79}$$

expresie, care constitue integrala lui SCHLÄFLI.

10. *Funcțiile lui* LEGENDRE *de prima specie.* Dacă n este oarecare (*nu* un întreg pozitiv), integrala lui SCHLÄFLI definește *funcția lui* LEGENDRE de prima specie

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{2^n}(t^2-1)^n\,(t-z)^{-n-1}\,dt \quad , \tag{80}$$

conturul C înconjorând punctul $t=z$, astfel încât funcția

$t^2-1)^{n+1}\,(t-z)^{-n-2}$ să reia valoarea inițială după ce t parcurge conturul C.

Observăm că funcția de mai sus posedă trei singularități: $t=+1$, $t=-1$, $t=z$. După efectuarea unui circuit în jurul punctului $t=+1$, în sensul pozitiv, funcția precedentă se înmulțește cu $e^{2\pi i(n+1)}$; după efectuarea circuitului în jurul lui $t=z$, funcția se înmulțește cu $e^{-2\pi i(n+2)}$. Dacă circuitul C este astfel ales în cât să înconjore punctele $t=+1$ și $t=z$, fără ca să înconjore și punctul $t=-1$, funcția precedentă va relua valoarea inițială ($e^{-2i}=+1$). In aceste condiții, funcțiile $P_n(z)$ sunt definite pentru orice n.

11. *Exprimarea unui polinom oarecare ca serie de polinoamele lui* Legendre. Fie $f(z)$ un polinom de gradul n în variabila z. Este totdeauna posibil să determinăm n parametri a_i, astfel încât

$$f(z)\equiv\sum_{i=1}^{n} a_i P_i(z) \quad . \tag{81}$$

In adevăr, identificând coeficienții puterilor egale ale variabilei din cei doi membrii, vom obține n ecuații algebrice pentru cei n parametri a_i.

Putem obține acești coeficienți și sub formă de integrale definite. In adevăr, înmulțind ambii membri ai identității (81) cu $P_s(z)$, integrând și ținând seamă de proprietatea (7), deducem

$$\int_{-1}^{+1} f_n(z)\,P_s(z)\,dz=\frac{2}{2s+1}\,a_s \quad . \qquad (s=1,2,\ldots n) \tag{82}$$

Caz particular: desvoltarea în serie a funcției z^n. După (82) avem

$$a_s=\frac{2s+1}{2}\int_{-1}^{+1} z^n P_s(z)\,dz\ ;$$

sau, după formulele lui Rodrigues,

$$a_s=\frac{2s+1}{2}\,\frac{1}{2^s\,s!}\int_{-1}^{+1} z^n\,\frac{d^s}{dz^s}(z^2-1)^s\,dz\ .$$

Integrând prin părți și observând că termenul integrat dis-

pare, rezultă

$$a_s = -\frac{2s+1}{2^{s+1}\,s!}\,n\int_{-1}^{+1} z^{n-1}\,\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\,(z^2-1)^s\,dz\,.$$

Repetând procesul de integrare prin părți de s ori, obținem

$$a_s = \frac{2s+1}{2^{s+1}\,s!}\,\frac{n!}{(n-s)!}\,(-1)^s\int z^{n-s}\,(z^2-1)^s\,dz\,.$$

Integrala din membrul al doilea este cunoscută sub numele de *integrala lui* Euler, de specia întâia (v. Whittaker, Modern Analysis, p. 253). Valoarea ei se exprimă cu ajutorul *funcției gama* Γ a lui Gauss (v. Whittaker l. c., p. 237 și 254). Se obține

$$a_s = (2s+1)\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+2)}{(n+s+1)(n+s-1)\ldots(n-s+3)}\,.$$

Prin urmare,

(83)
$$z^n = \frac{n!}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\left\{(2n+1)P_n(z)+(2n-3)\,\frac{2n+1}{2}\,P^{n-2}(z)+\right.$$
$$\left.+(2n-7)\,\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}\,P_{n-4}(z)+\ldots\right\}$$

Pentru o funcție desvoltată în serie întreagă de puteri (analitică în interiorul și pe elipsa de focare $z=\pm 1$)

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

vom avea

$$f(z) = \sum_0^\infty b_n P_n(z)\quad,$$

cu

(84)
$$b_n = \frac{n!}{3\cdot 5\ldots(2n-1)}\left\{A_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2\,(2n+3)}\,A_{n+2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\,(2n+3)(2n+5)}\,A_{n+4}+\ldots\right\}$$

12. *Desvoltarea funcției*

$$f(t) = (z-t)^{-1/2} = z^{-1} + t\,z^{-2} + t^2 z^{-3} + \ldots$$

Coeficienții (84) sunt

(85)
$$b_n = \frac{n!}{3\cdot 5\ldots(2n-1)}\left\{z^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot(2n+3)}\,z^{-n-3}+\ldots\right\}.$$

144. Polinomii şi funcţiile lui Legendre de specia doua.

1. *Polinomul de ordinul n de specia a doua,* este dat de

$$(86)\qquad Q_n(z) = \frac{n!}{3.5\ldots(2n+1)}\left\{z^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)}z^{-n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}z^{-n-5} + \ldots\right\},$$

pentru n întreg pozitiv.

Deducem,

$$(87)\qquad (z-t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(t)\,Q_n(z).$$

2. *Funcţia lui* Legendre *de specia a doua* se defineşte pentru n oarecare, real sau imaginar, prin integrala

$$(87)\qquad Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,(z-t)^{-n-1}\,dt$$

dacă partea reală a lui n este pozitivă.

Desvoltarea în serie de puteri ale lui z se efectuiază cu ajutorul funcţiei gama Γ (Gauss). Pentru a nu extinde peste limitele prescrise acestei lucrări desvoltările necesitate de o analiză amănunţită a proprietăţilor funcţiilor precedente şi pentru că aceste funcţii nu internin direct în studiul problemelor fundamentale de potenţiale, trimetem la tratateîe citate la început pentru studiul analitic al funcţiilor lui Legendre.

3. *Integrala iui* Neumann *exprimă pentru* $z>1$, *functia*

$$(89)\qquad Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{z-t}\,P_n(t)\,dt.$$

In adevăr, din desvoltarea (88), deducem

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{z-t}P_n(t)\,dt = \left\{\frac{1}{2}(2n+1)\int_{-1}^{+1}P_n^2(t)\,dt\right\}Q_n(z) = Q_n(z).$$

4. *Formulă de recurenţă* între funcţiile succesive:

$$(90)\qquad n\,Q_n - (2n-1)\,z\,Q_{n-1} + (n-1)\,Q_{n-2} = 0.$$

Această relație se deduce formând integrala (89) din primul membru și ținând seamă de formulele de recurență între P_n succesivi.

5. Funcția $Q_n(z)$ satisface ecuației diferențiale a lui LEGENDRE (No. 1).

145. Polinomii asociați $P_n^m(z)$ și $Q_n^m(z)$. (FERRER) sunt definiți prin relațiile

$$(93)\quad P_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z)\,;\quad Q_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z)\,,$$

unde m și n sunt întregi pozitivi. In mod analog se formează și funcțiile lui LEGENDRE de specia a doua, dacă m este întreg pozitiv, iar n oarecare, real sau imaginar. Aceste funcții satisfac ecuației diferențiale (LEGENDRE)

$$(92)\qquad (1-z^2)\frac{d^2\chi}{dz^2} - 2z\frac{d\chi}{dz} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right\} \chi = 0\,,$$

care se deduce din ecuația lui LEGENDRE (63) diferențiind de m ori.

1. *Proprietăți de ortogonalitate.* Avem

$$(93)\quad \int_{-1}^{+1} P_n^m(z)\, P_r^m(z)\, dz = \begin{cases} 0\,, & \text{pentru } r \text{ diferit de } n\,; \\ \dfrac{2}{2n-1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\,, & \text{pentru } r = n\,. \end{cases}$$

Prima relație se obține dacă înmulțim ecuațiile lui LEGENDRE (92) pentru P_n^m și P_r^m respectiv, cu P_r^m și P_n^m, le scădem și apoi integrăm între -1 și $+1$.

A doua relație (93) se obține observând că

$$P_n^{m+1}(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_n^m(z)}{dz} + mz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} P_n^m(z)\,.$$

Ridicând la patrat și integrând, avem

$$\int_{-1}^{+1} \{P_n^{m+1}(z)\}^2\, dz = \int_{-1}^{+1} \left\{ (1-z^2)\left(\frac{dP_n^m}{dz}\right)^2 + 2mz P_n^m \frac{dP_n^m}{dz} + \frac{m^2 z^2}{1-z^2} (P_n^m)^2 \right\} dz$$

$$= -\int_{-1}^{+1} P_n^m(z) \frac{d}{dz}\left\{ (1-z^2)\frac{dP_n^m}{dz} \right\} dz - m\int_{-1}^{+1} (P_n^m)^2\, dz + \int_{-1}^{+1} \frac{m^2 z^2}{1-z^2} (P_n^m)^2\, dz\,.$$

Integrând prin părți primii doi termeni din membrul al doilea și ținând seamă de ecuația (93), avem

$$\int_{-1}^{+1}\{P_n^{m+1}(z)\}^2\,dz=(n-m)(n-m+1)\int_{-1}^{+1}\{P_n^m(z)\}^2\,dz\ .$$

Repetând procesul de un număr suficient de ori, deducem

$$\int_{-1}^{+1}\{P_n^m(z)\}^2\,dz=(n-m+1(n-m+2)\ldots n(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)\times$$
$$\times\int_{-1}^{+1}\{P_n(z)\}^2\,dz\ ;$$

de unde rezultă a doua relație (93).

2. *Formula lui* Rodrigues pentru polinomii asociați sună

$$P_n^m(z)=\frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n.n!}\,\frac{d^{n+m}(z^2-1)^n}{dz^{n+m}}\ . \tag{94}$$

3. *Seria lui* P_n^m se obține derivând formula lui Rodrigues și desvoltând după binomul lui Newton funcția $(z^2-1)^n$. Găsim astfel

$$P_n^m(z)=\frac{(2n)!}{2^m.m!(n-m)!}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\left\{z^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2.(2n-1)}z^{n-m-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}z^{n-m-4}+\ldots\right\}\ . \tag{95}$$

146. Funcțiile sferice sunt funcții armonice. 1. Să considerăm ecuația lui Laplace în coordonate polare (r,θ,φ)

$$\Delta\Psi=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)\right\}=0. \tag{96}$$

Să considerăm cazul când există o soluție a acestei ecuații, care să poată fi pusă sub forma

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)\ , \tag{97}$$

ca produs de funcții ce depind de fiecare din cele trei coordonate separat. Putem scrie pentru (96) având în vedere (97),

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0. \tag{98}$$

Pentru precizare, admitem că variabilele sunt determinate în domeniile delimitate de condiţiile pe frontieră următoare

$$(99) \qquad r_1 \leq r \leq r_2 \; ; \; 0 \leq \theta \leq \pi \; ; \; -\pi \leq \varphi \leq +\pi \; .$$

Cum variabila φ nu apare explicit în ecuaţia (98), să considerăm soluţia, folositoare pentru problemele puse de Fizica teoretică,

$$(100) \qquad \Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi} \; ,$$

unde m este un întreg pozitiv (ceeace este indicat prin condiţia ca funcţia Φ să fie univalentă).

Introducând soluţia (100) în ecuaţia (98), obţinem

$$(101) \qquad \frac{1}{R}\left(r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \; .$$

Membrul întâi al acestei relaţii fiind funcţie numai de r, pe când membrul al doilea este funcţie numai de θ, egalitatea nu poate să subsiste de cât dacă cei doi membrii sunt egali cu aceiaşi constantă α. Deducem, aşadar, din (101), următoarele două ecuaţii

$$(102) \qquad r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - \alpha R = 0 \; ,$$

$$(103) \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left\{\alpha - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta = 0 \; .$$

Pentru $\alpha = n(n+1)$, obţinem ecuaţia diferenţială a lui LEGENDRE (92) unde $z = \cos\theta$, satisfăcută de polinomii sau funcţiile asociate $P_n^m(\cos\theta)$ şi $Q_n^m(\cos\theta)$, care mai sunt numite funcţii armonice *teserale*.

Pentru $m = 0$, obţinem ecuaţia lui LEGENDRE (64), la care satisfac polinomii şi funcţiile lui LEGENDRE, care mai sunt numite funcţii armonice *zonale*.

Pentru $m = n$, obţinem ecuaţia diferenţială a funcţiilor armonice *sectoriale* $P_n^n(\cos\theta)$ şi $Q_n^n(\cos\theta)$.

Revenind la ecuaţia (102), observăm că ea este satisfăcută de soluţia

$$R = A\, r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}}} + B\, r^{-\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}}} \; ,$$

care se simplifică, devenind, pentru $\alpha = n(n+1)$,

$$R = A r^n + B r^{-n-1},$$

A şi B fiind constante de integrare.

Dacă în locul ecuaţiei laplaceiene (96) se consideră *ecuaţia oscilaţiilor acustice* (vezi şi § 192)

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

atunci ecuaţia (102) devine

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + (k^2 - \frac{\alpha}{r^2}) R = 0,$$

ecuaţie, cunoscută sub numele de *ecuaţia lui* BESSEL, ale cărei soluţii se exprimă cu ajutorul funcţiilor lui BESSEL [1].

2. Dacă în ecuaţia diferenţială (92) facem substituţia

$$\Theta = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} F(z) \tag{104}$$

obţinem

$$(1 - z^2)\frac{d^2F}{dz^2} - 2(m+1) z \frac{dF}{az} + (n - m)(n + m + 1) F = 0,$$

sau, luând ca nouă variabilă independentă

$$x = \frac{1}{2}(1 - z), \tag{105}$$

rezultă ecuaţia diferenţială

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + (m+1)(1-2x)\frac{dF}{dx} + (n-m)(n+m+1)F = 0. \tag{106}$$

Să facem notaţiile

$$\alpha = m - n \; ; \; \beta = m + n + 1 \; ; \; \gamma = m + 1 \; ; \tag{107}$$

se obţine pentru ecuaţia (106)

$$x(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} - [\gamma - (\alpha + \beta + 1) x]\frac{dF}{dx} + \alpha\beta F = 0, \tag{108}$$

numită ecuaţia diferenţială a funcţiei ipergeometrice (GAUSS)

$$F(\alpha, \beta \; ; \; \gamma \; ; \; x),$$

care, se dovedeşte că este o funcţie analitică pentru $|x| < 1$;

---

1) v. WHITTAKER, *Modern Analysis*, cap. XVII; RIEMANN-WEBER, *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, cap. VIII; COURANT-HILBERT, *Methoden der matematischen Physik*, I, p. 382. Vezi § 191.

funcția F se exprimă cu ajutorul *seriei ipergeometrice*

$$(109)\quad F(\alpha,\beta;\gamma;x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

unde α,β,γ sunt parametri, diferiți de zero, arbitrari, reali sau imaginari, neputând avea valori întregi negative. (v. WHITTAKER, l. c. C. XIV).

Printre cazurile particulare interesante citățm

$$F(-n,\beta,\beta;x)=1-\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots=(1-x)^n,$$

ceeace exprimă cunoscuta desvoltare a binomului; și

$$F(1,1,2;x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\ldots=\frac{1}{x}\log\frac{1}{1-x}.$$

In cazul parametrilor reali, caz care interesează Fizica, avem pentru seria (109), pe cercul convergență $x=1$, raportul între doi termeni consecutivi

$$\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}=(1+\frac{\alpha-1}{n})(1+\frac{\beta-1}{n})\left\{1-\frac{\gamma-1}{n}+\frac{(\gamma-1)^2}{n^2}-\ldots\right\}$$
$$=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

unde θ_n este un număr finit, astfel încât ultimul termen este neglijabil față de primii, pentru n destul de mare.

Rezultă că $F(\alpha,\beta;\gamma;1)$ este convergentă când $\gamma-\alpha-\beta>0$ și divergentă când $\gamma-\alpha-\beta\leq 0$.

3. *Funcția gama* $\Gamma(x)$, *a lui* GAUSS, se definește, pentru x real și pozitiv, prin integrala convergentă

$$(110)\quad \Gamma(1+x)=\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^x\,d\alpha;$$

iar pentru x real sau imaginar, prin limita produsului infinit, convergent,

(111) $$\Gamma(1+x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x\, n!}{(1+x)(2+x)\dots(n+x)},$$

care exprimă o funcţie analitică regulată de x.

Că aceste două definiţii sunt echivalente, pentru x real şi pozitiv, se poate verifica precum urmează.

Să considerăm integrala

(112) $$J_k = \int_0^1 \xi^{x+k} (1-\xi)^{n-k}\, d\xi,$$

unde k este un parametru dat.

Din (111) rezultă imediat

$$J_n = (n+1+x)^{-1}.$$

Pe de altă parte, integrând (112) prin părţi, obţinem

$$\frac{J_k}{J_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1+x}.$$

Făcând în relaţia precedentă succesiv $k = 0, 1, 2, 3, \dots n$, şi înmulţind relaţiile astfel obţinute, avem

$$\frac{J_0}{J_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} \dots \frac{J_{n-1}}{J_n} J_n = J_0 = \frac{n!}{(1+x)(2+x)\dots(n+1+x)}.$$

De unde, înmulţind ambii membrii ai ultimei egalităţi cu n^x, rezultă

$$\frac{n^x\, n!}{(1+x)(2+x)\dots(n+x)} = n^x (n+1+x) \int_0^1 \xi^x (1-\xi)^n d\xi$$

$$= \frac{n+1+x}{n} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^x\, dt.$$

Rămâne să mai arătăm că limita membrului al doilea, pentru $n \to \infty$, este funcţia $\Gamma(1+x)$. Observăm că limita primului factor este, evident, egală cu unitatea. Fie, apoi, un număr pozitiv dat, N. Pentru $n > N$, avem, evident,

$$\int_0^N \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\, dt < \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\, dt;$$

aşadar

$$(113)\qquad \int_0^N e^{-t}\,t^x\,dt \leqq \lim_{n\to\infty}\,\inf.\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n\,t^x\,dt\ ,$$

ori care ar fi numărul N; chiar şi pentru $N=\infty$. Pentru a-ceastă valoare integrala din membrul întâi devine $\Gamma(1+x)$, după (111).

Apoi, cum

$$\int_0^n (1-\frac{t}{n})\,t^x\,dt \leqq \int_0^n e^{-t}\,t^x\,dt\ ,$$

căci, evident,

$$(1-\frac{t}{n})^n \leqq e^{-t}\ ,$$

urmează

$$\lim_{n\to\infty}\,\sup.\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n\,t^x\,dt \leqq \int_0^\infty e^{-t}\,t^x\,dt=\Gamma(1+x)\ ;$$

ceeace, împreună cu (113), stabileşte proprietatea enunţată.

Gauss introduce funcţia

$$(114)\qquad \Psi(x)=\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}\ ,$$

pentru care, după (114), rezultă

$$\Psi(x)=\lim_{n\to\infty}\,(\log.\,n-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\cdots-\frac{1}{n+x})\ .$$

Urmează că

$$\Psi(0)=\lim_{u\to\infty}\,(\log.\,n-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n})$$
$$=-C=-0,57721566\ldots$$

unde C poartă numele de *constanta lui* Euler. Avem, aşadar,

$$(115)\qquad \Psi(n)=-C+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\ .$$

147. Consideraţii analitice asupra desvoltării funcţiei potenţiale a unui pol. Din relaţia (52) deducem

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{116}$$

$$= \sum \frac{R^n}{p^{n+1}} P_{n+1}(z) \quad ,$$

căci $\alpha = \frac{R}{p}$; $z = \cos\gamma$; iar p este distanţa izvorului A la punctul fix O luat ca origină, R distanţa punctului curent P la punctul O şi γ este unghiul făcut de direcţia lui $\overline{R}$ cu direcţia lui $\overline{p}$.

Formula binomială a lui Newton, pentru $|z| < 1$, permite desvoltarea

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma C_n z^n \quad ; \qquad C_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \quad . \tag{117}$$

Dacă

$$|2\alpha z - \alpha^2| = |u| < 1, \tag{118}$$

după (116), putem efectua desvoltarea

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\Sigma C_n u_n \quad ,$$

care justifică relaţia (117), desvoltând $(2\alpha z - \alpha^2)^n$ după formula binomului. Această desvoltare este valabilă numai pentru

$$|z| \leq 1 \quad ; \quad \alpha = \frac{R}{p} < \sqrt{2} - 1 \quad , \tag{119}$$

ceeace se obţine rezolvând neegalitatea (118) pentru $z = 1$.

Sub condiţiile (119) seria (116) este absolut convergentă şi reprezintă funcţia analitică din primul membru, în interiorul unei sfere de rază egală cu cea mai mare distanţă p, excepţând punctul A unde se găseşte polul.

Cum funcţia $z(0)$ este simetrică, putem efectua desvoltarea (117) scoţând p în factor. Aşadar,

$$\frac{1}{r} = \Sigma \frac{p^n}{R^{n+1}} P_n(z) \quad . \tag{120}$$

Dacă d este distanţa de O a celui mai depărtat punct din distribuţia dată, închisă într'un domeniu finit D, atunci $p \leq d$

Seria (119) este uniform convergentă dacă punctul P este exterior lui D; adică, pentru toate punctele exterioare sferei de rază λd, unde $\lambda > 1$. Desvoltarea (118) este, aşadar, valabilă pentru distanţele mari ale punctului curent faţă de punctele domeniului ce cuprinde izvoarele.

Teoremă. Funcţia potenţială a unei distribuţii discrete de izvoare este desfăşurabilă în serii de funcţii sferice (armonice) de ordinul n. Această serie este convergentă în interiorul unei sfere cu centrul în origină (care poate să fie aşezat în orice punct al spaţiului), conţinând distribuţia (excepţie făcând punctul de origină); funcţia potenţială este *uniform* convergentă în orice punct exterior unei sfere conţinând distribuţia în interior. Această proprietate este satisfăcută şi de derivatele parţiale de primul ordin ale funcţiei potenţiale.

Această teoremă este valabilă şi pentru alte distribuţii, de cât cea considerată până acum, după cum vom vedea mai târziu (1).

1) Asupra demonstraţiei complete a teoremei precedente vezi KELLOGG, l. c. pg. 135—143.

CAP. II.

Potenţialul de volum

Să presupunem că avem o distribuţie *continuă* de izvoare, răspândite într'un domeniu care ocupă un volum determinat, finit.

Nu este posibil, în general, să se ordoneze distribuţia în modèle, — aşa cum s'a făcut în cazul distribuţiei discrete de puncte izolate, — spre a putea construi, din aproape în aproape, potenţialul corespunzător.

Problema care se pune acum este de ordin analitic: cunoscând funcţia de densitate care caracterizează distribuţia şi care satisface unor anumite condiţii de continuitate într'un domeniu dat, se cere să se determine câmpul acestei distribuţii. Pentru aceasta este necesar şi suficient să găsim o integrală a ecuaţiei lui Poisson, resp. Laplace, care satisface unor anumite condiţii pe contur.

Tratarea acestei probleme necesită unele desvoltări analitice, pe care le expunem în cele ce urmează.

Cum, în intenţiile mele nu este să fac o expunere de Analiză matematică a capitolului privind proprietăţile integralelor ce apar în expresiile potenţialelor, — pentru care timet la orice tratat de specialitate, — voi rezuma, în cele ce urmează, câteva proprietăţi esenţiale, necesare rigurozităţii analitice a expunerii teoriei potenţialului, în limitele strictului necesar.

Scopul urmărit de această expunere este introducerea în teoria potenţialelor, atât cât este necesară această teorie Fizicii teoretice.

Scanned with OKEN Scanner

A. Proprietăţi analitice ajutătoare. [1])

148. Teoreme asupra existenţei unor integrale de volum.

I. Să considerăm o funcţie de poziţie $f(P)$ continuă într'un domeniu simplu-conex V, cu excepţia unui punct, şi numai unul singur, P_0, interior domeniului, în care $f(P)$ devine infinită; fie v un element de volum infinitesimal din V cuprinzând punctul P. Atunci integrala

$$\int_{V-v} f(P)\, d\tau$$

există.

Prin definiţie, integrala

$$I = \int_V f(P)\, d\tau \tag{1}$$

există (adică, este convergentă), dacă

$$\lim_{v \to P_0} \int_{V-v} f(P)\, d\tau$$

există şi are ca limită integrala (1). Este destul ca această condiţie să fie satisfăcută când alegem pentru v o sferă de centru P_0.

Dacă V' este un domeniu conţinut în V şi conţinând pe P_0, integrala

$$\int_{V'} f(P)\, d\tau$$

există deasemenea. In particular există

$$\int_v f(P)\, d\tau$$

şi tinde la zero când $v \to P_0$.

II. „Integrala

$$\int_V \frac{d\tau}{r^n} \qquad 0 < n < 3,$$

1) Pentru desvoltări mai ample se poate consulta oricare din cunoscutele Tratate de Analiză matematică; în special Analiza lui JORDAN, precum şi KELLOGG, l. c. cap. VI.

există în domeniul V. In orice regiune V', regulată, din V, integrala ia o valoare mai mică decât valoarea ce o ia când V' este o sferă de acelaş volum, cu centrul în punctul de discontinuitate P_0".

Fie σ o sferă infinitesimală de rază R şi volum v cu centrul în punctul de discontinuitate P_0. Fie R_1 distanţa punctului P_0 la cel mai îndepărtat punct de pe frontiera lui V. Să considerăm integrala cenvergentă

$$\left| \int_{V-v} \frac{d\tau}{r^n} \right| \leqq \int_R^{R_1} \frac{d\tau}{r^n} = \int_R^{R_1} r^{2-n}\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_R^{R_1} r^{2-n}\, dr,$$

căci transformarea de coordonate este admisibilă pentru astfel de integrale. Când $v \to P_0$ integrala din membrul întâi tinde către integrala considerată, iar integrala ultimă tinde către o valoare finită, domeniul fiind finit, iar $0 < n < 3$, prin ipoteză.

Pentru a stabili cea de a doua proprietate enunţată, să considerăm o sferă V_s cu centrul în P_0, de rază R şi de acelaş volum cu V (care să *nu* fie o sferă), astfel încât să existe puncte în V_s care nu sunt conţinute în V şi puncte în V care să nu fie conţinute în V_s. Fie v mulţimea punctelor din V care nu aparţin lui V_s. Fie C un cub, care conţine pe v. Putem defini o funcţie F sub condiţiile: 1. $F = f$ în toate punctele din v; 2. $F = 0$ în celelalte puncte ale lui C. Atunci, prin definiţie

$$\int_v f\, d\tau = \int_C F\, d\tau .$$

Acestea fiind stabilite, putem scrie (însemnând cu σ mulţimea punctelor din V_s care nu-s conţinute în V)

$$\int_{V_s} \frac{d\tau}{r^n} - \int_v \frac{d\tau}{r^n} = \int_\sigma \frac{d\tau}{r^n} - \int_v \frac{d\tau}{r^n} .$$

Dar, pentru puncte interioare domeniului V,

$$r^{-n} \begin{cases} \geqq R^{-n} & \text{în } \sigma \\ \leqq R^{-n} & \text{în } v \end{cases} .$$

Aşadar, pentru puncte interioare domeniului V, conţinute

în σ sau ν, integrala extinsă asupra lui V_s este mai mare decât integrala extinsă asupra lui V. Dacă nici σ nici ν nu conţine puncte interioare domeniului V, atunci V şi V_s coincid.

In mod analog se demonstrează că: „integrala $\int_S \frac{d\sigma}{r^n}$ (unde $0 < n < 2$), extinsă la o regiune plană regulată S, este convergentă. Valoarea ei este mai mare pentru un cerc cu centrul în P_0 şi aceiaşi arie ca orice altă regiune regulată din S".

III. Dacă se cunoaşte o funcţie $g(P)$, astfel încât $|f(P)| \leqq g(P)$ în tot domeniul, admiţând că integrala

$$I_0 = \int_V g(P)\, d\tau$$

există, atunci integrala I este convergentă (există).

In adevăr, fie ν şi ν' două elemente de volum infinitesimale din V ce cuprind punctul P_0 de discontinuitate, şi fie o sferă σ cu centrul în P_0, care închide regiunile ν şi ν'. Avem

$$\left|\int_{V-v} f(P)\, d\tau - \int_{V-v'} f(P)\, d\tau\right| = \left|\int_{\sigma-v} f(P)\, d\tau - \int_{\sigma-v'} f(P)\, d\tau\right|$$

$$\leqq \int_{\sigma-v} g(P)\, d\tau + \int_{\sigma-v'} g(P)\, d\tau \leqq 2\int_{\sigma} g(P)\, d\tau .$$

Cum ultima integrală există şi tinde la zero pentru $\sigma \to P_0$, rezultă că şi integrala I există.

IV. Să considerăm, în particular, integralele

$$(2)\quad I(P) = \int_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\, d\tau \quad ; \quad \bar{J}(P_0) = \int_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\ \mathrm{grad}\frac{1}{r}\, d\tau$$

unde $d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ şi $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ este distanţa între un punct curent al domeniului $P(\xi,\eta,\zeta)$ şi punctul $P_0(x,y,z)$ de discontinuitate. Funcţia $\rho(\xi,\eta,\zeta)$ să fie continuă, să ia o valoare determinată în fiecare punct şi să fie mărginită, astfel în cât să avem $|\rho| \leqq \mu$. Cum, $\left|\mathrm{grad}\frac{1}{r}\right| \leqq \frac{1}{r^2}$, după teorema II, integralele I şi $\bar{J}$ există în domeniul considerat V. Aceste integrale sunt funcţii continue de $P_0(x,y,z)$ în V. In adevăr, fie un punct oarecare P' al domeniului şi σ o sferă infinitesimală ce înconjoară acest punct. Să considerăm integralele

$$I_1(P_0)=\int_\sigma \frac{\rho}{r}\,d\tau \quad ; \quad I_2(P_0)=\int_{V-\sigma} \frac{\rho}{r}\,d\tau \quad ,$$

astfel încât $I = I_1 + I_2$.

Pentru un $\varepsilon > 0$, putem alege pe σ suficient de mic astfel încât

$$|I_1(P_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ; \quad |I_1(P_0) - I_1(P')| < \frac{2}{3}\varepsilon \quad ;$$

In adevăr, acest lucru este posibil după proprietăţile stabilite precedent, la I şi II.

Să luăm punctul P_0 în vecinătatea lui P' astfel încât

$$\left|\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right| < \frac{\varepsilon}{3V\mu} \quad ,$$

unde V este volumul regiunii considerate V. Avem,

$$|I_2(P_0) - I_2(P')| \leq \int_{V-\sigma} |\rho| \left|\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right| d\tau < \frac{\varepsilon}{3} \quad .$$

Aşadar,

$$|I(P)-I(P')| < |I_1(P_0)-I_1(P')| + |I_2(P_0)-I_2(P')| < \varepsilon \quad .$$

In mod analog se demonstrează continuitatea integralei $\bar{J}$.

V. *Componentele integralei $\bar{J}$ sunt derivatele integralei I în raport cu variabilele curente* (x, y, z). Să arătăm, de ex. că $\bar{J}_x = \dfrac{\partial I}{\partial x}$, într'un punct P', pe care, pentru simplificare, îl alegem în origina axelor de coordonate. Fie $P(h, 0, 0)$ un punct de pe axa x-lor şi $P_0P = r$, $P_0P' = r'$. Să considerăm diferenţa

$$D = \frac{I(P)-I(P')}{h} - J_x(P') = \int_V \rho \left\{ \frac{1}{h}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) - \frac{\xi}{r'^3} \right\} d\tau \quad .$$

Avem,

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r'} = \frac{r'^2 - r^2}{rr'(r+r')} \quad ; \quad r'^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \quad ; \quad r^2 = (\xi-h)^2+\eta^2+\xi^2 .$$

Aşadar,

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r'} = \frac{2h\xi - h^2}{rr'(r+r')} \quad .$$

Prin urmare, pentru h diferit de zero,

$$D = \int_V \rho \left\{ \frac{2\xi - h}{rr'(r+r')} - \frac{\xi}{r'^3} \right\} d\tau \quad .$$

Cum, $|\xi| \leqq r'$ şi $|2\xi - h| \leqq |\xi| + |\xi - h| \leqq r' + r$, ultima integrală este convergentă, după proprietăţile precedent stabilite ($r = r'$ şi integrandul devine identic nul).

Observăm că D este o funcţie continuă de h. Pentru integrala extinsă la domeniul $V - \sigma$ (unde σ este o sferă ce izolează punctul de discontinuitate) faptul este evident (admiţând că ρ este funcţie *mărginită*).

Integrala extinsă la domeniul σ admite drept majorantă

$$\mu \int_\sigma \left(\frac{1}{rr'} + \frac{1}{r'^2} \right) d\tau \leqq \frac{\mu}{2} \int_\sigma \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{3}{r'^2} \right\} d\tau \leqq 2\mu \int_\sigma \frac{d\tau}{r'^2} \quad ,$$

ceeace se vede dacă se ţine seamă de neegalitatea

$$\mathrm{P}\,|\,a\;b\,| \leqq a^2 + b^2$$

unde a şi b sunt reali, şi de proprietatea II.

Ultima integrală din neegalitatea de mai sus este însă convergentă, după II; ea tinde spre zero, aşadar, când $\sigma \to 0$, după proprietatea I.

In aceste condiţii, integrala D tinde în mod continuu spre zero când h tinde la zero. Prin urmare,

$$J_x(P') = \lim \frac{I(P) - I(P')}{h} = \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)_{P'} \quad .$$

VI. *Condiţia lui* Hölder. Am constatat că $I(P)$ posedă derivate de ordinul întâi J_x, J_y, J_z, continue, dacă funcţia de densitate $\rho(P)$ este mărginită. Pentru derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei $I(P)$, condiţia ca $\rho(P)$ să fie mărginită nu este suficientă pentru a putea să afirmăm că aceste derivate sunt continue. In acest scop este suficient ca funcţia $\rho(P)$ să mai satisfacă „condiţiei lui Hölder": în fiecare punct P din V trebue ca

$$|\rho(P) - \rho(P')| \leqq A\, r^\alpha \tag{3}$$

pentru fiecare punct P', pentru care $\overline{P'P} = r \leqq c$, unde A, α şi c sunt constante *pozitive* depinzând, în general, de punctul P. Dacă aceste constante sunt aceleaşi pentru orice punct P, zicem că funcţia $\rho(P)$ satisface *uniform* în V condiţiei lui Hölder.

VI. *Continuitatea derivatelor de ordinul al doilea.* Să considerăm, în domeniul de integrare, un punct P', pe care-l înconjorăm cu o sferă σ, astfel încât $I = I_\sigma + I_{V-\sigma}$, prima integrală fiind extinsă asupra sferei σ şi a doua asupra domeniului $V - \sigma$, care are punctul P' în exterior. Această ultimă integrală este evident continuă pentru toate punctele domeniului. Ea posedă deci, derivate continue, de ordinul voit.

Pentru a stabili continuitatea derivatelor de ordinul al doilea ale integralei I_σ într'un punct P', observăm că putem scrie

$$\rho(P) = (\rho(P) - \rho(P')) + \rho(P') = \chi(P) + \rho(P')$$

astfel încât funcţia de desitate se descompune în două: $\chi(P)$, care se anulează în P' şi $\rho(P')$, având în toată sfera σ valoarea constantă pe care o ia în P'. Aşadar, problema se descompune în două: cazul densităţii constante şi cazul când densitatea se anulează în punctul considerat P' inierior sferei σ.

In cazul densităţii constante $\rho(P') = \varkappa$, vom stabili mai târziu (§ 162) că, pentru un punct interior unei sfere date, integrala I are derivate de ordinul al doilea constante, şi vom calcula aceste derivate. Vom găsi

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa .$$

Aşadar,

$$\Delta I = -4\pi\varkappa . \tag{4}$$

Rămâne să studiem cazul când funcţia de densitate se anulează în punctul P'. Presupunem că este satisfăcută condiţia lui Hölder (3):

$$|\rho| \leqq A r^{\alpha} ,$$

unde $r' = \overline{P'P}$, luând origina în P'. Vom demonstra că

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\right)_{P'} = \left\{\int_\sigma \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau\right\}_{P'} = \int_\sigma \rho \left\{\frac{3\xi^2}{r'^5} - \frac{1}{r'^3}\right\} d\tau ;$$

ultima integrală fiind convergentă în virtutea relaţiilor admise

$$|\rho| \leqq \mu , \quad |\xi| \leqq r' ; \quad |\rho| \leqq A r'^{\alpha} , \quad (\alpha > 0). \tag{5}$$

Pentru aceasta observăm că, în virtutea inegalităţilor precedente este posibilă derivarea sub semnul integrală; apoi no-

tând cu K ultima integrală, avem de arătat că

$$\frac{1}{h}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_P - \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{P'}\right\} = \frac{1}{h}\{J_x(P) - J_x(P')\} - K \equiv D'$$

există şi tinde către zero odată cu h. In adevăr, integrala

$$D' = \int_\sigma \rho \left\{\frac{1}{h}\left(\frac{\xi - h}{r^3} - \frac{\xi}{r'^3}\right) - \frac{3\xi^2}{r'^5} + \frac{1}{r'^3}\right\} d\tau$$

există în virtutea inegalităţilor (5) scrise mai sus. Observăm, mai departe, că

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\xi - h}{r^3} - \frac{\xi}{r'^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{\xi}{h}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right);$$

dar cum,

$$r'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad \text{şi} \quad r^2 = (\xi - h)^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

rezultă

$$D' = \int_\sigma \rho \left\{-\frac{1}{r^3} - \frac{\xi(2\xi - h)}{rr'(r + r')}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rr'} + \frac{1}{r'^2}\right) - \frac{3\xi^2}{r'^5} + \frac{1}{r'^3}\right\} d\tau.$$

Această integrală posedă o valoare minimă (anume, valoarea zero) pentru $h = 0$, căci expresia de sub integrală se reduce la zero. A stabili că D' *tinde* la zero cu h înseamnează a demonstra că integrala D' este *continuă* în punctul P'.

In acest scop, observăm că integrala precedentă posedă două categorii de discontinuităţi provenind dela termenii cari conţin ca factori pe r' şi pe r la numitor. Termenii cari conţin pe r' în numitor nu prezintă nici o dificultate de raţionament, din cauza condiţiei lui Hölder. Pentru termenii cari conţin pe r în factor la numitor, avem succesiv,

$$\left| -\frac{1}{r^3} + \frac{\xi(2\xi - h)}{rr'(r + r')}\frac{1}{r^2} \right| = \left| \frac{2\xi^2 - \xi h - r'^2 - rr'}{r^3 r'(r + r')} \right| \leq \frac{2}{r^2 r'},$$

dacă ţinem seamă de relaţiile evidente

$$|\xi| \leq r' \quad ; \quad |\xi - h| \leq r \quad ; \quad \eta^2 + \zeta^2 \leq r^2.$$

Apoi, pentru ceilalţi de sub integrala D, deducem

$$\left| \frac{\xi(2\xi - h)}{rr'(r + r')}\left(\frac{1}{rr'} + \frac{1}{r'^2}\right) - \frac{3\xi^2}{r'^5} + \frac{1}{r'^3} \right| \leq \frac{1}{r^2 r'} + \frac{1}{rr'^2} + \frac{4}{r'^3}.$$

Aşadar,

$$\left|(D')_\sigma\right| \leq A\int r'^{\alpha}\left\{\frac{4}{r'^3}+\frac{1}{rr'^2}+\frac{3}{r^2r'}\right\}d\tau$$
$$< A\int\left\{\frac{4}{r'^{3-\alpha}}+\frac{1}{rr'^{2-\alpha}}+\frac{3}{r'^{1-\alpha}r^2}\right\}d\tau.$$

Cum putem considera în sfera σ pe $r' \leq r$, integrandul este sigur mai mic decât $8A : r'^{3-\alpha}$. In definitiv, putem scrie

$$\left|(D')_\sigma\right| < 8A\int_\sigma \frac{d\tau}{r'^{3-\alpha}} ,$$

cât ime, care tinde către zero când raza sferei σ tinde uniform către zero. Prin urmare D' este continuă ; ceea ce dovedeşte existenţa derivatelor de ordinul al doilea.

Insemnând cu Δ laplaceianul, avem, aşadar,

$$(6) \qquad (\Delta I)_\sigma = \int_\sigma \rho\left\{\frac{3(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{r'^5}-\frac{3}{r'^3}\right\}d\tau = 0 .$$

Din expresiile (4) şi (6), deducem, prin adunare,

$$(\Delta I)_{V-\sigma}+(\Delta I)_\sigma = \Delta I = -4\pi\rho(P') .$$

Aşadar, funcţia $\varphi(P) = I(P)$, reprezentată prin integrala $I(P)$, satisface ecuaţiei lui Poisson. Ea exprimă, după cum vom vedea, *potenţialul unei distribuţii continue de volum*, distribuţie, a cărei imagine fizică se găseşte realizată în natură prin massele gravifice, izvoare ale câmpului gravitaţional, — după cum se vede şi din consideraţiile de la începutul acestei părţi.

B. **Formule ajutătoare**

149. Aplicarea formulei lui Green. Fie două funcţii φ şi ψ uniforme, continue şi finite, admiţând derivate parţiale de primul ordin finite şi continue într'un domeniu regulat simplu-conex V şi derivate de ordinul al doilea continue în interior, şi finite în interior şi pe frontiera închisă, a domeniului, Σ. După § 117 putem scrie formula lui Green, fundamentală pentru desvoltările ce urmează :

$$(7) \qquad \int_V(\psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\psi)\,d\tau = \oint_\Sigma\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma ,$$

unde $\bar{n}$ este normala *exterioară* la suprafaţa închisă Σ, care mărgineşte domeniul V. Dacă există puncte sau regiuni de discontinuitate pentru φ sau ψ în V, sau pe Σ, le vom exclude din domeniul de integrare din (7) prin membrane izolante, care se includ în suprafaţa închisă Σ, de integrare.

Să admitem că putem alege convenabil o funcţie ajutătoare ψ satisfăcând condiţiilor enunţate; formula (7) ne dă posibilitatea să determinăm funcţia φ într'un punct oarecare $P(x,y,z)$ din spaţiu (aşezat în *interiorul* lui V, în *exteriorul* lui V, sau pe *frontiera* Σ), dacă se cunosc valorile lui φ pe Σ, precum şi valorile derivatelor secunde ale lui φ (resp. $\Delta\varphi$) în interior.

Vom distinge, deocamdată, două cazuri:

I. *Să alegem punctul curent* $P(x, y, z)$ **exterior** *domeniului* V. Fie $M(\xi, \eta, \zeta)$ un punct aparţinând domeniului considerat, astfel încât distanţa $\overline{MP} = r'$. Luăm drept funcţie ajutătoare $\psi = \frac{1}{r'}$, care, în condiţiile de faţă, nu prezintă nici o discontinuitate în V (căci P fiind exterior domeniului, r' nu se poate anula nici odată). Funcţia $1/r'$ satisface, evident, condiţiilor admise. Putem aplica formula (7), observând că $1/r'$ este funcţie armonică (§ 139), deci că $\Delta\, 1/r' \equiv 0$; avem

$$(8) \qquad \int_V \frac{d\tau}{r} \Delta\varphi = \oint_\Sigma \left\{ \frac{1}{r'} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} \right\} d\sigma \quad .$$

II. *Să presupunem punctul curent* $P(x, y, z)$ **interior** *domeniului* V. Funcţia $1/r'$ nu mai este continuă în toate punctele domeniului V, căci prezintă discontinuitatea

$$M(\xi, \eta, \zeta) = P(x, y, z).$$

In aceste condiţii, ca să putem aplica formula (7) trebue să alegem domeniul de integrare astfel încât punctul P, de discontinuitate, să fie eliminat. In acest scop, procedând după metoda expusă în Cap. II (A), înconjurăm discontinuitatea P cu o sferă σ de volum v şi de rază infinit mică, şi extindem integralele ce figurează în formula (7) asupra domeniului rămas $V - v$, care satisface condiţiilor admise pentru aplicarea formulei lui GREEN. Avem

$$(9)\qquad \int_{V-v} \frac{d\tau}{r'}\Delta\varphi = \oint_{\Sigma-\sigma} \left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r'}}{dn}\right)\partial\sigma .$$

După desvoltările de la punctul (*A*), cum $\Delta\varphi$ satisface condiţiilor de finitudine, prima integrală există şi are ca limită integrala extinsă asupra domeniului V când $v \to 0$.

Să considerăm integrala extinsă asupra suprafeţei sferei σ, de rază $R \to 0$. Avem, însemnând cu μ valoarea medie a lui $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ pe suprafaţa sferei σ, presupusă mărginită şi continuă,

$$\int_\sigma \frac{d\sigma}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mu\int_\sigma \frac{d\sigma}{R} = \frac{4\pi R^2}{R}\mu \to 0, \text{ când } R \to 0.$$

Apoi, însemnând cu φ_0 valoarea medie a lui φ pe suprafaţa sferei, valoare care tinde către valoarea lui φ în punctul P, putem scrie

$$\lim_{R\to 0}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\,d\sigma = \lim_{R\to 0}\varphi_0\int_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\,d\sigma .$$

Dar,

$$\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n} = -\frac{1}{R^2},$$

aşadar,

$$\lim_{R\to 0}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\,d\sigma = \varphi(P)\lim_{R\to 0}\int_\sigma -\frac{d\sigma}{R^2} = -4\pi\varphi(P).$$

Relaţia (7) devine, prin urmare, când punctul curent $P(x, y, z)$ este *interior* domeniului V,

$$(10)\qquad \int_V \frac{d\tau}{r'}\Delta\varphi = \int_\varepsilon \left\{\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\right\}d\sigma - 4\pi\varphi(P).$$

III. *Cazul când punctul* $P(x, y, z)$ *se află* **pe conturul** (Σ) (fig. 61). Ca să aplicăm relaţiunea (7) este nevoie deasemenea să eliminăm din domeniul de integrare punctul P, care devine punct de discontinuitate. Vom înconjura punctul P cu o sferă

de rază R, volum v şi suprafaţă (σ), şi aplicăm formula lui GREEN (7) domeniul $V-v'$ (unde v' este porţiunea din volumul v cuprinsă în domeniul de integrare iniţial V) mărginit la suprafaţa $\Sigma-\Sigma'$ şi σ' (Σ' fiind porţiunea din Σ cuprinsă în interiorul sferei din jurul lui P, iar σ' porţiunea din suprafaţa acestei sfere (σ), care mărgineşte volumul v). La limită $v \to 0$ şi integrala triplă din primul membru, extinsă asupra volumului v, tinde la zero; deci

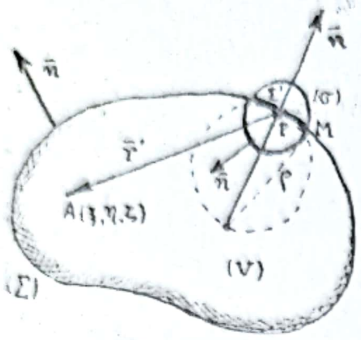


Fig. 61

$$\int_{(V-v')} \frac{d\tau}{r'} \Delta\varphi \longrightarrow \int_{(V)} \frac{d\tau}{r'} \Delta\varphi .$$

Presupunem că punctul P este un punct ordinar pe porţiunea Σ'.

Fie punctul M (ξ, η, ζ) de pe Σ' şi anume undeva pe intersecţia lui Σ cu (σ). Să vedem ce se întâmplă cu integralele din membru al doilea. $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n}$ are în apropierea lui P, valoarea $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} = \frac{1}{R^2} \cos(\bar{n}, \bar{R})$, socotind pe R în direcţia şi sensul $\overrightarrow{MP}$. Ducem sfera osculatoare în P şi fie ρ raza acestei sfere; atunci, cum R este raza sferei (σ) care exclude punctul P, din triunghiul dreptunghic PMP', avem $R = 2\rho \cdot \cos(\bar{n}, \bar{R})$. Înlocuind $\cos(\bar{n}, \bar{R})$ găsim $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2\rho \cdot R}$. Când $R \to 0$, ρ are o valoare finită, deci $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} \to \infty$ ca $\frac{1}{R}$ atunci când $R \to 0$. Deci, şi $\varphi \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} \to \infty$ ca $\frac{1}{R}$, deoarece φ este o funcţie finită şi continuă pe contur. Tot aşa şi $\frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \to \infty$ ca $\frac{1}{R}$, când $R \to 0$; deci, pe scurt, $\left\{ \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} \right\} \to \infty$ ca $\frac{1}{R}$ când $R \to 0$. Astfel, in-

tegrala $\int\limits_{(\Sigma')} \left\{ \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} \right\} d\sigma$ are proprietatea că, deşi integrandul tinde la ∞ ca $\frac{1}{R'}$, totuşi valoarea ei fiind $\frac{1}{R} \cdot \pi R^2$, ea tinde la zero ca R, deoarece (Σ') fiind suficient de mică se poate reduce la suprafaţa cercului mare $\pi . R^2$ determinat de secţiunea sferei (σ) cu planul tangent în P la (Σ').

In ceeace priveşte $\int\limits_{(\sigma)}$ vom repeta procedeul întrebuinţat în cazul când punctul P este interior, cu deosebire că acum (σ') este numai porţiunea sferei mici (σ) cuprinsă în interiorul domeniului. Ori, putem să ne închipuim că am luat Σ' suficient de mică, astfel încât să se confunde cu porţiunea planului tangent în P, care e un punct regulat pe Σ; acest plan împarte sfera exact în două jumătăţi; rezultă deci $\int\limits_{\sigma'} = -2\pi \varphi(P)$.

Avem aşadar, când punctul P este pe suprafaţa (Σ).

$$(11) \qquad \int\limits_{(V)} \frac{d\tau}{r'} \Delta\varphi = \oint\limits_{(\Sigma)} d\sigma \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} \right) - 2\pi \varphi(P).$$

150. Regiuni infinite. Funcţii regulate la infinit. Formulele lui Green se aplică pentru regiunile regulate, *mărginite*, pentru care suprafaţa frontieră Σ se găseşte la distanţă finită în câmp. In unele probleme, este nevoe să se introducă în consideraţiile analitice şi *regiunile infinite*, pe care le presupunem regulate. [1])

Fie S o sferă de rază R, care conţine frontiera Σ a unei regiuni infinite având domeniul V în interior. In interiorul regiunii V' cuprinsă între Σ şi S putem aplica formulele lui Green, respectiv, formula lui Gauss, unei funcţii $\bar{a}(P)$, care satisface condiţiilor de regularitate admise, de oarece, distanţele dintre două puncte ale domeniului V' nu pot tinde către infinit,

1). O regiune „infinită" se zice „regulată", dacă este o regiune mărginită de o suprafaţă regulată (deci, mărginită), care conţine toate punctele suficient de îndepărtate ale câmpului. Nu este vorba, aşa dar, de regiuni „fără margini".

iar domeniul respectiv a fost presupus regulat; avem,

$$\int_V \operatorname{div} \bar{a} \, . \, d\tau = \int_\Sigma \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma} + \int_S \bar{a} \, . \, d\bar{\sigma}$$

Pentru a extinde această formulă la întreaga regiune V, admitem că mărimile $R^2 a_x$, $R^2 a_y$, $R^2 a_z$ tind uniform către zero, în toate direcţiile, când R tinde către infinit, astfel încât integrala extinsă asupra suprafeţei S să tindă la zero când R tinde spre infinit.

In mod analog, în aplicarea formulei lui GREEN pentru regiunile infinite admitem că funcţiile φ şi ψ satisfac condiţiei că mărimile

$$R\varphi \; ; \; R^2 \operatorname{grad} \varphi \; ; \; R\psi \; ; \; R^2 \operatorname{grad} \psi \; ;$$

sunt câtimi mărginite pentru R oricât de mare. Funcţiile care satisfac condiţiilor preconizate mai sus se numesc *funcţii regulate la infinit.*

151. Rezumat al proprietăţilor generale ale funcţiilor armonice, într'un domeniu simplu-conex. Am numit *funcţie armonică,* de poziţie, o funcţie uniformă, continuă şi finită, care posedă derivate de ordinul întâi şi al doilea, finite şi continue, şi care satisface ecuaţiei lui LAPLACE $\Delta\varphi = 0$, în fiecare punct $P(x, y, z)$ al domeniului.

I. Dacă φ este o funcţie armonică, din relaţia lui GREEN

$$(12) \qquad \int_V \psi \, \Delta\varphi \, d\tau + \int_V (\operatorname{grad} \varphi \, . \, \operatorname{grad} \psi) \, d\tau = \oint_\Sigma \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma \; ,$$

punând $\psi = 1$, deducem

$$(12') \qquad \oint_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma = 0 \; ;$$

aşadar, „integrala derivatei normale a funcţiei armonice extinsă asupra conturului regulat al unui domeniu închis, este nulă".

Reciproca este adevărată. In adevăr, fie P un punct interior domeniului închis V şi σ o sferă de rază R în jurul lui P, conţinută în V. Avem, prin ipoteză

$$0 = \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_{o}^{\pi} \int_{o}^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

Cum $r = R$ este constant pe sferă, rezultă

$$\int_{o}^{\pi} \int_{o}^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 0 \ ,$$

Integrând această ecuaţie în raport cu r de la zero la R şi în raport cu φ şi ϑ, pe sfera de rază R, obţinem

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma} \varphi \, d\sigma \ . \tag{13}$$

După proprietăţile generale ale integralelor, această integrală există şi este continuă în P. Ea reprezintă *valoarea medie* a lui φ în vecinătatea punctului P.

Dar, din relaţia (10), aplicată sferei σ, deducem

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma} \varphi \, d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{S} \frac{d\tau}{r'} \Delta\varphi \ . \tag{14}$$

Comparând relaţiile (13) şi (14), rezultă

$$\Delta\varphi(P) = 0 \ ,$$

şi, prin aceasta, proprietatea enunţată se găseşte stabilită.

II. Punând $\psi = \varphi$ (ambele funcţii fiind armonice), în relaţia (12), rezultă

$$\int_{V} (\text{grad}\ \varphi)^2 d\tau = \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \ ;$$

ceeace ne permite să enunţăm proprietatea: „dacă φ este armonică în regiunea regulată şi închisă V şi dacă funcţia sau derivatele ei parţiale se anulează pe contur, atunci, funcţia este nulă în tot domeniul".

Consecinţă. „O funcţie armonică, diferenţiabilă continuu într'o regiune regulată, este *unic* determinată dacă se cunosc valorile ei pe frontiera domeniului considerat" (v. § 153).

III. *O funcţie armonică nu poate poseda, într'un domeniu dat, o valoare mai mare sau mai mică decât toate valorile învecinate.* Să considerăm o funcţie armonică uniformă şi finită, cu derivate de primul şi al doilea ordin continue şi finite, într'o regiune dată. Dacă ar exista în regiune o suprafaţă pe care funcţia φ să ia o valoare mai mare sau mai mică decât toate valorile vecine situate de o parte şi cealaltă a suprafeţei, atunci, putem să ducem o sferă σ de rază suficient de mică, având centrul într'un punct al suprafeţei, astfel încât, pe această sferă $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ să aibă un semn constant, exceptând cel mult, linia de intersecţie a sferei cu suprafaţa, pe care $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ poate să fie nulă. Dar atunci, $\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$, extinsă la suprafaţa sferei, va fi diferită de zero. Această concluzie este însă în contradicţie cu ecuaţia (12').

IV. *O funcţie armonică finită, cu derivate parţiale de primul şi al doilea ordin finite, într'un domeniu finit simplu-conex dat, nu posedă în acest domeniu nici maxime şi nici minime, repartizate pe suprafeţe, linii sau în puncte izolate.* Pentru a fixa ideile, presupunem că funcţia armonică φ ar poseda în punctul P un maxim. Să ducem o sferă σ de rază destul de mică R, cu centrul în P. Ştim că

$$\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0 \,. \tag{15}$$

Dacă φ ar poseda un maxim în P ar urma $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$ pe sfera σ, raza R fiind destul de mică. Dar această concluzie contrazice ecuaţia (15).

Rezultă, după teorema lui Dirichlet (v. *Mecanica*, p. 43), că poziţiile de echilibru, *în afara punctelor-izvoare*, nu pot să fie *stabile*.

V. *O funcţie armonică, uniformă şi finită, cu derivate de primul şi al doilea ordin finite şi continue, într'un domeniu mărginit, dacă ia valoarea zero pe frontiera domeniului, este nulă în tot domeniul.* In adevăr, dacă funcţia nu ar fi nulă în toate punctele domeniului, cum ea este finită în domeniu, vom putea să găsim o valoare a ei, nenulă, care să fie mai mare

(sau mai mică) de cât toate valorile vecine ale funcției considerate. Astfel de valori pot fi așezate în puncte izolate, formă linii sau suprsfețe în domeniu. Dar aceasta ar contrazice teorema stabilită precedent (IV). Deci, funcția trebue să fie nulă în tot domeniul.

Proprietatea este adevărată și pentru un domeniu infinit; dacă funcția ia valoare zero pe o suprafață închisă din domeniu, în condițiile precedent enunțate, și *dacă se anulează la infinit*, ea este nulă în tot domeniul.

Consecință : Dacă două funcții armonice φ_1 și φ_2 sunt finite, ele și derivatele lor de primul și al doilea ordin, într'un domeniu D, și dacă iau pe suprafața frontieră a acestui domeniu aceleași valori, ele sunt identice în tot domeniul. In adevăr, diferența $\varphi_1 - \varphi_2$ este o funcție armonică ce satisface condițiilor teoremei *V*; deci este nulă în tot domeniul. Așadar, $\varphi_1 = \varphi_2$.

VI. *O funcție armonică uniformă și finită, cu derivate parțiale de primul și al doilea ordin continue și finite, într'un domeniu mărginit sau nu, este o constantă.* Să considerăm o funcție armonică φ finită, ea și derivatele ei parțiale de primul și al doilea ordin, în tot spațiul. Această funcție să ia valori finite în toate punctele (x, y, z) ale spațiului; deci și în cazul când (x, y, z) se depărtează la infinit. O astfel de funcție $\varphi(x, y, z)$, dacă nu este peste tot constantă, posedă cu siguranță un maxim și un minim. In cazul extrem, maximul (minimul) poate să fie la infinit; dar atunci minimul (maximul) se va găsi undeva la distanță finită în domeniu. S'ar putea ca aceste puncte să fie izolate, sau să formeze linii sau suprafețe în domeniu. Concluzie, care contrazice teorema IV. Așadar, funcția este peste peste tot constantă.

Alte proprietăți, dacă vor fi necesare, vor fi stabilite în cele ce urmează, după nevoile demonstrațiilor.

C. Determinarea potențialului de volum

152. Formularea analitică a problemei. Să se determine o funcție $\varphi(P_{x,y,z})$ într'un domeniu simplu-conex, sub condițiile:

1. funcția φ și derivatele ei de primul ordin să fie unideterminate, continue și finite în interior și pe frontieră;

2. derivatele de ordinul al doilea ale lui φ să fie unide-terminate, continue şi finite în interior, iar pe frontieră să fie finite;

3. funcţia $\varphi(x, y, z)$ poate prezenta un număr finit de discontinuităţi în puncte izolate S_i $(i = 1, 2, \ldots N)$, interioare domeniului, astfel în cât funcţia

$$\Phi = \varphi - \frac{e_i}{s_i} \quad , \tag{16}$$

unde e_i = constant, iar s_i este distanţa între un punct de discontinuitate S_i (x_i, y_i, z_i) şi un punct oarecare, infinit vecin, al domeniului, să fie finită şi continuă în punctul S_i. Aceste puncte sunt sediul unor izvoare răspândite discret, de randament e_i, respectiv.

4. într'o regiune finită, din interiorul domeniului, ce nu cuprinde punctele S_i, să fie cunoscută o funcţie $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ finită şi continuă, care ia o valoare determinată în fiecare punct şi satisface condiţiei lui Hölder. Fiziceşte, această funcţie reprezintă o distribuţie continuă de izvoare în regiunea considerată din domeniu, în interiorul căreia să fie satisfăcută ecuaţia lui Poisson

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho(\xi\ \eta, \zeta) .$$

5. *Condiţiile pe frontieră.* Toate izvoarele să fie aşezate la distanţă finită; adică, să fie posibil a alege o sferă de rază R suficient de mare, conţinând în interior toată regiunea ocupată de izvoare, astfel încât în *exteriorul* sferei de rază R densitatea să fie nulă, $\rho = 0$, şi toţi $e_i = 0$. In această regiune exterioară, funcţia φ să satisfacă ecuaţiei lui Laplace

$$\Delta\varphi = 0 ,$$

şi *să fie regulată la infinit.*

153. Unicitatea soluţiei. Dacă φ_1 şi φ_2 ar fi două funcţii satisfăcând tuturor condiţiilor enunţate mai sus, funcţia $\chi = \varphi_1 - \varphi_2$ satisface aceloraşi condiţii, fiind însă lipsită de discontinuităţi. Formula lui Green aplicată funcţiei χ ne dă

$$\int_{\Sigma} \chi \frac{\partial\chi}{\partial n} d\sigma = \int_{V} \chi\, \Delta\chi\, d\tau + \int_{V} (\text{grad}\ \chi)^2\, d\tau ,$$

unde Σ este suprafaţa care închide tot domeniul fără discontinuităţi pentru χ şi pe care o putem extinde la infinit, căci

pretutindeni

$$\Delta\chi = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 \equiv 0 .$$

Funcţia χ fiind regulată la infinit, integrala din membrul întâi este nulă. Rezultă

$$\int_V (\text{grad}\ \chi)^2\, d\tau = 0 .$$

Cum integrandul este esenţial pozitiv, rezultă: grad $\chi = 0$; aşadar,

$$\text{grad}\ \varphi_1 = \text{grad}\ \varphi_2 ;$$

ceeace dovedeşte că soluţiile φ_1 şi φ_2 sunt identice, până la o constantă fără importanţă.

Problema care se pune este, în definitiv, determinarea unei funcţii armonice într'un domeniu dat, finită, având derivate parţiale de primul şi al doilea ordin finite în domeniu şi având pe frontieră valori date, anulându-se la infinit.

Corolar. Un câmp vectorial care în tot domeniul este continuu şi finit şi care este în acelaş timp fără vârtejuri ($\bar{a} = \text{grad}\ \varphi$, unde φ e uniformă) şi fără isvoare (div $\bar{a} = 0$), anulându-se la infinit, va fi nul în fiecare punct al domeniului considerat.

154. Principiul lui Dirichlet. Existenţa unei funcţii armonice, care satisface condiţiilor enunţate mai sus, a fost dovedită de Dirichlet prin aplicarea următorului principiu variaţional (vezi *Mecanica*, § 357): fie o funcţie $\varphi(x, y, z)$, armonică sau nu, finită, ea şi derivatele prime şi secunde, într'un domeniu V, şi luând valori date pe frontieră. Fie, pe de altă parte integrala

$$I = \int_V (\text{grad}\ \varphi)^2\, d\tau$$

Dirichlet enunţă principiul: „printre toate funcţiile φ, în număr finit, care satisfac condiţiilor de mai sus, există una singură care face face minimă integrala I". Rămâne de verificat că funcţia astfel găsită este armonică. Weierstrass a demonstrat că nu se poate afirma „a priori" existenţa unei funcţii, împlinind toate aceste condiţii; ci numai, existenţa unei limite inferioare a integralei I, limită de care se apropie oricât voim valorile acestei integrale, dacă alegem convenabil funcţia φ. Această limită nu este, însă, necesar atinsă efectiv pentru o determinare anumită a funcţiei φ. (v. Appell, *Mécanique*, III, p. 89).

Principiul lui DIRICHLET, sau cum i se mai spune, *prima problema de contur a teoriei potențialului* (v. KELLOGG) preconizează, așadar, posibilitatea determinării valorilor unei funcții, dacă există, armonică într'un domeniu închis, când se cunosc valorile ei, continue, pe contur.

O astfel de determinare este, evident, posibilă pornind de la formula (10), § 149:

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\sigma,$$

unde φ este funcție armonică în tot domeniul V mărginit de suprafața închisă Σ. Principiul enunțat preconizează posibilitatea determinării funcției φ în interior, dacă se cunosc *valorile ei pe contur* (ceea ce am exprimat și în § 152. Dar, în formula precedentă, ca și, de altfel, în formula (7), apar și *derivatele normale* ale lui φ în expresia integralei de suprafață din membrul al doilea. De aceia, este nevoe să eliminăm din formulă aceste derivate. In acest scop, să considerăm o funcție ψ, armonică în V, astfel încât $\frac{1}{r}+\psi$ să se anuleze pe contur. După proprietatea II, § 149, rezultă că putem scrie

$$0=-\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left\{\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}d\sigma.$$

Adunând formulele precedente, găsim

$$\varphi(P)=-\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}+\psi\right)d\sigma+\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}+\psi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma\quad;$$

formulă, în care derivatele normale ale funcției φ sunt, în realitate, eliminate, căci a doua integrală este identic nulă, după condiția ca funcția $\frac{1}{r}+\psi$ să fie nulă pe contur. Funcția, astfel aleasă'

$$G(P;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{r}+\psi(P;\xi,\eta,\zeta)$$

poartă numele de *funcția lui* GREEN, pentru domeniul V, în *polul* P. Cu ajutorul acestei funcții, problema de contur enun-

Scanned with OKEN Scanner

ţată se formulează prin relaţia

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma} \varphi(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}G(P;\,\xi,\eta,\zeta)\,d\sigma\ ,$$

integrarea şi diferenţierea efectuându-se prin raport cu variabilele ξ, η, ζ. Prin aceasta, dacă există funcţia lui GREEN G şi posedă derivate parţiale de primul ordin în V (cu excluderea punctului P) putem determina orice funcţie armonică $\varphi(P)$ cu ajutorul relaţiei de mai sus.

Pentru studiul desvoltat al proprietăţilor şi teoremelor de existenţă a funcţiei lui GREEN, ca şi conexiunea problemei de faţă cu teoria *ecuaţiilor integrale*, se pot consulta tratatele de Analiză matematică.

155. Expresia potenţialului de volum al unui sistem finit de izvoare, distribuite discret în punctele $S_i(x_i, y_i, z_i)$, şi a unui sistem de izvoare distribuit continuu şi definit prin funcţia de densitate $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, într'o regiune finită a domeniului.

Pentru determinarea funcţiei $\varphi(P)$ într'un punct oarecare $P(x, y, z)$ al domeniului simplu-conex V, pentru care funcţia φ satisface condiţiilor 1—5,—determinare care, după paragraful precedent, este unică,—ne folosim de formula (10). In acest scop, să considerăm o suprafaţă înconjurătoare Σ formată dintr'o suprafaţă Σ', pe care o putem transporta la infinit, şi din suprafeţele sferice σ_i, de rază $R \to 0$, ce înconjoră punctele S_i. Avem

$$(17)\qquad \int_{\Sigma} = \int_{\Sigma' \to \infty} - \sum \int_{\sigma_i} = -\sum_i \int_{\sigma_i}\ ,$$

întru cât funcţiile φ şi $\psi = \frac{1}{r'}$, unde r' este distanţa lui $P(x, y, z)$ la izvorul $S_i(x_i, y_i, z_i)$,—sunt nule la infinit. Să evaluăm integrala

$$\int d\sigma\left\{\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\right\} = -\int d\sigma\left\{\frac{1}{r'}\left(-\frac{e_i}{s_i}\right) - \frac{e_i}{s_i}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\right\}.$$

Cum, funcţia $\Phi = \varphi - \frac{e_i}{s_i}$ este regulată în toate punctele infinit vecine de pe sfera σ_i, care exclude izvorul S_i, avem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{e_i}{s_i^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n}\ ,$$

unde $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ este finită și continuă. Inlocuind în relația de mai sus, termenul care conține pe $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ va tinde către zero, când $\sigma_i \to 0$. Rămâne, așadar

$$(18) \qquad \int_{\sigma_i} \frac{d\sigma}{r'} \frac{e_i}{s_i^2} \to \frac{1}{r'} \frac{e_i}{s_i^2} \cdot 4\pi s_i^2 = 4\pi \frac{e_i}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} .$$

unde $\bar{r}$ și $\bar{r}_i$ sunt vectorii de poziție ai punctelor P și S_i.

$$(19) \qquad \int_{\sigma_i} \frac{e_i}{s_i} \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} d\sigma = -\frac{e_i}{s_i} \frac{1}{r'^2} \cdot 4\pi s_i^2 \to 0 \text{ cu } s_i \to 0 .$$

Pe de altă parte, luând pentru r' distanța lui P la un izvor (ξ, η, ζ), avem (1)

(20)

$$\int_V \frac{d\tau}{r'} \Delta\varphi = -4\pi \int_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r'} d\tau = -4\pi \int_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

Obținem, în definitiv, aplicând formula (10) și ținând seamă de formulele (17), (18), (19) și (20),

$$\varphi(P_{xyz}) = \int_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} = \varphi_{\text{cont.}} + \varphi_{\text{dis.}} ,$$

unde prima integrală de volum, pe care am notat-o cu $\varphi_{\text{cont.}}$, exprimă potențialul unei distribuții continue de volum; iar suma, pe care am votat-o cu $\varphi_{\text{dis.}}$, reprezintă potențialul unei distribuții discrete, de puncte izolate.

Potențialul φ_{dis} a fost construit, în capitolul precedent, pentru diferite modèle fizice ale distribuțiilor discrete.

Funcția potențială φ_{cont}, în care ρ satisface condițiilor necesare și suficiente enunțate în punctul (A), este identică inte-

(1) Observăm că avem, de fapt, *două* probleme distincte: una pentru discontinuitățile discrete S_i, pentru care $\Delta\varphi \equiv \Delta\Phi = 0$; și alta pentru discontinuitățile continue (ξ, η, ζ), pentru care nu mai există integralele de suprafață din membrul al doilea. Vectorul $\bar{r}'$ exprimă și într'un caz și în celălalt, separat, distanța punctului curent $P(x, y, z)$ la un punct izvor.

Scanned with OKEN Scanner

gralei studiate *I*. Ea este deci, armonică, derivabilă de două ori, cu derivate finite şi continua, — după cele stabiiite în (*A*).

156. Observaţie. (Eig. 62). Dacă potenţialul φ are undeva un maxim sau un minimum, atunci punctul respectiv reprezintă un izvor pozitiv sau negativ. Să înconjorăm acel punct cu o sferă de rază R, foarte mică. Atunci, pe sferă, $\frac{\partial \varphi}{\partial R}$ va fi mereu sau pozitivă sau negativă ; ceeace înseamnă că φ, în vecinătatea lui P este (luând sensul pozitiv al lui $\overline{R}$ *spre* centru); o funcţie de punct

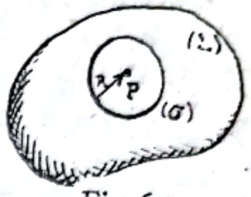


Fig. 62

1) descrescătoare, dacă $\frac{\partial \varphi}{\partial R} < 0$, deci φ minim în P.

2) creseătoare, dacă $\frac{\partial \varphi}{\partial R} > 0$, deci φ maxim în P.

Atunci $\int_{\text{Sfera mică}} \frac{\partial \varphi}{\partial R}\, d\sigma$ este $\begin{cases} \text{negativă în cazul (1)} \\ \text{pozitivă în cazul (2)} \end{cases} = +4\pi e,$

($\overline{R}$ = normala interioară), căci $\int \frac{\partial \varphi}{\partial R}\, d\sigma$ reprezintă fluxul prin suprafaţă, flux egal cu $+4\pi e$. In adevăr, am definit fluxul prin

$$4\pi e = \oint_{\sigma \text{ (normala exterioară)}} a_n\, d\sigma \quad ; \quad \text{dar } \bar{a} = -\operatorname{grad} \varphi$$

aşa dar,

$$-\int_{\sigma \text{ (norm. ext.)}} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = 4\pi e = +\int_{\sigma \text{ (norm. int.)}} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma ;$$

Prin urmare, în rezumat :

$\begin{cases} e \text{ negativ (izvor negativ în } P) \text{ când } \varphi \text{ este minim în } P. \\ e \text{ pozitiv (izvor pozitiv în } P) \text{ când } \varphi \text{ este maxim în } P. \end{cases}$

157. Fire şi membrane materiale. Imagina fizică a unei distribuţii continue este oferită de massele materiale, fiecare particulă materială fiind origina vectorului de câmp, vector reprezentativ al forţei atractive (în câmpul gravitaţional). Aceste masse pot să fie răspândite astfel încât să umple un volum fi-

nit sau — prin generalizare — ni le putem imagina rânduite continuu pe o curbă sau o suprafaţă regulată şi finită.

O *curbă materială* este, în realitate, un *fir* de secţiune circulară neglijabilă faţă de lungimea firului şi de lungime dată, finită sau nu. Densitatea distribuţiei $\lambda(s)$ este o funcţie continuă de parametrul s, care măsoară arcul de curbură. Numim funcţia $\lambda(s)$ *densitate liniară*.

Pentru o astfel de distribuţie, potenţialul produs de ea într'un punct oarecare din spaţiu, exterior curbei, aşezat la distanţa r de un punct al curbei, va fi dat de

$$\varphi_c = \int_C \frac{\lambda(s)}{r}\, ds\,.$$

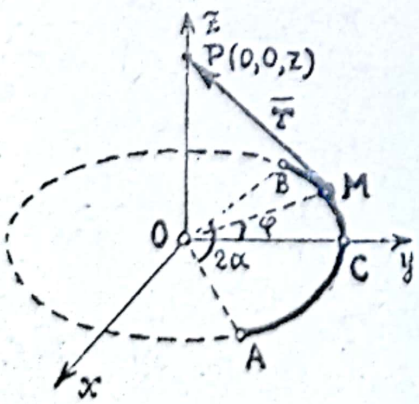
In mod analog, definim potenţialul pentru o suprafaţă regulată Σ, pe care *densitatea superficială* este $\omega(u, v)$, funcţie continuă pe suprafaţă. Astfel de suprafeţe materiale vor fi numite *membrane*. Dacă sunt *plane*, ele sunt realizate prin *discuri*.

Firele şi membranele materiale sunt sediul câmpurilor gravitaţionale de forţe atractive, care derivă diu gradientul potenţialului scalar $\varphi_{cont.}$ sau $\varphi_{discr.}$.

In cele ce urmează vom da câteva exemple de fire, suprafeţe şi volume materiale, pentru care vom calcula potenţialul şi, deci, câmpul respectiv, într'un punct dat din spaţiu.

D. Aplicaţii

158. Potenţialul şi atracţia unui arc de cerc, într'un punct exterior, aşezat pe perpeodiculara dusă prin centrul cercului, pe planul acestuia. (fig. 63). Este indicat să luăm planul cercului ca plan de x, y, şi centrul său O ca origină a axelor de coordonate; axa de x să treacă prin mijlocul C al arcului de cerc AB considerat. Fie R raza cercului şi 2α unghiul la centru subîntins de arc. Densitatea să fie constantă $\varkappa$ (distribuţie uniformă pe cerc.



(Fig. 63)

Coordonatele unui punct M de pe arc sunt

$$\xi = R\cos\varphi\,,\quad \eta = R\sin\varphi\,,\quad \zeta = 0\,;$$

coordonatele punctului curent P sunt

$$x=0\ ,\ y=0\ ,\ z\geqq 0\ .$$

Avem

$$\overline{MP}=r=\sqrt{R^2+z^2}\ ;\ ds=R\,d\varphi\ ,$$

unde unghiul φ variază de la $-\alpha$ până la $+\alpha$.

Rezultă

$$\varphi(z)=R\varkappa\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{2R\varkappa\alpha}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{m}{d}\ ,$$

unde m este massa totală a arcului de cerc şi $d=\overline{PM}$.

Aplicând formulele $(A)-III$, găsim componentele câmpului $\bar{J}$

$$J_x=R\varkappa\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\xi}{r^3}\,d\varphi=R^2\varkappa\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos\varphi}{d^3}d\varphi=\frac{2R^2\varkappa\sin\alpha}{d^3}\ ;$$

$$J_y=R^2\varkappa\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sin\varphi}{d^3}\,d\varphi=0\ ;$$

$$J_z=\frac{2\alpha R^2\varkappa z}{d^3}\ .$$

Aceste câtimi sunt componentele *forţei atractive* exercitată de fir asupra punctului P exterior planului arcului de cerc al firului.

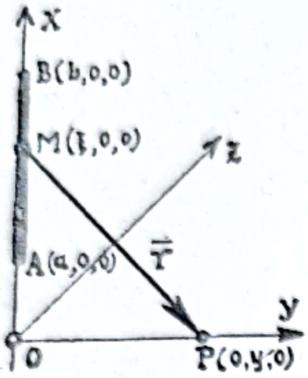
In punctul O (centrul cercului, $z=0$), avem potenţialul $\varphi(0)=\frac{m}{R}$, şi componentele câmpului

$$J_x(0)=\frac{2\varkappa\sin\alpha}{R}\ ;\ J_y=0\ ;\ J_z=0\ .$$

Observăm că $2R\sin\alpha$ este lungimea coardei subîntinsă de arc, iar $\varkappa.2R\sin\alpha$ este massa μ a acestei coarde, dacă este materială, de densitate $\varkappa$. Aşadar, $J_x(0)=\frac{\mu}{R^2}$ reprezintă atracţia

punctului C (centrul arcului), în care presupunem concentrată masa μ, asupra punctului O, centrul cercului firului material.

159. Potențialul și atracția unui segment de dreaptă omogen, asupra unui punct exterior dreptei. (fig. 64). Fie AB dreapta materială atractivă de densitate constantă $\varkappa$. Să calculăm potențialul și atracția într'un punct exterior P. Ducem perpendiculara din P pe AB în O și luăm acest punct ca origină a axelor de coordonate; fie a și b abscisele punctelor A și B.



(Fig. 64)

Punctul P are coordonatele $x=0$, $y>0$, $z=0$. Un punct M de pe dreaptă are coordonatele $\xi \neq 0$, $\eta=0$, $\zeta=0$. Apoi, $ds=d\xi$; $r=\sqrt{\xi^2+y^2}$.

In aceste condiții, potențialul în P este

$$\varphi(P)=\varkappa\int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+y^2}}=\varkappa\log\frac{b+\sqrt{y^2+b^2}}{a+\sqrt{y^2+a^2}} \quad .$$

Componentele atracției sunt

$$J_x=\varkappa\int_a^b \frac{\xi\,d\xi}{(\sqrt{\xi^2+y^2})^3} \; ; \; J_y=\varkappa y\int_a^b \frac{d\xi}{(\sqrt{\xi^2+y^2})^3} \; ; \; J_z=0 \; .$$

Efectuând integrările, se obține

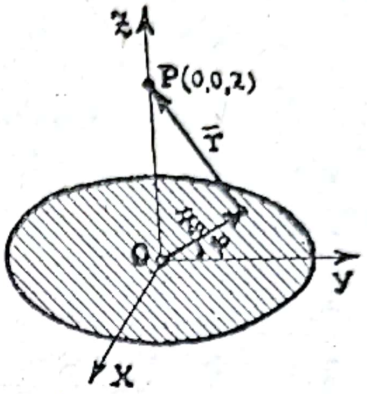
$$J_x=\varkappa\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{y^2+b^2}}\right) \; ; \; J_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \; ; \; J_z=0 \; .$$

Dacă punctul P s'ar afla chiar pe dreaptă, în punctul O $(y=0)$, atunci,

$$J_x(0)=\varkappa\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \; ; \; J_y(0)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 \; ; \; J_z(0)=0 \; .$$

160. Potențialul și atracția unei suprafețe circulare asupra unui punct exterior, așezat pe perpendiculara pe pla-

nul cercului, dusă prin centrul acestuia. (fig. 65). Este indicat să luăm planul cercului ca plan de x, y și centrul său ca origină a axelor de coordonate. Punctul $P\,(x=0\,,\ y=0\,,\ z\neq 0)$ să fie așezat pe axa de z. Punctul-izvor M de pe suprafața circulară să aibă coordonatele $\xi = r_0 \cos\varphi$; $\eta = r_0 \sin\varphi$; $\zeta = 0$; astfel încât $r = \sqrt{r_0^2 + z^2}$; elementul superficial este dat de $d\sigma = r_0\, dr_0\, d\varphi$.



(Fig. 65)

Potențialul datorit suprafeței circulare considerate, în P va fi așadar,

$$\varphi(P) = \varkappa \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r_0\, dr_0\, d\varphi}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} = 2\pi\varkappa\left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right),$$

unde R este raza cercului și $\rho = \varkappa$ este densitatea constantă.

Pentru forța atractivă se găsește

$$J_x = \varkappa \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r_0 \cos\varphi\, r_0\, dr_0\, d\varphi}{\left(\sqrt{r_0^2 + z^2}\right)^3} = 0\ ;$$

$$J_y = \varkappa \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r_0 \sin\varphi\, r_0\, dr_0\, d\varphi}{\left(\sqrt{r_0^2 + z^2}\right)^3} = 0\ ;$$

$$J_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2\pi\varkappa\left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right).$$

In expresiile lui $\varphi(P)$ și $J_z(P)$ cîtimea $\sqrt{z^2}$ trebue luată cu semnul plus când z este pozitiv și cu semnul minus când z este negativ. Așadar, putem scrie

$$\varphi_+(P) = 2\pi\varkappa\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right)\ ;\quad \varphi_-(P) = 2\pi\varkappa\left(\sqrt{R^2+z^2} + z\right)\ ;$$

și, pentru componentele atracției

$$J_{z(+)} = -2\pi\varkappa\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\ ;\quad J_{z(-)} = +2\pi\varkappa\left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right).$$

Când punctul P tinde către centrul cercului O, coordonata z tinde către zero, şi avem, în acest caz,

$$\underset{(+,-)}{\varphi}(P) = 2\pi\varkappa R = 2\frac{\pi\varkappa R^2}{R} = \frac{2\mu}{R} \quad ;$$

aşadar, potenţialul în O este dat de potenţialul unui punct de pe circonferinţă, în care se presupune concentrat dublul massei totale a cercului.

Apoi,

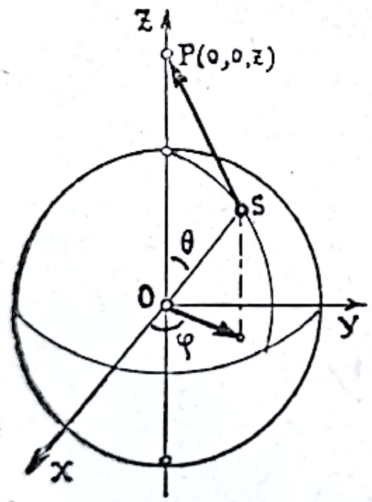
$$\lim_{z\to 0} J_{z(+)} = -2\pi\varkappa \quad ; \quad \lim_{z\to 0} J_{z(-)} = +2\pi\varkappa .$$

Se constată că J_z (componenta normală a forţei atractive) prezintă discontinuitatea

$$J_{z(-)} - J_{z(+)} = 4\pi\varkappa$$

când punctul P traversează, prin punctul O, pe direcţia normală, suprafaţa discului plan material.

Vom constata mai târziu (Cap. III, *Potenţialul de pătură simplă)* că acest fenomen este general, pentru distribuţiile superficiale de „pătură simplă".



(Fig. 66)

Să vedem ce se întâmplă când punctul P se găseşte de la început în centrul cercului O. In acest caz, după metoda generală de calcul, trebue să excludem acest punct din domeniul de integrare, printr'o curbă înconjorătoare, izolantă. Dar atunci, gradientul potenţialului $\varphi(P)$ ar avea numai componente în planul cercului; aşadar, $J_z = 0$, căci de la început, $z = 0$.

161. Suprafaţă sferică omogenă, de densitate $\rho = \varkappa$ (constantă. (fig. 66). Să calculăm, pentru o membrană sferică omogenă potenţialul şi atracţia într'un punct P, ales, pentru simplificare, pe porţiunea pozitivă a axei de z; origina sistemului de coordonate fiind în centrul sferei, a cărei rază să fie R. Coordonatele punctului P sunt $x = 0$, $y = 0$, $z > 0$; iar un punct oarecare M de pe suprafaţa sferei să aibă coordonatele

$\xi = R \sin\theta \cos\varphi$; $\eta = R \sin\theta \sin\varphi$; $\zeta = R \cos\theta$;

astfel încât

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta};$$

elementul superficiăl fiind, în acest caz, $d\sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$. Potenţialul P este, prin urmare,

$$\varphi(P) = R^2 \varkappa \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}} .$$

Integrala se efectuiază fără dificultate; avem

$$\varphi(P) = \frac{2\pi R\varkappa}{z} \left| \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta} \right|_0^{\pi} .$$

Vom distinge două cazuri:

a). $z > R$; punctul P este *exterior* sferei. Atunci, avem

$$\varphi(P) = \frac{2\pi R\varkappa}{z} \Big\{ (z + R) - (z - R) \Big\} = \frac{4\pi R^2 \varkappa}{z} = \frac{m}{z} .$$

m fiind massa totală.

Aşadar: 1. potenţialul unei suprafeţe sferice, într'un punct exterior, este acelaş cu potenţialul datorit massei totale concentrată în centrul sferei; 2. atracţia asupra punctului P este $J_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{m}{z^2}$; aşadar, egală cu atracţia massei totale concentrată în centru;

b). $z < R$; puntul P este *interior* sferei. In acest caz, avem

$$\varphi(P) = \frac{2\pi R\varkappa}{z} \Big\{ (z + R) - (R - z) \Big\} = 4\pi R\varkappa = \frac{m}{R} ;$$

potenţialul este aşadar, constant şi independent de poziţia punctului P în interiorul sferei. Putem enunţa teorema: „o suprafaţă sferică omogenă nu exercită nici o atracţie asupra puctelor interioare sferei".

Componentele forţei atractive, datorite unui câmp de gradient, se obţin prin calcul direct, precum urmează. Prin definiţie

$$J_x = \varkappa \int \frac{R \sin\theta \cos\varphi \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{(\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta})^3} ;$$

$$J_y = \varkappa \int \frac{R \sin\theta \sin\varphi \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{(\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta})^3} ;$$

$$J_z = \varkappa \int \frac{(R\cos\theta - z) \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{(\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta})^3} .$$

Prin integrare trebue să găsim rezultatul precedent, anume $J_x = 0$, $J_y = 0$ (căci x şi y nu figurează explicit în expresia lui $\varphi(P)$; iar $J_z = -\frac{m}{z^2}$ (pentru $z > R$) şi $J_z = 0$ (pentru $z < R$).

Verificarea se face imediat în ceeace priveşte exprezia lui φ. Pentru calculul lui J_z este comod să se ia drept variabilă independentă câtimea r în loc de θ, prin transformarea de variabile

$$\cos\theta = \frac{R^2 + z^2 - r^2}{2Rz} ,$$

deci,

$$\frac{Rz \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}} = dr .$$

Se obţine astfel

$$J_z = -\frac{2\pi R^2}{z^2} \left\{ \frac{R+z}{\sqrt{R^2+z^2+2Rz}} - \frac{R-z}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz}} \right\}$$

care, printr'un raţionament analog precedentului, conduce la aceleaşi concluzii.

162. Sfera plină omogenă *(volum)*, de rază R şi densitate constantă $\varkappa$, massa totală fiind $\frac{4\pi}{3} R^3 \varkappa$. Fie un punct curent $P(x, y, z)$ în care vrem să calculăm potenţialul produs de sferă. Fie O centrul sferei. a). Punctul P este *exterior* sferei; $\overline{OP} > R$. Descompunem volumul sferei în pături concentrice omogene infinit subţiri. Aplicăm rezultatul găsit în problema precedentă pentru fiecare pătură în parte şi adunăm rezultatele. Se obţine astfel

$$\varphi(P) = \frac{4\pi}{3} R^3 \varkappa \frac{1}{\overline{OP}} .$$

In cazul unei pături cuprinse între două sfere concentrice de raze R_1 şi R_2, omogene şi de aceiaşi densitate, avem

$$\varphi(P) = \frac{4\pi}{3} \varkappa \frac{R_2^3 - R_1^3}{\overline{OP}} .$$

Dacă punctul P este chiar pe suprafaţa sferei, $\overline{OP} = R$, deducem

$$\varphi_s(P) = \frac{4\pi}{3} \varkappa R^2.$$

b). Punctul P este *interior* sferei; $\overline{OP} < R$. Să descompunem volumul sferei în două domenii, printr'o sferă concentrică de rază $\overline{OP} = r$. Domeniul 1 interior sferei de rază r produce în P, după consideraţiile de la punctul (a), potenţialul

$$\varphi_1(P) = \frac{4\pi}{3} \varkappa r^2 .$$

Pentru a calcula potenţialul produs de domeniul 2, cuprins între sfera de rază r şi sfera de rază R, asupra punctului P, observăm că punctul P este interior sufrafeţei sferice concentrice de rază r_1; astfel încât $r \leqq r_1 \leqq R$. După problema IV, punctul (b), potenţialul unei astfel de suprafeţe sferice nu depinde de poziţia punctului P în interiorul sferei de rază r_1. Să-l luăm în O, centrul comun al acestor sfere, şi să considerăm un element de volum $r_1^2 \, dr_1 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$, cuprins între suprafaţa sferică de rază r_1 şi suprafaţa sferieă de rază $r_1 + dr_1$. Potenţialul în P va fi, pentru această pătură, $\frac{\varkappa r_1^2 \, dr_1 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{r_1}$.

Integrând pentru r_1 între r şi R, pentru θ între 0 şi π, şi pentru φ între 0 şi 2π, obţinem potenţialul unei pături sferice cuprinsă între sferele de raze r şi R, asupra punctului P, potenţial, care este contribuţia domeniului 2 asupra potenţialului total în P. Avem

$$\varphi_2(P) = 4\pi \varkappa \int_r^R r_1 \, dr_1 = 2\pi \varkappa (R^2 - r^2) .$$

Potenţialul total în P va fi, prin urmare,

$$\varphi(P) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \varkappa r^2 + 2\pi \varkappa (R^2 - r^2) ,$$

sau, în definitiv,

$$\varphi(P) = 2\pi\varkappa R^2 - \frac{2\pi}{3}\varkappa \overline{OP}^2 .$$

In centrul sferei pline omogene, $r = 0$, potenţialul este maxim

$$\varphi(0) = 2\pi\varkappa R^2 .$$

Componentele gradientului (atracţia sferei pline omogene asupra punctului P, *exterior* sferei) se obţin imediat

$$J_{xe} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa R^3 \frac{x}{\overline{OP}^3} \; ; \; J_{ye} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa R^3 \frac{y}{\overline{OP}^3} \; ;$$

$$J_{ze} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa R^3 \frac{z}{\overline{OP}^3} \; ;$$

iar pentru un punct *interior*,

$$J_{xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa x \; ; \; J_{yi} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa y \; ; \; J_z = -\frac{4\pi}{3}\varkappa z .$$

Din aceste consideraţii urmează proprietatea folosită la § 148, VI: pentru un punct interior, derivatele de ordinul al doilea ale potenţialului sunt constante şi egale cu

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa ;$$

potenţialul φ satisfăcând ecuaţiei lui Poisson $\Delta\varphi = -4\pi\varkappa$.

163. Elipsoid omogen plin. Să considerăm o massă materială, de densitate constantă $\varkappa$, care umple uniform elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 . \tag{21}$$

După § 110, ecuaţia

$$\chi(s) = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} = 0 , \tag{22}$$

când parametrul s variază de zero la infinitul pozitiv, exprimă un şir de elipsoizi, şi posedă o singură rădăcină pozitivă $s = u$. Această rădăcină este funcţie de x, y, z; ea se anulează când punctul x, y, z, ajunge pe suprafaţa elipsoidului (21) şi devine

infinită când punctul x, y, z se depărtează la infinit, într'o direcţie oarecare.

Facem notaţia

$$T(t) = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}. \tag{23}$$

Să considerăm funcţiile

$$\varphi_i(x, y, z) = \pi abc\varkappa \int_0^{+\infty} \frac{\chi(t)}{T(t)} dt;$$

$$\varphi_e(x, y, z) = \pi abc\varkappa \int_u^{+\infty} \frac{\chi(t)}{T(t)} dt;$$

care pot să fie scrise sub formele patratice omogene

$$\varphi_i(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D; \tag{24}$$

$$\varphi_e(x, y, z) = \alpha(u)x^2 + \beta(u)y^2 + \gamma(u)z^2 + \delta(u); \tag{25}$$

unde constantele din (24) sunt date de integralele definite

$$-A = \pi abc\varkappa \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t)T(t)}; \quad D = \pi abc\varkappa \int_0^{+\infty} \frac{dt}{T(t)}; \tag{26}$$

$-B$ şi $-C$ obţinându-se prin permutarea lui b cu a respectiv, a lui c cu a; iar,

$$-\alpha(u)\pi abc\varkappa = \int_u^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t)T(t)}; \quad \delta(u) = \pi abc\varkappa \int_u^{+\infty} \frac{dt}{T(t)}. \tag{27}$$

Să arătăm că funcţiile (24) şi (25) satisfac condiţiilor funcţiilor potenţiale şi că, deci, exprimă potenţialul massei elipsoidale omogene într'un punct interior (φ_i) şi într'un punct exterior (φ_e) elipsoidului. 1. Funcţiile (24) şi (25) sunt continue în x, y, z (valoarea lui x, y, z pe suprafaţa elipsoidului (21) corespunde rădăcinii $u = 0$, unde valorile lui φ_i şi φ_e se racordează; iar integralele ce figurează în expresiile coeficienţilor A, B, C, D; α, β, γ, δ, nu pot deveni discontinue pentru nici o valoare pozitivă a variabilei t).

2. Derivatele prime ale lui φ_i şi φ_e sunt continue în tot spaţiul. Să derivăm pe φ_e parţial în raport cu x. După regulile de derivare a integralelor, ţinând seamă că limita u este

funcţie de x, avem

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial x} = -2\pi abc\varkappa x \int_u^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t)\,T(t)} -$$

$$-\pi abc\varkappa \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right) \frac{1}{T(u)} \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Al doilea termen din membrul al doilea este nul, în virtutea faptului că u este rădăcină a ecuaţiei (22). Rămâne, aşadar,

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial x} = -2\pi abc\varkappa x \int_u^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t)\,T(t)} , \tag{28}$$

şi expresiile analoage pentru derivatele parţiale în raport cu y şi z.

De asemenea,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = -2\pi abc\varkappa x \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t)\,T(t)} . \tag{29}$$

Ori, după observaţiile la punctul 1, având in vedere valorile (26) şi (27), rezultă, în adevăr, că funcţiile (28) şi (29) sunt continue în tot spaţiul.

3. Funcţia φ_e satisface ecuaţiei lui LAPLACE, în fiecare punct *exterior* elipsoidului (21). In adevăr, să derivăm parţial, în raport cu x, expresia (28). Avem

$$\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} = 2\pi abc\varkappa \left\{ - \int_u^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t)\,T(t)} + \frac{x}{a^2+u} \frac{1}{T(u)} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} . \tag{30}$$

derivatele parţiale de ordinul al doilea în raport cu y şi z, obţinându-se din (30) prin permutări circulare. Efectuându-le şi adunându-le, construim laplaceianul; se obţine,

$$\Delta \varphi_e = 2\pi abc\varkappa \left\{ \int_u^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2+u} + \frac{1}{b^2+u} + \frac{1}{c^2+u}\right) \frac{dt}{T(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T(u)} \left(\frac{x}{a^2+u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} .$$

Ţinând seamă de valoarea (23), prima integrală se efec-

tuiază imediat. Ea este egală cu $2 : T(u)$. Aşadar,

$$\Delta \varphi_e = \frac{2\pi abc\varkappa}{T(u)} \left\{ \frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z} - 2 \right\} .$$

Dar, $T(t)$ fiind diferit de zero, paranteza din membrul al doilea este identic nulă, după cum se poate verifica prin calcul, precum urmează. In adevăr, să derivăm ecuaţia (22), succesiv, în raport cu x, y, z ; obţinem

$$\frac{2x}{a^2+u} - \left\{ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

$$\frac{2y}{b^2+u} - \left\{ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{2z}{c^2+u} - \left\{ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 .$$

Inmulţim relaţiile precedente, succesiv, cu

$$\frac{x}{a^2+u} , \frac{y}{b^2+u} , \frac{z}{c^2+u} ,$$

şi le adunăm ; se obţine fără dificultate

$$\Delta \varphi_e = 0 ;$$

ceeace stabileşte propoziţia enunţată : φ_e este funcţie armonică.

4. Funcţia φ_i satisface ecuaţiei lui Poisson, pentru toate punctele *interioare* elipsoidului (21). In adevăr, să derivăm parţial ecuaţia (29) în raport cu x ; avem

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = -2\pi abc\varkappa \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t)T(t)} ,$$

şi în mod analog, pentru derivatele parţiale în raport cu y şi z. Adunând aceste expresii, formăm laplaceianul, şi obţinem

$$\Delta \varphi_i = -2\pi abc\varkappa \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2+u} + \frac{1}{b^2+u} + \frac{1}{c^2+u} \right) \frac{dt}{T(t)} .$$

Integrala definită din membrul al doilea este egală cu $\frac{2}{abc}$. Aşadar,

$$\Delta \varphi_i = -4\pi\varkappa ,$$

relaţie, care exprimă proprietate enunţată : în interior potenţialul satisface ecuaţiei lui Poisson.

5. Funcţiile φ_i şi φ_e se anulează la infinit, căci u este infinită când punctul x, y, z, se duce la infinit.

Prin aceasta, am stabilit în adevăr, că expresiile φ_i şi φ_e, satisfăcând tuturor proprietăţilor potenţialelor, exprimă potenţialul massei omogene conţinută în elipsoidul dat, într'un punct interior, resp. exterior massei atractive.

164. Desvoltarea potenţialului de volum după funcţii sferice. In unele probleme de astronomie şi geodezie, pentru calculul efectului de atracţie a masselor închise într'un volum finit, asupra unui punct îndepărtat, este comod să se desvolte funcţia potenţială în sere de funcţii sferice, armonice.

Fie un punct curent $P(r', \theta', \chi')$ şi un punct atractiv $Q(r', \theta, \chi)$, unde vectorii de poziţie $\bar{r}'$ şi $\bar{r}$ sunt raportaţi la polul O. Fie $\bar{r} - \bar{r}' = \bar{R}$, distanţa PQ. In § 147, formula 120, am scris desvoltarea în serie de polinomi Legendre (pentru $r' < r$):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^i P_i(\mu) \quad ,$$

unde

$$\mu = \cos(\bar{r}', \bar{r}) = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\chi - \chi') \, .$$

Să derivăm expresia precedentă în raport cu $-r$ (normala interioară sferei S de rază r); obţinem

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{0}^{\infty} (i+1) \frac{r'^i}{r^{i+2}} P_i(\mu) \, .$$

Introducem această valoare în formula (10) § 149:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\sigma \, .$$

După § 146, admiţând că φ este o funcţie sferică armonică, putem scrie desvoltarea

$$\varphi = \Sigma r^m Y_m(\theta, \chi) \quad ; \quad \text{deci,} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\sum_m m r^{m-1} Y_m \, .$$

Inlocuind aceste desvoltări în expresia de mai sus a lui φ, avem

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_m \{r^m Y_m(\theta,\chi) \sum_i (i+1)\frac{r'^i}{r^{i+2}} P_i(\mu) +$$

$$+ m\, r^{m-2} Y_m \sum_i \frac{r'^i}{r^i} P_i(\mu)\} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\chi =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m,i} \{r^{m-i}(m+i+1)\, Y_m(\theta,\chi)\, P_i(\mu)\, r'^i\} \sin\theta\, d\theta\, d\chi\,.$$

Pe de altă parte, din cauza simetriei lui μ, r şi r', putem desvolta funcţia $\varphi(P)$ după puterile lui r' :

$$\varphi(P) = \sum r'^m Y_m(\theta', \chi').$$

Comparând aceste două seri obţinute pentru φ, cum ele trebue să reprezinte desvoltări după puterile lui $r' < r$, *identice*, trebue ca să fie egali coeficienţii aceloraşi puteri ale lui r'. Aşadar

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_m(\theta,\chi)\, P_i(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\chi = 0 \text{ , pentru } i \neq m \text{ ;}$$

$$Y_m(\theta',\chi') = \frac{m+i+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_m(\theta,\chi)\, P_i(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\chi \text{ ,}$$

pentru $i = m$.

Avem, deci,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_m(\theta,\chi)\, P_m(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\chi = \frac{4\pi}{2m+1} Y_m(\theta',\chi')\,.$$

Acestea fiind stabilite, observăm că, dacă este posibilă desvoltarea

$$f(\theta,\chi) = \sum Y_i(\theta,\chi),$$

atunci, prin înmulţirea ambilor membri cu $P_i(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\chi$ şi integrare pe suprafaţa sferei, şi dacă dispar toţi termenii, exceptând termenul de rang n, avem

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\chi)\, P_n(\mu) \sin\theta\, d\theta\, \chi = Y_n(\theta',\chi').$$

Scanned with OKEN Scanner

Sumând pe toţi n, obţinem desvoltarea în serie

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(\theta,\chi)\,P_n(\mu)\sin\theta\,d\theta\,d\chi,$$

care exprimă funcţia $f(\theta',\chi')$, dacă această serie este uniform convergentă. Demonstraţia acestei proprietăţi se găseşte în ori Tratat de analiză matematică (de ex. JORDAN, v. II).

Să aplicăm rezultatele de mai sus pentru cazul potenţialului de volum.

Fie x,y,z, cordonatele punctului atras (punct curent) P; $r^2=x^2+y^2+z^2$ şi ξ,η,ζ coordonatele punctului atrăgător Q din volumul V al massei atrăgătoare; fie $r'^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$; avem, însemnând cu ρ densitatea,

$$\varphi=\int_V \frac{\rho}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\,d\tau.$$

Desvoltarea funcţiei $1:|\bar{r}-\bar{r}'|$, după cele stabilite mai sus, ne conduce la expresia

$$\varphi=\int_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\tau+\int\frac{\rho r'}{r^2}P_1(\mu)\,d\tau+\int\frac{\rho r'^2}{r^3}P_2(\mu)\,d\tau+\ldots$$

serie integrabilă, fiind uniform convergentă.

$P_i(\mu)$ sunt polinomii lui LEGENDRE (v. § 142). Introducând funcţiile

$$Y_n=\int_V \rho\,r'^n P_n(\mu)\,d\tau,$$

avem

$$\varphi=\Sigma\frac{1}{r^{i+1}}Y_i;$$

integrala fiind extinsă asupra volumului V ocupat de corpul atractiv. Avem, prin definiţie, succesiv,

$\int_V \rho\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=m$; $\int\rho\xi\,d\tau=m\xi_G$; $\int\rho\eta\,d\tau=m\eta_G$; $\int\rho\zeta\,d\tau=m\zeta_G$;

$\int\rho\xi^2 d\tau=\frac{1}{2}(B+C-A)$; $\int\rho\eta^2 d\tau=\frac{1}{2}(C+A-B)$; $\int\rho\zeta^2 d\tau=\frac{1}{2}(A+B-C)$;

$\int\rho\,\eta\zeta\,d\tau=D$; $\int\rho\,\zeta\xi\,d\tau=E$; $\int\rho\,\xi\eta\,d\tau=F$;

unde m este massa totală a corpului material atractiv; ξ_G,η_G,ζ_G

coordonatele centrului de greutate al corpului şi A,B,C,D,E,F, momentele de inerţie şi momentele de deviaţie (v. *Mecanica*, cap. III) ale corpului material, în raport cu origina. Alegem, pentru simplificare, origina axelor în centrul de greutate şi direcţiile axelor de coordonate în direcţiile axelor principale ale elipsoidului de inerţie; atunci,

$$\xi_G = \eta_G = \zeta_G = 0 \quad ; \quad D = E = F = 0 .$$

In aceste condiţii, putem scrie

$$\varphi = \frac{m}{r} + \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\left\{(B+C-2A)\,x^2 + (C+A-2B)\,y^2 + (A+B-2C)\,z^2\right\} + \dots$$

In cazul unei sfere, şi pentru puncte foarte îndepărtate, primul termen este suficient pentru calculul potenţialului, precum am văzut în studiul potenţialelor distribuţiilor discrete. In cazul corpurilor *aproape sferice*, primul termen al desvoltării precedente este cel mai important, ceilalţi descrescând foarte repede; astfel încât, în anumite probleme este necesar să se considere şi termenul al doilea, sub forma unei *corecţii*, după cum vom vedea în aplicaţiile următoare.

165. Aplicaţie la Geodezie. Teorema lui Clairaut. In cercetările sale asupra formei pământului, Clairaut, [1]), a arătat că, pentru punctele de pe suprafaţa pământului, seria de funcţii sferice care reprezintă potenţialul φ, este convergentă şi că atracţia este exprimată cu o suficientă aproximaţie dacă se iau primii doi termeni ai desvoltării.

Introducem coordonatele cereşti: longitudinea φ şi latitudinea geometrică $\frac{\pi}{2} - \theta = \psi$. Avem

$$x = r\cos\psi\cos\varphi \quad ; \quad y = r\cos\psi\sin\varphi \quad ; \quad z = r\sin\psi .$$

Al doilea termen al desvoltării potenţialului, devine

$$\frac{1}{2r^3}\{(B+C-2A)\cos^2\psi\cos^2\varphi +$$

$$+ (C+A-2B)\cos^2\psi\sin^2\varphi + (A+B-2C)\sin^2\psi\},$$

1) *Théorie de la figure de la Terre*, Paris, 1743, compară A. G. Webster, *The Dynamicus of Particles*; 1925 (p. 400).

sau, prin transformări trigonometrice elementare,

$$\frac{1}{2r^3}\left\{(C-\frac{A+B}{2})(1-3\sin^2\psi)+\frac{3}{2}(B-A\cos^2\psi\cos^2\varphi\right\}=$$

$$=\frac{1}{r^3}Y^2(\psi,\varphi)\ .$$

Potențialul datorit *forței centrifuge* (v. Mecanica, § 134), este

$$f\,V_c=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\omega^2\,r^2\sin^2\theta\ ,$$

ω fiind viteza unghiulară de rotație diurnă a pământului și f constanta lui Gauss. Făcând substituția

$$\sin^2\theta=1-\mu^2=\frac{2}{3}\left\{1-P_2(\mu)\right\}\ ,$$

putem scrie

$$f\ V_c=\frac{1}{3}\omega^2\,r^2-\frac{1}{3}\omega^2\,r^2\,P_2(\mu)\ ,$$

expresie, care cuprinde termenul clasic (primul) și o funcție sferică, drept termen corectiv. In aceste condiții, potențialul total al gravității pământești se exprimă prin

$$\varphi=\frac{M}{r}\left\{1+\frac{k}{2r^2}(1-3\sin^2\psi)+\right.$$

$$\left.+\frac{3(B-A}{4\,M\,r^2}\cos^2\psi\,\cos2\varphi+\frac{\omega^2\,r^2}{2\,M\,f}\cos^2\varphi\right\}\ ,$$

unde am pus

$$k=(C-\frac{A+B}{2}):M\ .$$

Accelerația greutății este dată de (v. *Mecanica*, l. c).

$$g=-f\frac{\partial\varphi}{\partial n}\ ,$$

unde $\bar{n}$ este normala *interioară* la suprafața echipotențială.

Considerăm pământul ca un elipsoid foarte puțin diferit de o sferă, astfel încât raza vectorie a fiecărui punct de pe suprafața sa să difere foarte puțin de raza sferei corespunzătoare; unghiul dintre normală și raza vectoare în punctul considerat fiind, în această ipoteză, foarte mic, putem înlocui cosinusul

său prin unitate. In aceste condiţii, avem

$$g = -f\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{gM}{r^2}\left\{1+\frac{k}{2r^2}(1-3\sin^2\psi)+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{4}\frac{B-A}{Mr^2}\cos^2\psi\cos^2\varphi-\frac{\omega^2 r^2}{fM}\cos^2\psi\right\}.$$

Considerând elipsoidul de revoluţie în jurul axei mici (axa de z), putem pune $B=A$. Obţinem astfel

$$\varphi = \frac{M}{r}\left\{1+\frac{k}{2r^2}(1-3\sin^2\psi)+\frac{\omega^2 r^2}{2fM}\cos^2\psi\right\},$$

$$g = \frac{fM}{r^2}\left\{1+\frac{k}{2r^2}(1-3\sin^2\psi)-\frac{\omega^2 r^2}{fM}\cos^2\psi\right\},$$

Pentru o suprafaţă de nivel, cum este suprafaţa oceanului, avem $\varphi=\varphi_0$ (constant). Pentru o astfel de suprafaţă avem $M:\varphi_0=a$. Putem substitui, până la termeni de ordinul al doilea, în al doilea membru al relaţiilor precedente, pe r cu a. Găsim astfel, ecuaţia unei suprafeţe de nivel

$$r = a\left\{1+\frac{k}{2a^2}(1-3\sin^2\psi)+\frac{\omega^2 a^2}{2fM}\cos^2\psi\right\}.$$

Ducând această valoare în formula precedentă, se obţine, prin desvoltări în serii, cu neglijarea termenilor mici,

$$g = \frac{fM}{a^2}\left\{1-\frac{k}{a^2}(1-3\sin^2\psi)-\frac{\omega^2 a^2}{fM}\cos^2\psi\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{3k}{2a^2}(1-3\sin^3\psi)-\frac{\omega^2 a^2}{fM}\cos^2\psi\right\};$$

sau, încă,

$$g = \frac{fM}{a^2}\left\{1+\frac{k}{2a^2}-\frac{2\omega^2 a^3}{fM}+\left(\frac{2\omega^2 a^2}{fM}-\frac{3k}{2a^2}\right)\sin^2\psi\right\},$$

ceeace se mai poate scrie (v. *Mecanica*, § 134)

$$g = g_0(1+n\sin^2\psi),$$

unde

$$n = \frac{2\omega^2 a^2}{fM}-\frac{3k}{2a^2}.$$

Ecuaţia elipsoidului pământesc, scrisă mai sus, este ecuaţia unui elipsoid de revoluţie, ale cărui semi-axe sunt ($\psi = 0$; $\psi = \pi/2$)

$$r_{\text{ecuator}} = a\left(1 + \frac{k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2fM}\right) \; ; \; r_{\text{pol}} = a\left(1 - \frac{k}{a^2}\right) .$$

Turtirea este dată de

$$\varepsilon = \frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{3k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2fM} = \frac{5\omega^2 a^3}{2fM} - n = \frac{5}{2}c - n \; ,$$

unde $c = \omega^2 a^3 / fM$ este acceleraţia centrifugă la ecuator, iar n este diferenţa între greutatea la pol şi ecuator, raportată la greutatea la ecuator.

Relaţia precedentă exprimă *teorema lui* Clairaut :

$$\varepsilon + n = \frac{5}{2}c \; ,$$

adică,

$$\text{turtirea la nivelul mării} + \frac{\text{greutatea la pol} - \text{greutatea la ecuator}}{\text{greutatea la ecuator}} =$$

$$= \frac{5}{2} \frac{\text{acceleraţia centrifugă la ecuator}}{\text{greutatea la ecuator}} \; .$$

Viteza unghiulară (în timp sideral) este (v. *Mecanica*, p. 151)

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \sec^{-1} \; ;$$

raza pământului fiind (pentru elipsoidul Bessel) 6377397 metri. Astfel,

$$c = 1 : 288{,}41 \; .$$

Pe de altă parte, din măsurători geodezice (v. *Mecanica*, l. c.)

$$g = g_0 \left(+ 0{,}00531 \sin^2 \psi\right) ,$$

astfel încât rezultă

$$\varepsilon = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{288{,}41} - 0{,}00531 = 0{,}0033580 = \frac{1}{297{,}80} \; .$$

Helmert, într'o aproximaţie mai bună, găseşte $\varepsilon = 1/297$.

166. Aplicație la Astronomie. Potențialul forțelor care produc mareèle. Se știe din Astronomie că atracția exercitată de lună și soare (considerate drept corpuri materiale cu massa totală concentrată în centrul de greutate) asupra particolelor de apă ale oceanelor (ca și, de altfel, asupra tuturor punctelor de pe pământ) produc cunoscutul fenomen al mareèlor. Problema se tratează în Astronomie, pornindu-se de la potențialul forței astfel desvoltate. Ne propunem să scriem expresia acestui potențial.

Fie $\bar{\gamma}$ $(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ acceleraţia unui punct de pe pământ (ocean, mare). Această acceleraţie derivă din potenţialul

$$\bar{\gamma}\,\bar{r} = \gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z .$$

Fie m massa atractivă (soare, lună) şi D distanţa acestei masse (concentrată în centrul de greutate) la centrul pământului. Avem

$$\gamma = \frac{m}{D^2}.$$

Fie d distanţa massei atractive până la un punct de pe pământ P, şi Z unghiul zenital al acestui punct P. Avem, pentru potenţialul total

$$\varphi = \frac{m}{d} - \frac{mr}{D^2}\cos Z .$$

Desvoltăm, după metoda obicinuită, pe $1/d$ în serie de funcţii sferice P_i $(\cos Z)$, neglijând termenii prea mici; obţinem

$$\varphi = \frac{m}{D}\left\{1 + \frac{r}{D} P_1 (\cos Z) + \frac{r^2}{D^2} P_2 (\cos Z)\right\} - \frac{mr}{D^2}\cos Z ,$$

sau

$$\varphi = \frac{m}{D} + \frac{mr^2}{D^3} P_2 (\cos Z) .$$

Primul termen fiind acelaş pentru toate punctele pământului, rămâne, pentru marèe, potenţialul

$$\varphi_m = \frac{mr^2}{D^3} P_2 (\cos Z) = \frac{mr^2}{2D^3}(3\cos^2 Z - 1),$$

expresie, care pune în evidenţă faptul cunoscut că efectul datorit lunii este mai mare decât efectul datorit soarelui (căci D^3 se găseşte la numitor), cu toate că massa lunii este mult mai mică de cât massa soarelui.

Observaţie. In problema atracţiei pământeşti am considerat pământul sub forma şi constituţia unui *elipsoid omogen.* In realitate, măsurătorile geodezice dovedesc că forma reală a pământului este aceia a unui *homoid elipsoidal.*

Newton a demonstrat, prin consideraţii geometrice, că o pătură omogenă de materie cuprinsă între doi elipsoizi asemeni şi asemenea aşezaţi, nu exercită nici o acţiune gravifică asupra unui punct din interiorul cavităţii.

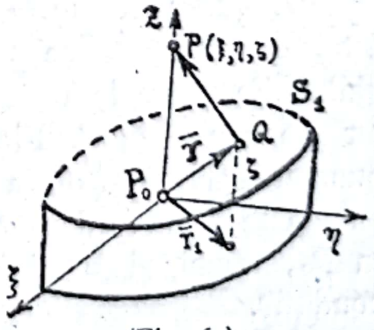
CAP. III

Potențialul de pătură simplă și pătură dublă

Am definit în paragraful 135 ce înțelegem printr'o distribuție superficială de „pătură dublă" și de „pătură simplă" : admitem că izvoarele, care, din punct de vedere matematic, reprezintă discontinuități pentru funcția potențială sau gradientul acestei funcții, sunt distribuite continuu pe o suprafață (în cazul atracției newtoniene, vorbim de o suprafață *materială).* Condițiile la care trebue să satisfacă această suprafață, ca și funcția de densitate superficială, le vom preciza în cele ce urmează. In acest scop, avem nevoe—ca și în cazul problemei potențialului de volum—să stabilim câteva proprietăți analitice premergătoare și câteva formule ajutătoare rezolvărei problemei ce ne propunem în acest capitol. [1])

A. Proprietăți analitice ajutătoare

167. Teoreme asupra suprafețelor. (fig. 67) Fie $z=F(x,y)$ ecuația unei suprafețe regulate, fără muchi, așezată într'un domeniu finit D. Admitem că ecuația precedentă posedă derivate parțiale de al doilea ordin continue, în D. Aceste derivate să fie funcții mărginite în domeniul dat.



(Fig. 67)

Fie P_0 un punct ordinar pe suprafața S care satisface condițiilor precedente. In problemele de teoria potențialului vom avea nevoe să studiem comportarea funcției potențiale sau a gradientului acestei funcții în vecinătatea punctului P_0.

[1]) Pentru desvoltări, vezi KELLOGG, *l. c.*; p. 157.

Alegem, în acest scop, un sistem de axe de coordonate având ca plan de (ξ, η) planul tangent în P_0 (luat ca origină) şi ca axă de ζ normala la suprafaţă în P_0.

Fie P un punct neaşezat pe suprafaţă, vecin lui P_0.

Teorema I. Fie S_1 o porţiune din suprafaţa S cuprinsă într'o sferă de rază R, foarte mică, cu centrul în P_0, şi fie $\zeta = f(\xi, \eta)$ ecuaţia lui S_1 raportată la sistemul de coordonate descris mai sus. Avem

$$|\zeta| \leqq \mu(\xi^2 + \eta^2) \quad , \tag{1}$$

unde μ este o margine superioară a valorilor absolute ale derivatelor parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f în P_0, cătimе independentă de poziţia punctului $P(\xi, \eta, \zeta)$. Pentru a stabili relaţia (1), desvoltăm funcţia f în serie Taylor în vecinătatea originii P_0, oprindu-ne la termenii patratici. Observăm că termenii liniari dispar din desvoltare, pentru că planul $\zeta = 0$ este tangent în P_0 la S_1.

Neglijând termenii de ordin superior celor patratici, rămâne

$$2\zeta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\right)_{P_0} \xi^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \eta}\right)_{P_0} \xi\eta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)_{P_0} \eta^2 .$$

Pe de altă parte, ţinând seamă de neegalitatea evidentă (câtimile a şi b fiind reale)

$$2\,|a\,b| \leqq a^2 + b^2 \quad ,$$

deducem

$$|\zeta| \leqq \frac{1}{2}\mu(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) \leqq \mu(\xi^2 + \eta^2) \quad .$$

Teorema II. Fie $\omega = \omega(\xi, \eta)$ o funcţie care ia o valoare determinată în fiecare punct al suprafeţei, este continuă şi mărginită. Ea reprezintă funcţia de densitate a distribuţiei isvoarelor pe suprafaţa S. Fie γ unghiul făcut de normala la S, în punctul $Q(\xi, \eta)$ şi de axa de ζ (normală la S în P_0). Putem enunţa teorema: „dacă ω satisface (uniform) condiţiei lui Hölder în P_0, atunci, şi funcţia $\omega : \cos\gamma$ satisface (uniform) aceleiaşi condiţii".

In adevăr, P_0 fiind un punct ordinar al suprafeţei, funcţia $1 : \cos\gamma$ este o funcţie care posedă o margine superioară A_0 într'o sferă de rază $R \ll 1$, cu centrul în P_0. Cum în P_0 unghiul $\gamma = 0$, avem

$$|1 : \cos\gamma - 1 : \cos 0| \leqq A_1 r \quad ,$$

unde A_1 este o constantă şi $r = P_0 Q$. Pe de altă parte, am admis că $\omega(Q)$ satisface condiţiei lui HÖLDER în P_0:

$$|\omega(Q) - \omega(P_0)| \leqq A_1 \alpha \, .$$

Rezultă

$$\left|\frac{\omega(Q)}{\cos\gamma} - \frac{\omega(P_0)}{\cos 0}\right| = \left|\frac{\omega(Q) - \omega(P_0)}{\cos\gamma}\right| + \omega(P_0)\left|\frac{1}{\cos\gamma} - \frac{1}{\cos 0}\right|$$

$$\leqq A_0 A_1 \alpha + M A_1 r \quad ,$$

unde $M = \max. |\omega(Q)|$.

Fie β cel mai mic număr dintre α şi 1. Cum $r \leqq 1$, rezultă $r^\beta \geqq r^\alpha$ şi $r^\beta \geqq r$: aşadar,

$$\left|\frac{\omega(Q)}{\cos\gamma} - \frac{\omega(P_0)}{\cos 0}\right| \leqq A_2 r^\beta \quad , \tag{2}$$

pentru $r \ll R$.

In cazul când ω satisface *uniform* condiţiei lui HÖLDER, atunci toate constantele care figurează în inegalitatea precedentă sunt independenta de poziţia lui P_0 pe suprafaţa S.

Dacă înlocuim distanţa $P_0 Q$ prin proiecţia ei r' pe planul ξ, η cum

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r'^2 + \zeta^2 \leqq r'^2(1 + \mu^2 r'^2) \leqq r'^2(1 + \mu^2 R^2) \quad ,$$

avem de înlocuit, în relaţia (2) constanta A_2 prin $A_2 (1 + \mu^2 R^2)^{\frac{\beta}{2}}$.

B. Expresiile potenţialelor de pătură simplă şi dublă

168. Potenţialul de pătură simplă şi de pătură dublă. (Fig. 68). Să ne închipuim că avem un sistem de izvoare distribuite pe anumite suprafeţe, care se prezintă în domeniul considerat (V), drept suprafeţe de discontinuitate pentru funcţiunea potenţială, discontinuitatea datorită acestui sistem de izvoare. Izvoarele să fie distribuite în mod continuu pe suprafaţa pe care o vom considera fără puncte singulare şi fără pânze infinite. Pentru a

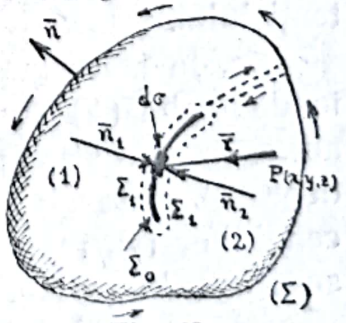


Fig. 68

găsi expresia funcţiei potenţiale, formulăm problema precum urmează.

Să determinăm o funcţie $\varphi(x,y,z)$, regulată în fiecare punct $P(x,y,z)$ al domeniului (V), dar care, pe o anumită suprafaţă (Σ_0) interioară domeniului (V) cu puncte ordinare (nesingulare) şi fără pânze infinite, să prezinte următoarele discontinuităţi:

1. Pe suprafaţa (Σ_0) să avem

$$1.\quad \varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\tau(\xi,\eta,\zeta)\ .$$

$$2.\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2} = 4\pi\omega(\xi,\eta,\zeta)\ .$$

La infinit, funcţia φ să tindă către zero ca $\frac{1}{R}$ când $R\to\infty$.

Considerăm suprafaţa Σ_0 ca având două feţe (1) şi (2); φ_1 este valoarea funcţiei φ pe acea faţă a suprafeţei (Σ_0), care corespunde regiunei (1) a domeniului (V), iar φ_2 este valoarea lui φ în punctele acelei feţe a suprafeţei (Σ_0), care corespunde regiunei (2) a lui (V). Regiunile (1) şi (2) se aleg în modul următor: considerăm pe (Σ_0) un element superficial $d\sigma$; ducem pe $d\sigma$ normale la (Σ_0) spre exteriorul domeniului (V), aşa dar îndreptate spre suprafaţa (Σ_0). Numim 2 regiunea în care $\bar{n}_2$ are acelaş sens cu raza vectorului $\bar{r}$ care uneşte $P(x,y,z)$ cu (ξ,η,ζ) pe $d\sigma$ şi 1 regiunea în care normala n_1 are sens contrar sensului vectorului $\bar{r}$. Câtimile (ξ,η,ζ) sunt coordonatele unui punct de pe elementul $d\sigma$ pe suprafaţa (Σ_0). $\tau(\xi,\eta,\zeta)$ şi $\omega(\xi,\eta,\zeta)$ sunt funcţii continui şi finite pe suprafaţa (Σ_0) şi nule în afara lui (Σ_0). In a doua condiţie de discontinuitate, $\frac{\partial}{\partial n_1}$ şi $\frac{\partial}{\partial n_2}$ sunt derivatele în sensul convenit, deci variaţia normală a gradientului potenţialului.

2. In afara suprafeţei (Σ_0), ori unde s'ar găsi punctul P în domeniul (V), funcţia φ trebuie să satisfacă condiţiei $\Delta\varphi = 0$, adică să nu existe alte izvoare distribuite continuu (decât cele depe Σ_0). Cele două feluri de discontinuităţi corespunzătoare condiţiilor (1), respectiv (2), pe (Σ_0), depind de modul în care sunt distribuite isvoarele (în imaginea hidrodinamică).

Acestea fiind spuse, să considerăm formula lui GREEN pusă sub forma (10), Cap. II:

$$\int_{(V)} \frac{d\tau}{r} \Delta\varphi = \oint_{(S)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma - 4\pi\varphi(P)$$

într'un domeniu (V), *fără discontinuităţi* pentru φ, închis de suprafaţa totală (S).

Alegem acest domeniu astfel: înconjurăm suprafaţa (Σ_0) cu o suprafaţă infinit vecină lui (Σ_0) compusă din două feţe (Σ_1) şi (Σ_2); integrala din membrul al doilea se extinde asupra unei suprafeţe (S), formată din suprafeţele Σ, care închide domeniul iniţial (V) şi suprafeţele (Σ_1) şi (Σ_2), excluzând discontinuitatea (Σ_0). Suprafaţa (S) izolează, deci, un volum (V) fără discontinuităţi.

Facem următoarea observaţie. Când avem de calculat derivata $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$, o vom lua în direcţia $\bar{n}_2$, adică în sensul razei vectorii $\bar{r}$; deci

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} \quad ;$$

ori, termenul al doilea poate fi scris sub forma

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} = -(\bar{n} . \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}) = +(\bar{n} . \operatorname{grad}_S \frac{1}{r}) ,$$

după cum vom calcula gradientul, faţă de punctul curent $P(x,y,z)$, sau faţă de punctul izvor (ξ,η,ζ).

Atunci, formula lui GREEN (10) ne dă

$$(3) \qquad 4\pi\varphi(P) = \oint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma} d\sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} - \int_{(V)} \frac{d\tau}{r} \Delta\varphi \ .$$

Integrala de volum din membrul al doilea este nulă, căci în volumul (V) considerat, din care s'a exclus suprafaţa (Σ_0), avem $\Delta\varphi = 0$, conform condiţiei (2). Deasemeni, integrala de suprafaţă extinsă la (Σ) este nulă, dacă alegem suprafaţa (Σ) destul de depărtată, spre a o putea considera dusă la infinit, unde condiţiile de frontieră ale lui φ anulează integrala.

Scanned with OKEN Scanner

Rămâne în (3)

$$4\pi\varphi(P) = \int_{\Sigma_1} d\sigma \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} - \varphi_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn_1} \right\} + \int_{\Sigma_2} d\sigma \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2} - \varphi^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn_2} \right\},$$

sau, făcând atât pe (Σ_1) cât şi pe (Σ_2) să tindă către suprafaţa de discontinuitate (Σ_o), avem, la limită, după ce am grupat convenabil termenii,

$$4\pi\varphi(P) = \int_{\Sigma_o} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}\right) d\sigma + \int_{\Sigma_o} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}(\varphi_1 - \varphi_2)\, d\sigma \quad ,$$

$\overline{n}$ fiind normala pozitivă pe elementul $d\sigma$ de pe (Σ_o). Introducând condiţiile iniţiale, vom avea (simplificând cu 4π)

$$\varphi(P) = \int_{\Sigma_o} \frac{\omega(\xi,\eta,\zeta)}{r} d\sigma + \int_{\Sigma_o} \tau(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

($\overline{n}$ este normala la (Σ_o) îndreptată *spre* suprafaţă).

Această relaţie se mai poate scrie

$$(4) \qquad \varphi(P) = \int_{\Sigma_o} \frac{\omega(\xi,\eta,\zeta)}{r} d\sigma + \int_{\Sigma_o} \tau(\xi,\eta,\zeta) \left(\overline{n} \,.\, \mathrm{grad}_s \frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Aşa dar, vom cunoaşte valoarea potenţialului în fiecare punct $P(x, y, z)$ din domeniul (V), dacă ni se dă valoarea funcţiilor continue $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ şi $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ pe suprafaţa de discontinuitate. Funcţia $\varphi(P)$ căutată şi care reprezintă în fiecare punct (x, y, z) al unui volum (V) dat, potenţialul datorit unor izvoare de pe (Σ_o)—sub condiţiunile de discontinuitate scrise mai sus—se compune din două funcţiuni potenţiale; prima din ele corespunde condiţiei (2), iar a doua, condiţiunei (1). Prima reprezintă ceeace se numeşte un *„potenţial de pătură simplă"*; a doua este *„potenţialul de pătură dublă"*. Deci, discontinuitatea potenţialului însuşi corespunde la existenţa unei pături duble, iar discontinuitatea gradientului φ pe direcţia normală la suprafaţa de discontinuitate corespunzătoare existenţei potenţialului de pătura simplă. $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ este o funcţiune finită şi continuă pe (Σ_o); ea ne arată care este densitatea distribuţiei con-

tinue de izvoare pe suprafaţa (Σ_0); $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ din expresia potenţialului de pătură dublă se numeşte *„momentul"* păturei duble, iar distribuţia are în acest caz caracterul unei distribuţii de dipoli pe suprafaţa (Σ_0). Aceasta reese din forma potenţialului unul dipol, care am văzut că este $\varphi(P) = (\bar{m} \cdot \text{grad}\, \frac{1}{r})$, unde $\bar{m} = e \cdot \bar{p}$ este momentul dipolului ($\bar{p}$ = distanţa celor două izvoare care formează dipolul şi e este densitatea fiecărei din ele, în valoare absolută). Suprafaţa (Σ_0), pe care avem o distribuţie de pătură dublă, are aspectul a două suprafeţe foarte apropiate, având fiecare o distribuţie simplă de izvoare; sau, are aspectul unei suprafeţe având pe o faţă o distribuţie simplă de densitate $+\omega(\xi, \eta, \zeta)$, iar pe cealaltă faţă o distribuţie simplă de densitate $-\omega(\xi, \eta, \zeta)$; ea este asemănătoare unei suprafeţe alcătuită din dipoli, aşezaţi normal pe suprafaţă.

Se poate demonstra şi *teorema reciprocă*, arătând că funcţiile (4) există şi satisface tuturor condiţiunilor impuse la început. Demonstraţia acestei teoreme se găseşte în diferite tratate de analiză. Vom adopta demonstraţia care urmează (v. KELLOGG, l. c., p. 160).

C. Proprietăţile funcţiei potenţiale a păturii simple.

169. Potenţialul de pătură simplă (formula (4))

$$(5) \qquad \varphi = \int_{\Sigma} \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma,$$

se poate scrie

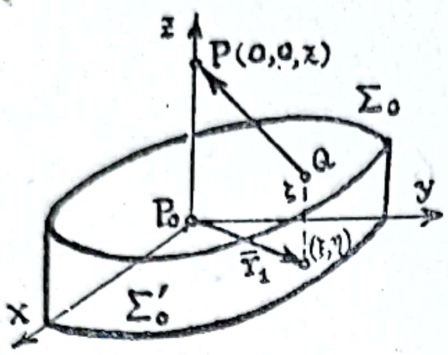
$$(5') \qquad \varphi(x, y, z,) = \int_{\Sigma'} \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)}{\cos \gamma} \cdot \frac{d\sigma'}{r},$$

dacă $d\sigma' = d\sigma \cdot \cos \gamma$ reprezintă proiecţia pe planul tangent (plan de ξ, ζ) în punctul P_0 (origina axelor de coordonate) a elementului superficial $d\sigma$ de Σ, ce înconjoră punctul P_0, iar r este distanţa dintre un punct $Q(\xi, \eta, \zeta)$, variabil pe suprafaţa Σ, şi punctul curent dat $P(x, y, z)$ V.

Observăm, mai întâi, că, după teoremele demonstrate la cap. II (A), rezultă că integrala (5) este convergentă (există) în tot domeniul. Printr'un raţionament identic celui folosit în cazul potenţialului de volum, se demonstrează că funcţia $\varphi(x, y, z)$

este continuă în tot domeniul V și în punctele de pe suprafața Σ.

Derivatele tangențiale. In jurul punctului P_0 de pe suprafața de discontinuitate Σ, ducem o sferă de rază R și considerăm porțiunea de suprafață Σ_0 cuprinsă în această sferă. Ecuația acestei porțiuni de suprafață fie $\zeta = f(\xi, \eta)$, raportată la planul tangent în P_0 (plan ξ, η) și normala (ζ). Să considerăm două direcții ortogonale x și y paralele cu planul tangent. Fie P un punct de pe axa de z, (perpendiculara pe planul x, y, formând un triedru drept). Pentru $z \neq 0$, avem după (5) și (5'),



(Fig. 69)

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_{\Sigma_0} \omega \frac{\xi}{r^3} d\sigma = \int_{\Sigma'_0} \frac{\omega}{\cos \gamma} \frac{\xi}{r^3} d\sigma' ,$$

unde Σ'_0 este proiecția porțiunii Σ_0 pe planul tangent. Avem, evident,

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2 = r'^2 + (\zeta - z)^2 .$$

Ne punem întrebarea: care este limita expresiei (6) când z tinde către zero?.

Presupunem că ω satisface condiției lui *Hölder*. Să punem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = I + J; \text{ unde } I = \int_{\sigma'} \frac{\omega}{\cos \gamma} \frac{\xi}{r^3} d\sigma ; J = \int_{\Sigma'_0 - \sigma'} \frac{\omega}{\cos \gamma} \frac{\xi}{r^3} d\sigma' ;$$

unde σ' este un cerc în planul x, y, cu centrul în P_0. Pentru un σ' dat integrala J este funcție continuă de z: pentru un număr pozitiv, foarte mic, ε, putem găsi un număr pozitiv, foarte mic, δ, astfel încât pentru $0 < |z_1| < \delta$ și $0 < |z_2| < \delta$ să avem

$$|J(z_1) - J(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Prin urmare, dacă putem alege cercul σ' astfel încât $|I| < \frac{\varepsilon}{3}$, independent de z, rezultă

$$\left| \left(\frac{\delta \varphi}{\delta x} \right)_{z_1} - \left(\frac{\delta \varphi}{\delta x} \right)_{z_2} \right| < \varepsilon .$$

deci, limita integralei (6) există, pentru $z \to 0$.

Rămâne să mai arătăm că, în adevăr. putem lua σ' aşa ca $|I| < \frac{\varepsilon}{3}$, sau ca I să tindă la zero cu σ'. In acest scop, descompunem pe I în

$$I_1 = \omega(P_0)\int_{\sigma'} \frac{\xi}{r^3}\,d\sigma' \text{ şi } I_2 = \int_{\sigma'} \left\{\frac{\omega(Q)}{\cos\gamma} - \omega(P_0)\right\}\frac{\xi}{r^3}\,d\sigma' \quad .$$

Fie $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + z^2 = r'^2 + z^2$. Considerăm integrala

$$\omega(P_0)\int_{\sigma'} \frac{\xi}{\rho^3}\,d\sigma',$$

care are valoarea zero, căci integrandul are valori egale şi de semne contrare pentru valorile (ξ, η) şi $(-\xi, \eta)$. Deci, putem pune

$$I_1 = \omega(P_0)\int_{\sigma'} \xi\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)d\sigma' = \omega(P_0)\int_{\sigma'} \frac{\xi(2z-\delta)}{r\rho(r+\rho)}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right\}d\sigma'.$$

Dar, cum, $|\xi| \leqq r'$; $|\delta| \leqq \mu r'^2$; $|2z-\zeta| \leqq r+\rho$ şi $r \geqq r'$, $\rho \geqq r'$, avem

$$|I_1| \leqq 3 \max|\omega| \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{r'}$$

Insă după proprietatea VI § 148, această integrală tinde la zero cu σ'.

Pentru I_2, putem scrie, după teorema stabilită la punctul (A),

$$|I^2| \leqq A\int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{r'^2 - \alpha} \ ,$$

integrală, care tinde către zero odată cu cercul σ'.

Acestea fiind stabilitc, putem enunţa teorema: „dacă densitatea superficială ω satisface condiţiei lui *Hölder* într'un punct P, derivatele tangenţiale ale potenţialului φ în P tind continuu către o limită, când P tinde către P_0, dealungul normalei la suprafaţă în P_0. Dacă însă condiţia lui *Hölder* este satisfăcută unform, continuitatea este uniformă".

Derivata normală. Luăm aceleaşi axe de coordonate ca şi în cazul precedent. Pentru $z \neq 0$, avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_{\Sigma_0} \omega \frac{\delta - z}{r^3} d\sigma = \int_{\Sigma'_0} \frac{\omega}{\cos\gamma} \frac{\delta - z}{r^3} d\sigma' . \tag{7}$$

Integrala

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = -\int_{\Sigma'_0} \frac{\omega}{\cos\gamma} \frac{z}{\rho^3} d\sigma', \tag{8}$$

unde $\rho^2 = \xi^2 \eta^2 + \zeta^2$ reprezintă derivata normală a potenţialului φ' a discului plan care ocupă aria Σ'_0 determinată de proiecţia lui Σ_0 pe planul tangent în P'_0, densitatea fiind $\omega : \cos\gamma$.

Scriem expresia (8) sub forma : $\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = I_1 + I_2$, unde

$$I_1 = -\int_{\sigma'} \frac{\omega}{\cos\gamma} \frac{z}{\rho^3} d\sigma' \; ; \; I_2 = \int_{\Sigma'_0 - \sigma'} \frac{\omega}{\cos\gamma} \frac{z}{\rho^3} d\sigma' ;$$

σ' fiind un cerc în planul $z = 0$, cu centrul în origina axelor. Este clar că I_2 este continuu în variabila z, pentru un σ' dat, şi anume, uniform, în P_0, anulându-se pentru $z = 0$. Apoi,

$$I_1 = -\int_{\Omega} \frac{\omega}{\cos\gamma} d\Omega = -\frac{\sim}{\frac{\omega}{\cos\gamma}} \Omega ,$$

unde Ω este unghiul solid în $P\,(0, 0, z)$ subîntins de suprafaţa cercului σ', luat cu semnul plus spre direcţia pozitivă $z > 0$ a axei de z şi cu semnul minus pentru $z < 0$. Semnul $\sim$ notează, ca de obicei, valoarea medie a câtimii respective, asupra căreia este extins. Cum, Ω la limită, are valoarea $\pm 2\pi$ pentru $z = 0$, putem găsi un $\delta > 0$ astfel încât, pentru un $\varepsilon > 0$, dat sub condiţia

$$| \omega(Q) : \cos\gamma - \omega(P_0) | < \varepsilon : 6\pi ,$$

să avem, pentru $0 < z < \delta$,

$$| \Omega - 2\pi | < \frac{\varepsilon}{3 \max. | \omega(Q) : \cos\gamma |}$$

In aceste condiţii,

$$| I_1 + 2\pi \omega(P_0) | = | \frac{\sim}{\frac{\omega}{\cos\gamma}} \Omega - 2\pi \omega(P_0) |$$

$$= \frac{\sim}{\frac{\omega(Q)}{\cos\gamma}} (\Omega - 2\pi) + 2\pi \left\{ \frac{\sim}{\frac{\omega(Q)}{\cos\gamma}} - \omega(P_0) \right\} < \frac{2}{3} \omega .$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru I_2 alegem pe $|z|$ astfel încât $|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$. In definitiv, avem

$$\left| \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + 2\pi\, \omega\, (P_0) \right| < \varepsilon.$$

Prin urmare, $\frac{\partial \varphi'}{\partial z}$ tinde spre $\mp 2\pi\, \omega\, (P_0)$ când punctul P (de pe axa de z) tinde spre P_0 pe direcţia pozitivă (negativă) a axei de z.

Fie, acum, diferenţa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \int_{\Sigma'_0} \frac{\omega}{\cos \gamma} \left\{ \frac{\xi - z}{r^3} + \frac{z}{\rho^3} \right\} d\sigma' =$$

$$= \int_{\Sigma'_0} \frac{\omega}{\cos \gamma} \left\{ \frac{\zeta}{r^3} - z \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3} \right) \right\} d\sigma'.$$

Această integrală este continuă în $z = 0$. Descompusă în două, integrala pe cercul σ' ăe anulează uniform în P. Pentru $z = 0$, integrala precedentă devine

$$\int_{\Sigma'_0} \frac{\omega}{\cos \gamma} \frac{\zeta}{r^3}\, d\sigma' = \int_{\Sigma_0} \omega \frac{\zeta}{r^3}\, d\sigma = \int_{\Sigma_0} \omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

care este convergentă, căci $\left| \frac{\zeta}{r^3} \right| \leq \frac{\mu}{r'}$. Rezultă,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_+ + 2\pi\, \omega\, (P_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_- - 2\pi\, \omega\, (P_0) = \int_{\Sigma_0} \omega\, (\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma',$$

unde am însemnat cu n direcţia normalei în P_0 la suprafaţa Σ_0. Putem astfel, enunţa teorema: „dacă densitatea superficială $\omega\, (\xi, \eta, \zeta)$ este continuă într'un punct P_0 al suprafeţei de discontinuitate, derivata normală a potenţialului $\varphi\, (P)$ tinde uniform către valoarea ei în P_0, când P tinde către P_0". Limitele acestor valori sunt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_+} = -2\pi\, \omega\, (P_0) + \int_{\Sigma_0} \omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma,$$

(9)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_-} = +2\pi\, \omega\, (P_0) + \int_{\Sigma_0} \omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma.$$

Prin scădere, obţinem

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_- = -4\pi\,\omega\,(P_0)\,, \tag{10}$$

formulă, care justifică condiţia (2) de la § 168, unde am dedus expresia potenţialului de pătură simplă sub forma (5).

D. Proprietăţile funcţiei potenţiale de pătură dublă

170. Potenţialul de pătură dublă este dat, după § 168, de integrala

$$\varphi = -\int_{\Sigma_0} \tau\,(\xi, \eta, \zeta)\,(\overline{n}\,.\,\operatorname{grad}\frac{1}{r})\,d\sigma\,,$$

ceeace se mai poate scrie

$$\varphi = \int_{\Sigma_0} \tau\,(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma = \int_{\Sigma'_0} \frac{\tau\,(\xi, \eta, \zeta)}{\cos\gamma}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma'\,, \tag{11}$$

unde, ca şi în cazul păturii simple, Σ'_0 reprezintă proiecţia unei porţiuni din Σ_0, vecină punctului P_0 de pe Σ_0, pe planul tangent (ξ, η) lui Σ_0 în P_0. Fie $\zeta = f\,(\xi, \eta)$ ecuaţia lui Σ_0 raportată la acest plan şi la normala în P_0. Avem

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \cos\alpha\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \cos\beta\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \cos\gamma\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\,,$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ însemnând coninusurile directoare ale normalei la Σ_0 în P_0. Se stie că între aceste cosinusuri există relaţiile

$$\cos\alpha : \frac{\partial f}{\partial \xi} = \cos\beta : \frac{\partial f}{\partial \eta} = \cos\gamma : (-1)\,.$$

In aceste condiţii, putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos\gamma}{r^3}\left\{(z-\zeta) - (x-\xi)\,\frac{\partial f}{\partial \xi} - (y-\eta)\,\frac{\partial f}{\partial \eta}\right\}.$$

In punctul $x = y = z = 0$, avem, aşadar,

$$\varphi_0 = -\int_{\Sigma'_0} \tau\,\frac{1}{r^3}\left\{f_0 - \xi\left(\frac{\partial f}{d\xi}\right)_0 - \eta\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_0\right\}d\sigma'\,. \tag{11'}$$

Dar, derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui f tind la

zero în P_0 (căci planul $\zeta = 0$ este tangent în origină la Σ_0). Apoi, după § 167, I,

$$|\zeta| \equiv |f| \leqq \mu r'^2 \quad .$$

Pe de altă parte, punctul P_0 fiind un punct regulat pe Σ_0, rezultă

$$\frac{1}{r^3}\left| z - x\frac{\partial f}{\partial \xi} - y\frac{\partial f}{\partial \eta}\right| < \frac{3}{r^2} \quad .$$

Cum funcţia de moment τ este mărginită, rezultă că funcţia φ definită prin integrala (11) este convergentă când punctul P este un punct al suprafeţei Σ_0, după teoremele II şi III dela § 148.

Potenţialul de pătură dublă este funcţie *discontinuă* în punctele suprafeţei Σ_0 (în care densitatea superficială nu se anulează). Această proprietate se găseşte stabilită prin faptul că (§ 104)

$$(\operatorname{grad}\frac{1}{r})_P = -(\operatorname{grad}\frac{1}{r})_S \quad ;$$

iar $(\operatorname{grad}\frac{1}{r})_P$ are drept componente derivatele parţiale ale funcţiei potenţiale de pătură simplă, pentru care am demonstrat, în paragraful precedent, discontinuitatea. Bine înţeles că, în cazul de faţă, în locul funcţiei superficiale a suprafeţei de pătură simplă $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ va figura funcţia-moment $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ a păturei duble, posedând proprietăţile enunţate pentru ω. Aşa fiind, putem scrie

$$(12) \quad \varphi_+ = 2\pi\,\tau(\xi, \eta, \zeta) + U_0 \quad ; \quad \varphi_- = -2\pi\,\tau(\xi, \eta, \zeta) + U_0 \,,$$

unde

$$U_0 = \left(\int_{\Sigma_0} \tau \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma\right)_{P_0}.$$

Scăzând egalităţile (12) obţinem

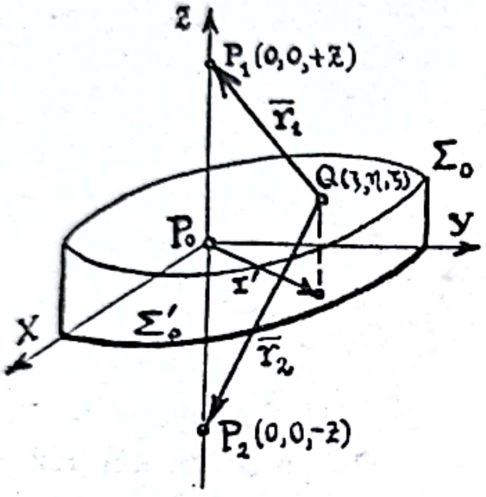
$$(13) \qquad \varphi_+ - \varphi_- = 4\pi\,\tau(\xi, \eta, \zeta) \,,$$

Scanned with OKEN Scanner

relaţie, care justifică prima condiţie admisă pentru determinarea potenţialului de pătură dublă la § 168.

Putem enunţa teorema: dacă $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ este o funcţie continuă pe suprafaţa Σ_0, şi V o regiune închisă, a cărei frontieră Σ exclude suprafaţa de discontinuitate Σ_0 (finită), potenţialul de pătură dublă este continuu în toate punctele acestei regiuni. Când punctul curent trece prin suprafaţa de discontinuitate Σ_0, potenţialul suferă o discontinuitate, măsurată, până la un factor constant, de domeniul păturii duble".

Derivatele normale. (fig. 70) Să presupunem că funcţia-moment $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ este continuă. Să considerăm *diferenţele* valorilor derivatei normale pe cele două feţe ale suprafeţei de izvoare Σ_0. Fie $P_0(0,0,0)$ un punct de pe suprafaţa Σ_0. Să luăm derivatele lui φ în punctele simetric aşezate pe axa de z, anume, $P_1(0,0,+z)$ şi $P_2(0,0,-z)$. Fie $P(x,y,z)$ punctul curent şi $Q(\xi, \eta, \zeta)$ un punct variabil de pe Σ_0.



(Fig. 70)

Avem

$$r_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2 = r'^2 + (\zeta - z)^2 \,, \qquad (14)$$
$$r_2^2 = r'^2 + (\zeta + z)^2 \,.$$

Diferenţa celor două valori ale derivatelor lui φ în P_1 şi P_2 se scrie, după (11),

$$D = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{P_1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{P_2} = \int_{\Sigma_0} \tau(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)_{-z}^{+z} d\sigma \,, \qquad (15)$$

sau, luând proiecţia Σ'_0 a lui Σ_0 pe planul tangent în P_0,

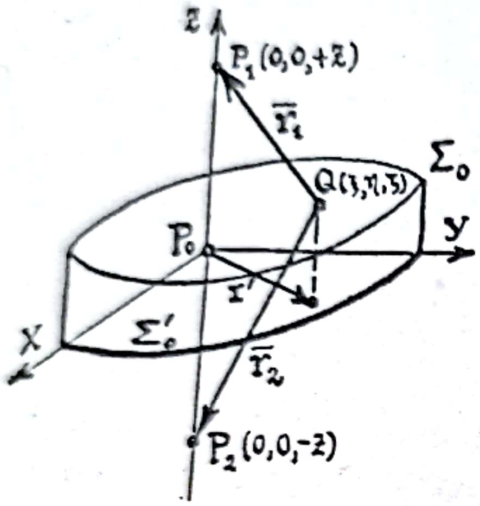
$$D = \int_{\Sigma'_0} \tau \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \right\}_{-z}^{+z} \frac{d\sigma'}{\cos \gamma} \,.$$

Introducând valoarea (14) şi procedând ca şi la transfor-

relație, care justifică prima condiție admisă pentru determinarea potențialului de pătură dublă la § 168.

Putem enunța teorema: dacă $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ este o funcție continuă pe suprafața Σ_0, și V o regiune închisă, a cărei frontieră Σ exclude suprafața de discontinuitate Σ_0 (finită), potențialul de pătură dublă este continuu în toate punctele acestei regiuni. Când punctul curent trece prin suprafața de discontinuitate Σ_0, potențialul suferă o discontinuitate, măsurată, până la un factor constant, de domeniul păturii duble".

Derivatele normale. (fig. 70) Să presupunem că funcția-moment $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ este continuă. Să considerăm *diferențele* valorilor derivatei normale pe cele două fețe ale suprafeței de izvoare Σ_0. Fie $P_0(0,0,0)$ un punct de pe suprafața Σ_0. Să luăm derivatele lui φ în punctele simetric așezate pe axa de z, anume, $P_1(0,0,+z)$ și $P_2(0,0,-z)$. Fie $P(x,y,z)$ punctul curent și $Q(\xi, \eta, \zeta)$ un punct variabil de pe Σ_0.



(Fig. 70)

Avem

$$r_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2 = r'^2 + (\zeta - z)^2 \,, \tag{14}$$
$$r_2^2 = r'^2 + (\zeta + z)^2 \,.$$

Diferența celor două valori ale derivatelor lui φ în P_1 și P_2 se scrie, după (11),

$$D = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{P_1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{P_2} = \int_{\Sigma_0} \tau(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)_{-z}^{+z} d\sigma \,, \tag{15}$$

sau, luând proiecția Σ'_0 a lui Σ_0 pe planul tangent în P_0,

$$D = \int_{\Sigma'_0} \tau \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \right\}_{-z}^{+z} \frac{d\sigma'}{\cos \gamma} \,.$$

Introducând valoarea (14) și procedând ca și la transfor-

marea formulei (11), găsim

$$D=\int_{\Sigma'_0}\tau\left\{\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r_1^3}-3\left(\frac{1}{r_2^5}-\frac{1}{r_1^5}\right)\left(z^2-\zeta\left(\zeta-\xi\frac{\partial f}{d\xi}-\eta\frac{\partial f}{d\eta}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-3\left(\frac{1}{r_1^5}+\frac{1}{r_2^5}\right)\left(2\zeta-\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)z\right\}d\sigma'.$$

Să arătăm că D tinde la zero când z tinde la zero, deci când punctele P_1 şi P_2 tind simultan la punctul P_0, de pe suprafaţa de discontinuitate.

Pentru a demonstra această proprietate este necesar să facem următoarea observaţie: să considerăm, pe lângă potenţialul $\varphi(P)$ corespunzător funcţiei-moment $\tau(\xi,\eta,\zeta)$, potenţialul

$$\Phi(P)=\varphi(P)-\varphi(P)_0.$$

Am însemnat cu

$$\varphi(P)_0=\int_{\Sigma_0}\tau(P_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

potenţialul corespunzător funcţiei-moment $\tau(P)$ (constantă finită) egală cu valoarea momentului în punctul P_0 (luat ca origină a coordonantelor). Potenţialul $\Phi(P)$ corespunde funcţiei-moment

$$\Omega(\xi,\eta,\zeta)=\tau(\xi,\eta,\zeta)-\tau(P_0),$$

care *se anulează în* P_0.

Observăm că limita diferenţei corespunzătoare potenţialului $\Phi(P)$,

$$D(\Phi)\equiv\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{P_1}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{P_2}$$

când $P_1\to P_0$ şi $P_2\to P_0$, este aceiaşi cu limita diferenţei (15) corespunzătoare funcţiei $\varphi(P)$. In adevăr, $\varphi(P)_0$ este egală cu constanta $\tau(P_0)$ înmulţită cu unghiul solid cu centrul în P (unul din punctele P_1 sau P_2) şi subîntins de Σ_0. Această expresie este o funcţie continuă de z; valorile ei în P_0 diferă, cel mult, printr'o constantă, dacă determinarea nu este unică, ci depinde de drumul pe care z tinde spre zero. In orice caz, derivatele parţiale în raport cu z tind uniform spre aceiaşi valoare în P_0.

Scanned with OKEN Scanner

In aceste condiţii, observăm că

$$\lim_{z\to 0} D(\Phi) = \lim_{z\to 0} D(\varphi) - \tau(P_0 \lim_{z\to 0} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi\,(P)_0}{\partial z}\right)_{P_1} - \left(\frac{\partial \varphi\,(P)_0}{\partial z}\right)_{P_2} \right\}.$$

Dar, al doilea termen din membrul al doilea are ca limită zero.

Aşadar, ca să dovedim că limita lui $D(\varphi)$ este zero când z tinde la zero este suficient să dovedim că $D(\Phi)$ este zero cu z.

Acestea fiind precizate, să ducem în planul tangent în P_0 un cerc foarte mic σ', cu centrul în P_0. Avem evident,

$$\int_{\Sigma'_0} = \int_{\Sigma'_0 - \sigma'} + \int_{\sigma'} .$$

Pentru un σ' dat, de rază R diferită de zero, suprafaţa Σ_0 neprezentând pânze infinite, prin ipoteză, integrala $\int_{\Sigma'_0 - \sigma'}$ tinde către zero când z tinde la zero (căci, pentru $z = 0$, $r_1 = r_2$, şi integrandul se anulează identic).

Pentru a stabili că D tinde la zero cu z, rămâne să mai demonstrăm că a doua integrală $\int_{\sigma'}$ tinde la zero cu z, deci când punctele P_1 şi P_2 tind simultan către punctul P_0 de pe suprafaţa de discontinuitate Σ_0 .

Dar, după observaţia de mai sus, putem lua drept funcţie-moment, funcţia $\Omega(\xi, \eta, \zeta) = \tau(\xi, \eta, \zeta) - \tau(P_0)$ care se anulează în P_0.

Să punem

$$\int_{\sigma'} = I_1 - 3\,I_2 - 3\,I_3 - 3\,I_4$$

cu notaţiile

$$I_i = \int_{\sigma'} \Omega\, A_i\, d\sigma' \quad , \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

unde

$$A_1 = \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \; ; \; A_2 = \left(\frac{1}{r_2^5} - \frac{1}{r_1^5}\right) z^2 \; ;$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{r_2^5} - \frac{1}{r_1^5}\right) \zeta \left(\zeta - \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) ;$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{r_2^5} + \frac{1}{r_1^5}\right) \left(2\zeta - \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) z .$$

Fie $\rho^2 = r'^2 + z^2$. Să reamintim că $|\zeta| \leqq \mu r'^2$ (după § 167, I.) Să considerăm inegalitatea

$$\left|\frac{r_1}{\rho} - 1\right| = \left|\frac{r_1^2 - \rho^2}{\rho(r_1+\rho)}\right| \leqq \left|\frac{\zeta(\zeta - 2z)}{\rho^2}\right| \leqq \frac{r'^2}{r'^2+z^2} \mu |\zeta - 2z| .$$

Dacă $-\delta \leqq z \leqq +\delta$, putem alege pe δ şi R destul de mici, astfel încât cantitatea precedentă să fie mai mică decât $^1/_2$

De aici rezultă

$$r_1 > \frac{\rho}{2} \quad ; \quad r_2 < \frac{\rho}{2} .$$

Acestea fiind stabilite, să considerăm integrala I_1. Printr'o transformare simplă a expresiei lui A_1, putem scrie, aplicând „teorema mediei“

$$I_1 = \tilde{\Omega} \int_{\sigma'} A_1 \, d\sigma' = \tilde{\Omega} \int_{\sigma'} \frac{-4\zeta z}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2^2}\right) d\sigma' ,$$

unde $\tilde{\Omega}$ este valoarea medie a lui Ω în vecinătatea imediată a punctului P_0.

Deducem

$$|I_1| \leqq \tilde{\Omega} . 3 . 2^7 . \mu \left| \int_{\sigma'} \frac{r'^2 z}{\rho^5} d\sigma' \right| = 3 . 2^8 . \mu \tilde{\Omega} \mu \left| \int_0^R \frac{r'^3 z}{(r'^2+z^2)^{5/2}} dr' \right| .$$

Făcând substituţia

$$r' = z \operatorname{tg} u ,$$

integrala ultimă devine

$$\int_0^{\operatorname{arctg} R/z} \sin^3 u \, du = \left| \frac{1}{3} \cos^3 u - \cos u \right|_0^{\operatorname{arctg} R/z} \leqq \frac{2}{3} ,$$

valoarea $\frac{2}{3}$ fiind atinsă pentru $z = 0$ (reamintim că $R \neq 0$).

Prin urmare, găsim

$$|I_1| \leqq 2^9 \pi \mu \Omega^2 .$$

Aşadar,

$$\lim_{z \to o} |I_1| = 2^9 \pi \mu \lim_{z \to o} \Omega^2 = 0 .$$

In mod analog se stabileşte că şi limetele integralelor I_2, I_3, I_4 sunt egale cu zero în punctul P_0.

Am demonstrat, în definitiv, că diferenţa D dată de relaţia (15) tinde la zero în punctul P_0 al suprafeţei de discontinuitate Σ_0 .

Prin urmare, putem enunţa teorema: „fie φ potenţialul unei distribuţii de pătură dublă, de moment τ, funcţie continuă şi mărginită. Diferenţa valorilor derivatei funcţiei φ pe direcţia normală la Σ_0 în P_0, valori luate în două puncte egal depărtate de P_0 pe normala la suprafaţă, tinde către zero, când aceste puncte tind simultan la P_0".

Rămâne să mai arătăm că derivata normală *există* în P_0.

Existenţa derivatelor normale, în punctele de pe suprafaţa de discontinuitate. Să luăm ca element de referinţă planul tangent (ξ, η) şi normala în punctul P_0 la suprafaţă. Admitem că momentul $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ are derivate secunde continue în raport cu ξ şi η.

Intrebuinţând metoda de la paragraful 105, construim un cilindru de rază infinitesimală, normal la Σ_0 în P_0, de suprafaţă S, astfel încât în domeniul D, limitat de acest cilindru, funcţia τ să fie continuă. Putem aplica acestei regiuni teorema lui Gauss. Fie $P(x, y, z)$ un punct în D. Funcţia $1 : r$ devine infinită în P_0. Din această cauză trebue să eliminăm, prin procedeul întrebuinţat adesea, acest punct din domeniul de integrare, construind o sferă de centru P_0 cu suprafaţa σ şi domeniu interior v. Aplicăm teorema lui Gauss, în domeniul rămas, funcţiei τ grad $\frac{1}{r}$. Avem, ţinând seamă de formula (52) de la § 117,

$$\int_{D-v} (\text{grad } \tau \,.\, \text{grad } \frac{1}{r})\, dv = \int_{S+\sigma} \tau \text{ grad } \frac{1}{r}\, d\sigma .$$

Pe sfera σ avem (vezi paragraful următor)

$$\int_{\sigma} \tau \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma = \tilde{\tau} \int_{\Omega} d\Omega = 4\pi \tilde{\tau} ,$$

unde $\tilde{\tau}$ reprezintă valoarea medie pe σ, valoare care tinde către $\tau(P_0)$ când σ tinde la P_0. Cum, integrala de volum tinde, la limită, către $\int_D$, când $\nu \to 0$, putem scrie

$$(16) \qquad \int_D (\operatorname{grad} \tau \,.\, \operatorname{grad} \frac{1}{r})\, dv = \int_S \tau \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + 4\pi \tau (P).$$

Aplicând aceiaşi formulă funcţiei $\frac{1}{r}$ grad τ, obţinem

$$(17) \qquad \int_D (\Delta \tau) \frac{1}{r}\, dv + \int_D (\operatorname{grad} \tau \,.\, \operatorname{grad} \frac{1}{r})\, dv = \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial n} d\sigma .$$

Prin scăderea relaţiilor (16) şi (17), deducem, în definitiv,

$$-\int_D (\Delta \tau) \frac{1}{r}\, dv = \int_S \tau \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial n} d\sigma + 4\pi \tau (P) .$$

Am admis că $\tau(P)$ are derivate secunde continue; aşadar, prima integrală reprezintă un potenţial de volum, funcţia de densitate $\Delta \tau$ fiind continuă. Prima integrală din membrul al doilea reprezintă potenţialul unei pături duble de moment τ., funcţie continuă. Concludem că a doua integrală din membrul al doilea există (deci $\frac{\partial \tau}{\partial n}$ există) şi reprezintă potenţialul unei pături simple de densitate $\frac{\partial \tau}{\partial n}$, funcţie continuă. Avem, prin urmare tenrema: „dacă momentul τ al unei pături duble Σ_0 are derivate parţiale secunde continue pe Σ_0, derivatele parţiale ale lui τ sunt continue în orice regiune închisă D mărginită parţial de Σ_0, când punctul curent P se apropie de punctul P_0 de pe suprafaţă, rămânând mereu în domeniul D."

171. Potenţialul de pătură dublă uniformă. Potenţialul de pătura dublă are o proprietate interesantă, cu diferite apli-

cații. Să considerăm, anume, cazul când pătura dublă este *uniformă*; atunci funcțiunea $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ — momentul păturei duble — este constantă pe suprafața de discontinuitate. In acest caz, expresia potențialului se simplifică. In adevăr, vom avea, pentru pătura dublă uniformă

$$\varphi_d = -\tau \int \left(\bar{n} . \operatorname{grad}_s \frac{1}{r} \right) d\sigma \quad .$$

Fig 71.

Să examinăm această integrală. (Fig. 71). Dacă privim din punctul P o porțiune de suprafață $d\sigma$ și însemnăm cu $d\Omega$ *unghiul solid* sub care se vede această porțiune de suprafață, adică secțiunea într'o sferă de raza unu prin conul sub care privim din P elementul $d\sigma$ al lui (Σ_0), atunci $\frac{d\Omega}{d\sigma} = \frac{1}{r^2}$, r fiind distanța dela P la $d\sigma$, iar $d\sigma' = d\sigma . \cos(\bar{n}, \bar{r})$; deci $d\sigma'$ este porțiunea din suprafața sferei cu centrul în P și de raza r, cuprinsă în conul considerat mai sus. Așadar,

$$d\Omega = \pm \frac{d\sigma . \cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^2} \quad ,$$

dublul semn $(\pm)$ provine din faptul că P poate privi fața pozitivă sau fața negativă a suprafeței (Σ_0). Dar, $\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = \frac{\bar{r}}{r^3}$; deci

$$\left(\bar{n} . \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \right) = \frac{(\bar{n} . \bar{r})}{r^3}$$

sau

$$\left(\bar{n} . \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \right) = \frac{r . \cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^3} = \frac{\cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^2} \; ;$$

Așa dar, $$\pm \left(\bar{n} . \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \right) d\sigma = \pm \frac{d\sigma . \cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^2} = d\Omega \; ;$$

atunci potențialul ia forma

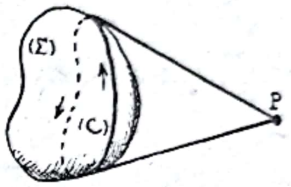
$$\varphi_d = \tau \int d\Omega .$$

Integrat, pe toată suprafața, dă $\varphi = \tau \Omega$. Se știe din Geometrie că $\int d\Omega$ este unghiul sub care se vede suprafața (Σ_0)

întreagă; ceeace revine la unghiul sub care se vede o curbă care mărgineşte suprafaţa (Curba după care conul tangent la suprafaţă cu vârful în P, o atinge, numită „curbă de contur aparent").

Teoremă: „Potenţialul unei pături duble uniforme, de moment τ, este egal cu momentul păturei duble, înmulţit cu unghiul solid sub care se vede curba de contur aparent a suprafeţei S privită din punctul P" numită curbă de contur aparent).

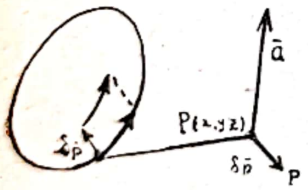
Dacă suprafaţa (S) este închisă, (fig. 72), este clar că pentru un punct P exterior, avem $\varphi(P) = 0$; pentru un P interior, $\varphi(P) = 4\pi\tau$; iar pentru un punct P situat chiar pe (S) avem $\varphi(P) = 2\pi\tau$.



(Fig. 72)

172. Câmpul vectorial al unei pături duble uniforme. Formula lui Biot **şi** Savart.

Pentru o astfel de pătură dublă uniformă, putem calcula câmpul vectorial datorit potenţialului păturei: $\bar{a} = -\operatorname{grad}\varphi$. Pentru a calcula pe $\bar{a}$, să facem următoarea operaţie. Fie (C) curba care determină unghiul solid sub care vedem din punctul $P(x,y,z)$ suprafaţa de discontinuitate (Σ_0). (fig. 73) Deplasăm arbitrar punctul P. Dacă această deplasare este reprezentată prin cantitatea vectorială $\delta\bar{p}$, elementul de arc ds al curbei (C) ne apare ca şi cum s'ar fi deplasat cu $(-\delta\bar{p})$; atunci variaţia unghiului solid sub care vedem suprafaţa (Σ_0) din P, este aceiaşi, fie că deplasăm P cu $\delta\bar{p}$, fie că deplasăm curba (C), care conturează suprafaţa (Σ_0), cu $-\delta\bar{p}$. Variaţia acestui unghiu solid Ω va fi dată de unghiul solid sub care vedem elementul de suprafaţă format de deplasarea $-\delta\bar{p}$ aplicată unui element de curbă $d\bar{s}$. Acest element de suprafaţă este $d\bar{o} = -[\delta\bar{p}, d\bar{s}]$. Avem,



(Fig. 73)

$$\delta\Omega_e = -\frac{\delta\sigma\cdot\cos(\bar{n},\bar{r})}{r^2} = \frac{\delta\bar{\sigma}\cdot\bar{r}}{r^3} \quad ;$$

deci,

$$\delta\Omega_e = -\frac{[\delta\bar{p}, d\bar{s}]\cdot\bar{r}}{r^3} \quad .$$

Variaţia unghiului solid, pentru toată curba închisă (C), va fi

$$\delta\Omega = -\oint_{(C)} \frac{\bar{r}.[\delta\bar{p}, d\bar{s}]}{r^3} = -\oint_{(C)} \frac{[d\bar{s}, \bar{r}]\,\delta\bar{p}}{r^3} \quad .$$

Pătura dublă fiind uniformă, potenţialul φ va suferi variaţia $\delta\varphi = \tau.\delta\Omega$. ($\tau$ este constant).

Să formăm produsul scalar $(\bar{a}.\delta\bar{p})$, unde $\bar{a}$ este vectorul de câmp căutat. Deoarece $\bar{a} = -\operatorname{grad}\varphi$, vom avea

$$\bar{a}.\delta\bar{p} = -(\delta\bar{p}.\operatorname{grad}\varphi) \quad .$$

Ştim însă, că $(\delta\bar{r}.\operatorname{grad})\varphi = \delta\varphi$; deci,

$$\bar{a}\,\delta\bar{p} = -\delta\varphi = -\tau.\delta\Omega \quad ,$$

sau, înlocuind pe $\delta\Omega$ prin valoarea calculată mai sus, rezultă

$$\bar{a}.\delta\bar{p} = +\tau\oint_{(C)} \frac{[d\bar{s}, \bar{r}]\,\delta\bar{p}.}{r^3} \quad .$$

Trecând totul în membrul întâi, dând pe $\delta\bar{p}$ în factor şi constatând că deplasarea $\delta\bar{p}$ e arbitrară, urmează că

$$\bar{a} = \oint_{(C)} \frac{\tau[d\bar{s}, \bar{r}]}{r^3} \quad ;$$

expresie, care ne dă *câmpul păturei duble uniforme*. Această formulă poartă, în Electromagnetism, numele de formula lui Biot şi Savart.

E. Aplcaţii

173. Familie infinită de suprafeţe potenţiale. Condiţia lui Lamé. Să considerăm sistemul simplu infinit de suprafeţe, a căror ecuaţie depinde de un singur parametru α,

$$F(x, y, z; \alpha) = 0 \quad ; \tag{18}$$

şi să punem condiţia ca aceste suprafeţe să fie, pentru o valoare anumită a parametrului α, suprafeţe potenţiale

$$\varphi(x, y, z) = C(\alpha) \quad .$$

Această condiţie însemnează că, în tot spaţiul lipsit de materie, să fie satisfăcută ecuaţia lui Laplace $\Delta\varphi = 0$.

Pe de altă parte, rezolvând ecuaţia (18)

$$\alpha = f(x, y, z)$$

putem considera pe φ drept funcţie de x, y, z prin intermediul lui α. Avem, deci,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}$$

şi analog pentru derivatele în raport cu y şi z. Adunând expresiile similare, obţinem ecuaţia

$$0 = \Delta\varphi = \frac{d\varphi}{d\alpha}\Delta\alpha + (\text{grad}\,\alpha)^2 \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} \; .$$

Prin urmare,

$$(21) \qquad \frac{\Delta\alpha}{\text{grad}^2\,\alpha} = -\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} : \frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{d}{d\alpha}(\log\frac{d\varphi}{d\alpha}) = \chi(\alpha) \; ,$$

căci φ este funcţie numai de α. Relaţia (21) exprimă *condiţia lui* Lamé. Deducem, apoi, din (21),

$$\log\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\int \chi(\alpha)\, d\alpha + C \; ,$$

sau,

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = A e^{-\int \chi(\alpha)\, d\alpha} \; ,$$

şi, în definitiv,

$$(23) \qquad \varphi = A \int e^{-\int \chi(\alpha)\, d\alpha} d\alpha + B \, ,$$

A şi B fiind constante de integrare, care urmează să fie determinate prin condiţii de frontieră.

In cazul *coordonatelor generale* u, v, w, dacă α este chiar una din aceste coordonate (pentru a fixa ideile, să luăm $\alpha = u$), avem (vezi § 109 şi 117, form. 57),

$$\Delta u = \frac{1}{U\,V\,W}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V\,W}{U}\right) \; ,$$

unde, după § 109 form. (30) $U^2 = 1 : \text{grad}^2\, u$. Aşadar, cum

$\text{grad}^2 \alpha$ este, în cazul de faţă, $\text{grad}^2 u$, avem

$$U^2 \Delta u = \frac{U}{V\,W} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V\,W}{U}\right) ,$$

sau, încă,

$$U^2 \Delta u = \frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{V\,W}{U}\right) ,$$

relaţie, care permite calcularea funcţiei $\chi(u)$ din formula (21), în cazul când α este una din coordonatele generale.

Aplicarea la cazul particular al *coordonatelor eliptice* (§ 110), se face înlocuind valorile respective ale lui U, V, W; avem

$$U^2 \Delta u = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a^2+u} + \frac{1}{b^2+u} + \frac{1}{c^2+u}\right\} = \chi(u) .$$

Dar, cum

$$\int \chi(u)\, du = \log \sqrt{(a^2+u)\,(b^2+u)\,(c^2+u)}$$

rezultă, după (23),

$$\varphi = A \int \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)\,(b^2+u)\,(c^2+u)}} + B . \tag{24}$$

174. Problema electrostatică a conductorului electric se găseşte formulată în broşura noastră *Electromagnetismul*. Pentru un conductor sferic, această problemă a fost rezolvată (§ 161) ca o aplicaţie a noţiunii de potenţial datorit unei distribuţii continue pe o suprafaţă finită. Ne propunem, în acest paragraf, să tratăm, ca aplicaţie, problema conductorului elipsoidal. Problema impune folosirea coordonatelor eliptice, definite de sistemul ortogonal (cuadrice confocale) (v. § 110):

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 . \tag{25}$$

In acest sistem de cuadrice confocale, conductorul corespunde valorii $\lambda = 0$. Funcţia φ trebue să satisfacă condiţiilor

(26) $\varphi =$ constant, pentru $\lambda \leqq 0$; pe conductor şi în interior ;

(27) $\Delta\varphi = 0$, pentru $\lambda > 0$; în exteriorul conductorului ;

pentru ca să exprime o funcţie potenţială. Pe de altă parte, trebuesc împlinite condiţiile de continuitate şi condiţiile de frontieră :

a) φ să fie continuă în tot spaţiul ;

b) derivatele prime ale funcţiei φ să fie continue în tot spaţiul, exceptând cazul când $\lambda = 0$. In acest caz, să fie satisfăcută ecuaţia, caracterizantă a păturii simple,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_+} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_-} = -4\pi\omega \quad ;$$

c) la infinit, să avem

$$r\varphi \to M \ , \qquad r \to \infty$$

unde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Relaţia (24) ne dă expresia potenţialului

$$\varphi = A \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} + B \ , \tag{28}$$

în care trebue, după condiţiile precedente, să determinăm constantele A şi B, precum şi limitele de integrare.

Observăm, în primul rând, că pentru $\lambda \to \infty$ obţinem sfera de rază infinită, pentru care potenţialul este nul, $\varphi = 0$; aşadar, $B = 0$. Limitele integralei nedefinite (28) se iau, pentru $u > 0$, între valoarea cea mai mare u a rădăcinii pozitive a ecuaţiei $f(\lambda) = 0$ şi infinit. Aşadar,

$$\varphi = A \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \ , \tag{29}$$

astfel încât potenţialul φ descreşte când u creşte.

Pentru determinarea constantei A, observăm că, după § 110, cum am ales $a > b > c$,

$$(c^2+\lambda)^3 < (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) < (a^2+\lambda)^3 \ .$$

Aşadar,

$$\frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}} < \frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} < \frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)^{3/2}} \quad ;$$

sau,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+u}} < \frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}} < \frac{1}{\sqrt{c^2+u}}$$

Prin urmare,

$$\lim_{u\to\infty} \sqrt{u}\,\frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}} = 1 . \tag{30}$$

Pe de altă parte, din ecuaţia (25) rezultă

$$u+v+w = r^2-(a^2+b^2+c^2) \quad ;$$

aşadar, când $u\to\infty$ şi $r\to\infty$,

$$\lim \frac{u}{r^2} = 1 \; ; \text{ deci, } \lim \frac{\sqrt{u}}{r} = 1 . \tag{31}$$

Din (30) şi (31) urmează

$$\lim\, r\,\frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}} = 1 .$$

Dar, condiţia (*c*) ne spune că

$$\lim_{r\to\infty} r\,A\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}} = M .$$

Deducem $A = M : 2$.

De unde rezultă, în definitiv,

$$\varphi = \frac{M}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}} \quad , \text{ pentru } \lambda \geqq 0 , \tag{32}$$

$$\varphi = \frac{M}{2}\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}} \quad , \text{ pentru } \lambda \leqq 0 . \tag{33}$$

175. Teorema lui CHASLES *(expresia densităţii superficiale).* In paragraful precedent am determinat potenţialul elipsoizilor confocali, φ, ca funcţie continuă şi derivabilă în raport cu va-

riabila u. Pe de altă parte, u este funcţie continuă şi derivabilă de x, y, z, întru cât ea este rădăcină distinctă a unei acuaţii algebrice (ecuaţia 25) cu coeficienţi constanţi, şi deci, funcţie continuă şi derivabilă de coeficienţi. Pentru punctele pentru care rădăcinile ecuaţiei (25) coincid, derivatele lui φ nu mai sunt continue, ci trebue să fie satisfăcută condiţia (b), ceeace se întâmplă pe suprafaţa elipsoidului. Cum însă φ este constant în interiorul elipsoidului, trebue să avem

$$(32) \qquad -4\pi\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial n_+} \; ; \quad \text{deci,} \quad \omega = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n_+} = \frac{M}{8\pi}\frac{\partial u}{\partial n_+} \; ,$$

după cum se vede, dacă se efectuiază derivarea integralei definite (30) în raport cu una din limitele de integrare (u).

Pe de altă parte, din expresia lui ds^2 (§ 110), deducem, pentru normala exterioară curbelor u,

$$dn^2 = \frac{(u-v)(u-w)}{4\varphi(u)}du^2 \; ; \quad \text{deci,} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{\frac{\varphi(u)}{(u-v)(u-w)}} \; .$$

Făcând $u = 0$ (pe suprafaţa elipsoidului) şi înlocuind în (32), rezultă

$$(33) \qquad \omega = \frac{M}{4\pi\sqrt{v\,w}} \; .$$

Pentru determinarea produsului $v\,w$, comparăm coeficienţii identităţii (§ 110)

$$f(\lambda)\varphi(\lambda) = x^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) + y^2(c^2+\lambda)(a^2+\lambda) + z^2(a^2+\lambda)(b^2+\lambda) \equiv -(\lambda-u)(\lambda-v)(\lambda-w),$$

şi punem, pe elipsoid, $\lambda = 0$. Obţinem, printr'un calcul algebric elementar,

$$(34) \qquad v\,w = a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right) \; .$$

Observăm apoi, că ecuaţia planului tangent la elipsoid în punctul (x, y, z) are ecuaţia

$$(X-x)\frac{x}{a^2} + (Y-y)\frac{y}{b^2} + (Z-z)\frac{z}{c^2} = 0 \; ,$$

şi că distanţa acestui plan până la centrul elipsoidului este

$$\delta = \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}} \; .$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, din (34), rezultă

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\frac{1}{\delta}\frac{\sqrt{v\,w}}{a\,b\,c} \quad .$$

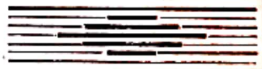
Prin urmare, expresia (33) devine

$$\omega=\frac{M}{4\pi\,a\,b\,c}\delta \quad ;$$

ceeace exprimă teorema: „densitatea încărcării electrice în fiecare punct al elipsoidului este proporţională cu distanţa la centru a planului tangent la elipsoid".

Observăm că, după această teoremă, densitatea electricităţii este mai mare la extremităţile axelor mai lungi, — fapt cunoscut din experienţă: tendinţa electricităţii statice să se îngrămădească în punctele de curbură maximă.

Această proprietate se pune în evidenţă prin cunoscuta experienţă a giruetei electrice (scurgerea electricităţii prin vârfuri).

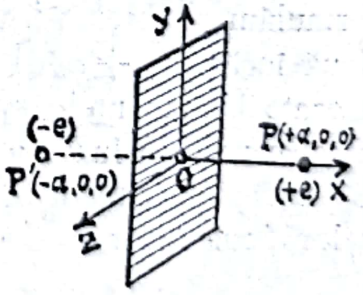


CAP. IV

Metoda imaginilor electrice

176. Imagini electrice (Lord Kelvin). In problema electrostatică a „influenţii electrice", în care se cere a se determina potenţialul şi câmpul pe care-l produce o încărcare electrică aşezată într'un „dielectric" (v. *Electromagnetismul)* pe un conductor vecin, legat la pământ, metoda preconizată de Lord Kelvin, numită „metoda imaginilor electrice", conduce la rezultate simple şi instructive. Să ilustrăm, prin exemple clasice această metodă.

Fie un *conductor plan*, infinit (fig. 74) ţinut la potenţialul zero (pus la pământ). In faţa acestui plan (pe care-l luăm ca plan de y, z), aşezăm la distanţa $+a$ (nu prea mare), pe axa de x, o încărcare electrică $(+e)$ în punctul P $(+a, 0, 0)$. Ne punem întrebarea: cum putem formula faptul experimental că planul conductor are potenţialul zero, când asupra lui se influenţează electricitate din încărcarea $+e$? Lord Kelvin aşează în punctul $P'(-a, 0, 0)$ —imagina lui P faţă de planul y, z, ca într'o oglindă,—încărcarea fictivă $-e$ (egală şi de semn contrar cu încărcarea reală din P. Vom verifica mai jos că, în adevăr, pe conductor se răspândeşte electricitate prin influenţă, superficială, astfel încât potenţialul discului este nul. Această electricitate este concepută de L. Kelvin ca fiind concentrată în punctul P'.



(Fig. 74)

In adevăr, avem pentru valoarea potenţialului total datorit

acestor două încărcări într'un punct oarecare (x, y, z), din spaţiu

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{e}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} \text{ , pentru } x \geqq 0 \text{ ;}$$

$$\varphi = 0 \text{ , pentru } x \leqq 0 \text{ .}$$

Densitatea superficială, într'un punct al discului $(0, \eta, \zeta)$ va fi, după cele ce ştim din capitolul precedent,

$$\omega(\eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_+} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_-}\right) = -\frac{e\,a}{2\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}} \text{ ,}$$

unde am pus

$$\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2 \text{ .}$$

Rezultă că densitatea superficială variază invers cu cubul distanţei încărcării reale la punctul respectiv de pe disc. Întreaga cantitate de electricitate de pe disc va fi

$$\int \omega\, d\sigma = \frac{e}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{a\,\rho\,d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} = +\left|\frac{a\,e}{(a^2+\rho^2)^{1/2}}\right|_0^{\infty} = -e \text{ ;}$$

aşadar, precum am prevăzut, egală şi de semn contrar încărcării reale.

Alt exemplu interesant este oferit de *problema încărcării prin influenţă a unei sfere conductoare,* pusă la pământ. Să formulăm problema invers decât în exemplul precedent : se dau două încărcări $+e_1$ şi $-e_2$ (luând, pentru a fixa ideile $e_2 < e_1$), aşezate la distanţele p_1, resp. p_2 de origina axelor de coordonate, care este luată pe dreapta ce uneşte cele două izvoare. Se întreabă : care este suprafaţa pentru care potenţialul datorit celor două izvoare

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2} \text{ ,}$$

are valoarea zero ? Am însemnat cu r_1 şi r_2 distanţele unui punct $P(R, \theta)$, al suprafeţei, la cele două izvoare. Această suprafaţă va fi, evident, o suprafaţă de rotaţie în jurul axului care uneşte izvoarele.

Avem,

$$r_1^2 = R^2 + p_1^2 - 2\,R\,p_1 \cos\theta \text{ ,}$$

$$r_2^2 = R^2 + p_2^2 - 2\,R\,p_2 \cos\theta \text{ .}$$

acestor două încărcări într'un punct oarecare (x, y, z), din spaţiu

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{e}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} \text{ , pentru } x \geqq 0 \text{ ;}$$

$$\varphi = 0 \text{ , pentru } x \leqq 0 \text{ .}$$

Densitatea superficială, într'un punct al discului $(0, \eta, \zeta)$ va fi, după cele ce ştim din capitolul precedent,

$$\omega(\eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_+} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_-}\right) = -\frac{e\,a}{2\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}} \text{ ,}$$

unde am pus

$$\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2 \text{ .}$$

Rezultă că densitatea superficială variază invers cu cubul distanţei încărcării reale la punctul respectiv de pe disc. Întreaga cantitate de electricitate de pe disc va fi

$$\int \omega\, d\sigma = \frac{e}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{a\,\rho\,d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} = +\left|\frac{a\,e}{(a^2+\rho^2)^{1/2}}\right|_0^{\infty} = -e \text{ ;}$$

aşadar, precum am prevăzut, egală şi de semn contrar încărcării reale.

Alt exemplu interesant este oferit de *problema încărcării prin influenţă a unei sfere conductoare,* pusă la pământ. Să formulăm problema invers decât în exemplul precedent : se dau două încărcări $+e_1$ şi $-e_2$ (luând, pentru a fixa ideile $e_2 < e_1$), aşezate la distanţele p_1, resp. p_2 de origina axelor de coordonate, care este luată pe dreapta ce uneşte cele două izvoare. Se întreabă : care este suprafaţa pentru care potenţialul datorit celor două izvoare

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2} \text{ ,}$$

are valoarea zero ? Am însemnat cu r_1 şi r_2 distanţele unui punct $P(R, \theta)$, al suprafeţei, la cele două izvoare. Această suprafaţă va fi, evident, o suprafaţă de rotaţie în jurul axului care uneşte izvoarele.

Avem,

$$r_1^2 = R^2 + p_1^2 - 2\,R\,p_1 \cos\theta \text{ ,}$$

$$r_2^2 = R^2 + p_2^2 - 2\,R\,p_2 \cos\theta \text{ .}$$

Potenţialul se anulează, desigur, când

$$\frac{e_1^2}{e_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{R^2 + p_1^2 - 2Rp_1\cos\theta}{R^2 + p_2^2 - 2Rp_2\cos\theta} \quad ;$$

relaţie, care exprimă ecuaţia curbei meridiane, în R şi θ. Variabila θ dispare din ecuaţie când

$$\frac{e_1^2}{e_2^2} = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{R^2}{p_1} + p_1\right) : \left(\frac{R^2}{p_2} + p_2\right) \quad ; \quad \frac{p_1}{p_2} : \frac{e_1^2}{e_2^2} \quad .$$

Relaţiile precedente sunt satisfăcute pentru

$$R^2 = p_1 p_2 \quad .$$

Locul punctelor $P(R, \theta)$ este aşadar, o sferă de rază R (constantă), cu centrul într'un punct aşezat pe linia ce uneşte cele două izvoare, la distanţe de ele proporţionale cu patratele încărcărilor. Aceasta ne arată că cele două izvoare se găsesc în *puncte aşezate conjugat armonic* faţă de sfera obţinută, sau puncte *inverse*, faţă de numita sferă.

177. Serii infinite de imagini. Să considerăm două plane conductoare ($x = 0$, $x = a$), infinite, aşezate paralel şi legate la pământ. Intre ele să fie o încărcare electrică $+e$ în punctul $(c, 0, 0)$, astfel încât $0 < c < a$. O încărcare-imagină $-e$, în punctul $(2a - c, 0, 0)$ va reduce la zero potenţialul planului $x = a$. Pentru a reduce la zero şi potenţialul planului $x = 0$, avem de introdus două încărcări-imagină: una $-e$ în punctul $(-c, 0, 0)$ şi una $+e$ în punctul $(-2a + c, 0, 0)$. Dar atunci, potenţialul planului $x = a$ nu mai este nul şi este nevoe să introducem alte două imagini pentru a-l anula; procedeul, repetându-se la infinit. In acest mod se obţine, în definitiv, potenţialul

$$\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e}{\sqrt{(x - 2n\,a - c)^2 + y^2 + z^2}} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e}{\sqrt{(x - 2n\,a + c)^2 + y^2 + z^2}} \quad .$$

Seriile astfel obţinute nu sunt convergente, termenii fiind comparabili cu termenii seriei armonice. Grupând însă convenabil termenii, seria

$$\varphi = e \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - 2n\,a - c)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - 2n\,a + c)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

are termenii comparabili cu ai seriei $\Sigma(1 : n^2)$. Dacă punctul

(x, y, z) se află într'o *regiune mărginită*, lipsită de încărcări reale, seria lui φ, sub forma a două, este absolut şi uniform convergentă. Ea reprezintă, aşadar, pentru regiunea mărginită considerată, potenţialul φ, după proprietăţile cunoscute ale seriilor.

178. Transformările lui Lord Kelvin. Fie o sferă, pe care s'o numim *fundamentală*, de rază R, cu centrul în origina axelor de coordonate, şi $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ două puncte inverse faţă de sferă. Insemnând cu r şi r' distanţele lor de origină, avem, din definiţia punctelor inverse (v. exemplul precedent)

$$(1) \qquad r\,r' = R^2 \; ; \; x = \frac{R^2}{r'^2}\,x' \; ; \; y = \frac{R^2}{r'^2}\,y' \; ; \; z = \frac{R^2}{r'^2}\,z' \; .$$

Această schimbare de coordonate transformă sfera în sferă. In adevăr, prin transformarea (1), ecuaţia

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

se transformă în ecuaţia

$$E(x'^2 + y'^2 + z'^2) + BR^2 x' + CR^2 y' + DR^2 z' + AR^4 = 0 \; .$$

Transformarea (1) poartă numele de „inversiune“ ; ea este propria ei inversă şi constitue o *transformare conformă*.

In adevăr, după cum se verifică cu ajutorul ecuaţiilor precedente, condiţia necesară şi suficientă ca o sferă să se transforme în ea însăşi este ca ea să fie ortogonală sferei fundamentale $r = R$. Orice cerc ortogonale sferei fundamentale este intersecţia a două sfere ortogonalei sferei fundamentale şi se transformă în el însuşi. Două cercuri ce se intersectează, care se transformă în ele înşile, păstrează, prin transformare, unghiul făcut de ele într'un punct al lor de intersecţie ; deci, transformarea este *conformă*.

179. Transformarea funcţiilor armonice. Avem, pentru elementul liniar

$$(2) \qquad ds^2 = \frac{R^4}{r'^4}\,ds'^2 = \frac{R^4}{r'^4}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) \; .$$

Fie φ o funcţie de x, y, z, în care facem transformarea (1). Avem

$$(3) \qquad \Delta\varphi = \frac{r'^6}{R^6}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{R^2}{r'^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{R^2}{r'^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{R^2}{r'^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\right)\right\} \; .$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{R^2}{r'^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)=R^2\left\{\frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+2\frac{1}{r'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right\}=\frac{R^2}{r'}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left(\frac{\varphi}{r'}\right)-\varphi\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x'^2}\right\}$$

şi că $1 : r'$ este funcţie armonică în x', y', z', exceptând origina. Aşadar, (3) devine

$$\Delta\varphi=\frac{r'^5}{R^5}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left(\frac{R}{r'}\varphi\right)+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left(\frac{R}{r'}\varphi\right)+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\left(\frac{R}{r'}\varphi\right)\right\} .$$

Fie funcţia

$$\chi(x', y', z')=\frac{R}{r'}\varphi\left(\frac{R^2}{r'^2}x', \frac{R^2}{r'^2}y', \frac{R^2}{r'^2}z'\right) .$$

După cele constatate mai sus, ea este armonică dacă $\varphi(x, y, z)$ este armonică. Prin urmare: „dacă funcţia $\varphi(x, y, z)$ este armonică într'un domeniu D, atunci funcţia $\chi(x', y', z')$ este armonică în domeniul D', obţinut din D prin inversiune".

Observăm că prin inversiunea (1) *centrul* sferei fundamentale se transformă în punctul dela infinit, şi invers. Dacă φ este funcţie armonică în centrul sferei fundamentale, atunci fuucţia χ va fi regulată la infinit.

Dacă φ este armonică şi regulată la infinit o putem exprima prin desvoltarea în polinoame H_n (de gradul n) omogene în x, y, z,

$$\varphi=\Sigma\frac{1}{r^{n+2}}H_n(x, y, z) .$$

Aşadar,

$$\chi=\Sigma\frac{1}{R^{n+2}}H_n(x', y', z') ,$$

va fi convergentă în interiorul sferei inverse sferei de convergenţă a lui φ.

180. Integrala lui Poisson. Să considerăm o sferă conductoare, pusă la pământ, şi un punct P la distanţa ρ de centrul sferei, în care se găseşte o încărcare electrică de intensitate $(+1)$. Metoda imaginilor constă în faptul că în punctul P', inversul lui P în raport cu sfera, se induce o încărcare-imagină $-R : \rho$. Fie Q un punct de pe sferă, şi r, r' distanţele sale

până la P şi P'. Să considerăm funcţia lui GREEN

$$G(Q,P)=\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}-\frac{\overline{OP'}}{R}\frac{1}{r'}\ ,$$

căci $\overline{OP}.\overline{OP'}=\rho\,\overline{OP'}=R^2$. Această funcţie este derivabilă în raport cu coordonatele lui Q în orice regiune S (de ex. o sferă), care exclude punctul P. Putem aplica formula (v. § 154)

$$\varphi(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_S \varphi(Q)\left\{\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}\right\}d\sigma\ .$$

Vom întrebuinţa coordonatele polare: $P(\rho,\chi,\theta)$ şi $P'(\rho',\chi',\theta')$. Avem

$$r^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\gamma\ ;$$

$$r'^2=\frac{R^4}{\rho^2}+\rho'^2-2\frac{R^2}{\rho}\rho'\cos\gamma\ ;$$

$$\cos\gamma=\cos\theta\ \cos\theta'+\sin\theta\ \sin\theta'\cos(\chi-\chi')\ .$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\frac{1}{r}\right)_{\rho'=R}=\frac{\rho\cos\gamma-R}{r^3}\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)=\frac{1}{r'^3}\left(\frac{R^2}{\rho}\cos\gamma-R\right)=\frac{\rho^2}{R^2}\,\frac{R\cos\gamma-\rho}{r^3}\ .$$

Înlocuind aceste valori în expresia lui $\varphi(P)$, avem

$$(4)\qquad \varphi(\rho,\chi,\theta)=\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int_S\frac{1}{r^3}\varphi(\chi',\theta',)\,d\sigma\ .$$

Integrala (4) este cunoscută sub numele de *integrala lui* POISSON. Cu ajutorul acestei integrale, problema lui DIRICHLET, pentru sferă, se găseşte rezolvată. In adevăr, fie

$$(5)\qquad U(\rho,\chi,\theta)=\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int_S\frac{1}{r^3}f(\chi',\theta')\,d\sigma\ .$$

Avem

$$\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=-\frac{1}{r}+2R\frac{R-\rho\cos\gamma}{r^3}=-\frac{1}{r}-2R\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\ ;$$

ceeace arată că U este compus din potenţialul unei pături sim-

ple şi al unei pături duble, de densitate şi moment continue U este aşadar, funcţie armonică în tot spaţiul, exceptând punctele aşezate pe suprafaţa S (pe care am luat-o, pentru simplificare, sferică).

Când punctul $P(\rho, \chi, \theta)$ se apropie de punctul $Q_0(R, \chi_0, \theta_0)$ de pe sferă, $U(\rho, \chi, \theta)$ se apropie de $f(\chi_0, \theta_0)$. Pentru a dovedi aceasta, considerăm integrala

$$1 = \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int_S \frac{d\sigma}{r^3} \quad ,$$

dedusă din (4) unde am pus $\varphi = 1$, şi înmulţim ambii membrii cu constanta $f(\chi_0, \theta_0)$; scădem, apoi, rezultatul din (5); obţinem

$$U(\rho, \chi, \theta) - f(\chi_0, \theta_0) = \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int \frac{d\sigma}{r^3}\{f(\chi', \theta',) - f(\chi_0, \theta_0)\} \quad .$$

Să considerăm o porţiune σ din sfera S, care subîntinde un unghi solid cu centrul în Q_0, de deschidere 2α. Putem alege unghiul α astfel încât, fiind dat un $0 < \varepsilon \ll 1$, să avem pe σ

$$|f(\chi', \theta') - f(\chi_0, \theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

In aceste condiţii, din (5) rezultă

$$\left|\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^3}\{f(\chi', \theta') - f(\chi_0, \theta_0)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^3} = \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Să luăm punctul P în interiorul unui con coaxial cu cel subîntins de σ, dar de unghi α, astfel încât, dacă Q se găseşte pe porţiunea de suprafaţă $S-\sigma$, din S, să avem

$$\cos\gamma \leqq \cos\alpha \quad ; \quad r^2 \geqq \rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos\alpha \quad ,$$

Fie r_0 valoarea maximă a lui r şi μ marginea superioară a lui $|f(\chi, \theta)|$ pe S. Avem

$$\left|\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int_{S-\sigma} \frac{d\sigma}{r^3}\{f(\chi', \theta') - f(\chi_0, \theta_0)\}\right| < \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\frac{2\mu}{r_0^3}4\pi R^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

pentru un $R^2-\rho^2$ suficient de mic. Aşadar, în definitiv,

$$|U(\rho, \chi, \theta) - f(\chi_0, \theta_0)| < \varepsilon \quad ,$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, funcţia $U(\rho, \chi, \theta)$ este continuă şi ia valori date dinnainte pe suprafaţa de frontieră. Ea rezolvă aşadar, problema lui DIRICHLET pentru sferă. Mai mult, integrala lui POISSON rezolvă problema lui DIRICHLET şi pentru regiunea infinită, *exterioară* sferei. In adevăr, am văzut că U este suma potenţialelor unei distribuţii de pătură simplă şi al unei distribuţii de pătură dublă, de moment

$$\tau = -\frac{1}{2\pi} f(\chi', \theta') \quad .$$

Prin urmare,

$$U_+ - U_- = 4\pi\tau = -2f(\chi', \theta') \quad .$$

Cum, însă, am arătat mai sus că $U_- = f(\chi', \theta')$, rezultă că $U_+ = -f(\chi', \theta')$. Prin urmare,

$$U(\rho, \chi, \theta) = \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R} \int_S \frac{d\sigma}{r^3} f(\chi', \theta') \quad ,$$

este o funcţie armonică în exteriorul sferei, regulată la infinit, luând valori determinate pe frontieră. [1]

---

[1]) Pentru desvoltări mai ample ale acestor chestiuni, privind mai mult Analiza matematică, se poate consulta orice tratat de specialitate; în special, ne-am folosit de KELLOGG l. c.

CAP. V

Potenţialul logaritmic

181. Potenţialul unui cilindru circular omogen, infinit asupra unui punct exterior. Luăm axa cilindrului ca axă de z. Fie $P(x, y, 0)$ punctul exterior. Potenţialul va fi independent de z. Problema este plană. In planul x, y, potenţialul $\varphi(x, y)$ trebue să satisfacă ecuaţiei lui LAPLACE

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

sau, în coordonate polare,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 .$$

Dar, cilindrul fiind circular, φ este independent de θ. Aşadar,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \; ; \; \frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0 .$$

Integrând, obţinem

$$r\frac{d\varphi}{dr} = C \text{ (const.)}$$

şi, în definitiv,

$$\varphi = C \log r + C' .$$

Constanta C' nu este esenţială, potenţialul fiind determinat până la o constantă aditivă. Convenim s'o luăm egală cu zero; ceeace însemnează $\varphi = 0$ pentru $r = 1$.

Forţa atractivă $\overline{F} = -\text{grad}\,\varphi$, este, prin urmare,

$$\overline{F} = -\frac{C}{r^2}\overline{r} \; ;$$

Scanned with OKEN Scanner

invers proporţională cu distanţa punctului atras la generatoarea cilindrului.

In general, fie m massa distribuită continuu *într'un plan.* Un element de massă $dm = \rho\, d\sigma$ (unde ρ este densitatea superficială, funcţie continuă) atrage un punct (de massă egală cu unitatea) *din plan*, cu forţa $-dm/r$; potenţialul respectiv este, prin urmare, $dm \log r$. Potenţialul total este

$$\varphi = \int_S dm \log r = \int_S \rho \log r \, d\sigma \,. \tag{1}$$

In mod analog, dacă avem o distribuţie materială, continuă, de densitate $\varkappa$ (funcţie continuă) dealungul unei curbe plane (C), potenţialul total este

$$\varphi = \int_C \varkappa \log r \, ds \,. \tag{2}$$

Expresiile (1) şi (2) poartă numele de *potenţiale logaritmice.*

182. Proprietăţi. I. *Potenţialul logaritmic este limita unui potenţial newtonian.* Fie o distribuţie continuă de densitate $\varkappa = \varkappa(\xi, \eta)$ într'un cilindru cu generatoarea paralelă cu axa de z, şi a cărui secţiune prin planul x, y, să constitue o regiune plană regulată A. Cilindrul să fie limitat de secţiunile $z = -\alpha$, $z = +\beta$. Fie $P(x, y, 0)$ un punct atras şi r distanţa lui la un punct al cilindrului; fie r' proiecţia lui r pe planul x, y.

In § 159 am rezolvat problema atracţiei newtoniene într'un caz identic, cu unele schimbări, evidente, de notaţii. Am găsit potenţialul newtonian

$$\varkappa \log \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + r'^2}}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + r'^2}} \,. \tag{3}$$

Pentru a trece la potenţialul logaritmic, după cele ce am constatat în paragraful precedent, trebue să căutăm limita expresiei (3) când α şi β sunt făcute infinite (astfel ca cilindrul să fie extins la infinit). Aşadar, potenţialul logaritmic va trebui să rezulte din limita

$$\varphi = \lim_{\substack{\alpha \to \infty \\ \beta \to \infty}} \int_A \varkappa \log \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + r'^2}}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + r'^2}} + C \,;$$

ceeace vrem să verificăm. Constanta C să fie determinată sub condiţia — justificată în exemplul precedent — ca φ să se anuleze pentru $r' = 1$. Avem,

$$\varphi = \lim_{\substack{\alpha \to \infty \\ \beta \to \infty}} \int_A \varkappa \log \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + r'^2}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + 1}} \cdot \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + r'^2}} \right) d\sigma .$$

Înmulţim şi împărţim al doilea factor de sub semnul „log“ cu conjugatele respective; obţinem

$$\varphi = \lim_{\substack{\alpha \to \infty \\ \beta \to \infty}} \int_A \varkappa \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{r'^2}{\beta^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{r'^2}{\alpha^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}}} \cdot \frac{1}{r'^2} \right) d\sigma .$$

Cum punctul P se găseşte într'o regiune finită, r' nu poate să crească peste orice limită, şi deci, radicalii ce apar în expresia precedentă tind către unitate în mod uniform. Rezultă, în adevăr, ceeace am vrut să demonstrăm

$$\varphi = \int_A 2\varkappa \log \left(\frac{1}{r'} \right) d\sigma .$$

II. *Potenţialul logaritmic satisface ecuaţiei lui* Poisson, *în interiorul massei atractive.* Observăm că în expresia potenţialului logaritmic, în locul densităţii $\varkappa$ apare *dublul* acestei mărimi, $2\varkappa$.

Dacă, prin urmare, potenţialul de volum, în interiorul regiunii cilindrice (plină cu materie) limitată de două plane paralele, satisface ecuaţiei lui Poisson

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho ,$$

potenţialul logaritmic

$$\varphi = \int_A \varkappa \log \frac{1}{r'} d\sigma$$

satisface ecuaţiei lui Poisson, în interiorul regiunii *plane* considerate,

$$\Delta\varphi = -2\pi\varkappa , \tag{5}$$

căci, din procesul la limită lămurit mai sus, rezultă că trebue să punem $\varkappa = 2\rho$.

183. Potențial logaritmic de pătură simplă și pătură dublă. I. Fie o funcție continuă, care ia o valoare determinată în fiecare punct Q al unei curbe plane închisă (C). Să luăm ca parametru al curbei însuși arcul s, măsurat dela o origină fixă pe curbă. Integrala definită

$$\varphi_s(x,y)=\int_C \varkappa(s)\log r\,ds \quad , \tag{6}$$

unde r este distanța unui punct $P(x,y)$ din plan, la un punct $Q(\xi,\eta)$ de pe curbă, reprezintă o funcție armonică de coordonatele (x,y).

Integrala (6) se numește *potențial logaritmic de pătură simplă*. Funcția φ_s este continuă în punctele de pe curbă. In adevăr, integrala (6) este uniform convergentă în interiorul unui cerc (c), infinitesimal, cu centrul într'un punct Q_0 de pe curba (C). Pentru a arăta aceasta, să luăm un sistem de coordonate (ξ,η) cu origina în Q_0 având ca direcții tangenta și normala la curbă în Q_0. Fie (C_0) arcul din (C) tăiat de (c), având ca ecuație $\eta=f(\xi)$, unde $-\varepsilon\leqq\xi\leqq+\varepsilon$; $(0<\varepsilon\ll 1)$.

Fie un cerc (c_ρ) de rază $\rho\leqq\varepsilon$ și un punct $P(x,y)$ interior cercului c_ρ. Să alegem cercul (c) astfel încât arcul (C_0) tăiat de el din curba (C) să fie mai mic decât $^1/_2$. In aceste condiții, distanța r a punctului P la un punct de pe (C_0) va fi inferioară unității. Fie μ limita superioară a mărimii $|\varkappa|\sqrt{1+f'^2(\xi)}$ pe (C_0). Vom avea

$$\left|\int_{C_0}\varkappa\log r\,ds\right|<\mu\int_{-\varepsilon}^{+\xi}\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi$$

$$<\mu\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\log|x-\xi|\,d\xi<2\mu\int_0^{2\xi}\log(t)\,dt\,.$$

Ultima integrală tinde către zero când ε tinde la zero.

II. Să considerăm integrala

$$\varphi_d(x,y)=\int_C \varkappa(s)\frac{\cos\theta}{r}\,ds \quad , \tag{7}$$

unde θ este unghiul făcut de $\overrightarrow{QP}$ cu direcția pozitivă a normalei la (C) în punctul Q. Funcția φ_d este armonică în x,y, — ex-

cluzând punctele de pe curba (C), pentru cari funcţia (7) este discontinuă. Numim această funcţie, φ_d, *potenţial logaritmic de pătură dublă.*

Studiul integralei (7) este asemănător studiului pe care l-am expus în § 170 asupra integralei care reprezintă potenţialul de pătură dublă.

Observăm, în primul rând, că integrala

$$\int_C \frac{\cos\theta}{r}\,ds = \begin{cases} 2\pi, & \text{când punctul } P \text{ este interior lui } (C)\,; \\ 0\,, & \text{„ „ „ „ exterior „ „}\,; \\ \pi\,, & \text{„ „ „ „ un punct regulat pe } (C)\,; \\ \alpha\,, & \text{„ „ „ „ „ „ de întoarcere pe } (C); \end{cases}$$

unde α este unghiul făcut de cele două tangente, în punctul de întoarcere, la curba (C).

Fie Q_0 un punct regulat de pe curba (C) şi fie (C') un arc suficient de mic pe (C), pe care este aşezat Q_0, astfel încât, pe acest arc, funcţia $\varkappa$ să varieze foarte puţin, — deci, să fie egală cu valoarea sa $\varkappa_0$ în Q_0. Pentru un punct P interior lui (C), foarte apropiat de Q_0, avem

$$\int_{C'} \varkappa \frac{\cos\theta}{r}\,ds = \pi\varkappa_0 = \pi\varkappa(Q_0)\quad .$$

Să considerăm integrala

$$I(P) = \int_{C'} (\varkappa - \varkappa_0)\frac{\cos\theta}{r}\,ds\quad ;$$

ea este uniform-convergentă în vecinătatea punctului Q_0. In adevăr, putem lua cercul (C) aşa de mic, încât pe (C'),

$$|\varkappa(Q) - \varkappa(Q_0)| < \varepsilon\,.$$

Atunci,

$$\left|\int_{C'} (\varkappa - \varkappa_0)\frac{\cos\theta}{r}\,ds\right| < 2\pi\varepsilon\,,$$

valoare, care poate să fie făcută oricât de mică.

Fie, acum, φ_0 valoarea integralei (7) în punctul Q_0 şi φ_-, φ_+ valorile limite ale aceleiaşi integrale când P tinde către Q_0 (luat ca punct regulat) pe direcţia normalei negative (din

exteriorul curbei spre Q_0), resp. pe direcţia normalei pozitive (din interiorul curbei spre Q_0). Avem

$$I(Q_0) = \varphi_0 - \pi \varkappa_0 \quad ;$$

$$\lim_{P \to Q_0} I(P) = \begin{cases} \varphi_+ - 2\pi \varkappa_0 \text{ , când } P \to Q_0 \text{ prin interior ,} \\ \varphi_- \qquad\qquad \text{, " " " exterior .} \end{cases}$$

Continuitatea funcţiei $I(P)$ în punctul Q_0 conduce la egalităţile

$$\varphi_0 - \pi \varkappa_0 = \varphi_+ - 2\pi \varkappa_0 = \varphi_- \ .$$

Aşadar,

$$\varphi_+ = \varphi_0 + \pi \varkappa_0 \ ; \ \varphi_- = \varphi_0 - \pi \varkappa_0 \ ;$$

de unde

$$\varphi_+ - \varphi_- = 2\pi \varkappa_0 \ , \tag{8}$$

relaţie similară relaţiei (13) § 170, care exprima condiţia de existenţă a păturii duble.

184. Formula lui Green în plan. In § 117 am stabilit formulele lui Green pentru spaţiul euclidian tridimensional. In mod analog se pot stabili aceste formule şi pentru cazul mai simplu al planului. Fie $\varphi(x, y)$ şi $\psi(x, y)$ două funcţii regulate într'un domeniu D al planului, limitat de curba închisă (C). Integrând identitatea

$$\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

dealungul regiunii considerate D, obţinem

$$\int_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)\, dx\, dy = \int_C \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy - \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx \ .$$

Fie α, β (dela 0 la π) unghiurile făcute de tangenta la (C), în sensul pozitiv, cu axele de coordonate; α', β' unghiurile făcute de direcţia normalei *exterioare* la (C), cu axele de coordonate. Avem

$$\int_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)\, dx\, dy =$$

$$= \int_C \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha' + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \beta'\right) ds - \int_C \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha' + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \beta'\right) ds \ ,$$

căci, $\cos\beta' = \cos\alpha$ şi $\cos\alpha' = -\cos\beta$; aşadar,

$$dx = \cos\beta'\, ds\ ,\quad dy = -\cos\alpha'\, ds\ .$$

In definitiv, din relaţia precedentă deducem ($\overline{n}$ fiind normala exterioară lui (C)),

$$(9)\qquad \int_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dx\, dy = \int_C \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right) ds$$

admiţând că derivatele ce figurează în membrul al doilea au valori finite pe contur. Relaţia (9) exprimă formula lui GREEN în plan.

185. Cazul funcţiilor armonice. Dacă funcţiile φ şi ψ sunt armonice, $\Delta\varphi = 0$, $\Delta\psi = 0$, iar formula generală (9) devine

$$(10)\qquad \int_C \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) ds = 0\ .$$

Să considerăm un punct $P(a, b)$ al domeniului D şi un punct variabil $Q(x, y)$ în D. Să punem $\psi = \log r$, unde $r = \overline{PQ}$. Să aplicăm formula (10) domeniului D' limitat de curba (C) şi de un cerc (c) cu centrul în P şi de raza ρ, suficient de mică pentru ca (c) să fie conţinut în întregime în D. Fie o funcţie φ regulată în D'. Avem

$$(11)\qquad \int_C \left(\varphi\frac{d\,\log r}{dn} - \log r\frac{d\varphi}{dn}\right) ds - \int_c \left(\varphi\frac{d\,\log r}{dn} - \log r\frac{d\varphi}{dn}\right) ds = 0\ .$$

Cum, pe cercul (c), $ds = \rho\, d\theta$, observăm că integrala

$$\int_0^{2\pi} \rho\log\rho\frac{d\varphi}{dn}\, d\theta$$

tinde către zero odată cu ρ. Pentru prima integrală din membrul al doilea observăm că $\frac{d\,\log r}{dn} = -\frac{1}{\rho}$; deci, putem scrie, în definitiv, pentru această integrală

$$-\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi} \{\varphi(a, b) + \varepsilon\}\, d\theta = -2\pi\varphi(a, b)\ .$$

Acestea fiind stabilite, din (11) se deduce formula definitivă

$$(12) \qquad \varphi(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\varphi \frac{d \log r}{dn} - \log r \frac{d\varphi}{dr}\right) ds,$$

luând, ca de obicei, normala *exterioară* curbei (C).

186. Integrala lui Poisson, în cazul problemei plane. Să luăm drept curbă (C) un *cerc* de rază R şi să considerăm funcţia potenţială

$$\psi(a,b) = \int_C \varphi(Q) \frac{\cos\theta}{r} ds \quad ,$$

unde Q este un punct al cercului (C), r fiind distanţa lui $P(a,b)$ la punctul Q şi θ unghiul făcut de $\overrightarrow{PQ}$ cu normala pozitivă la cerc în Q.

Când punctul P coincide cu un punct Q al cercului (C), atunci,

$$\lim \frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{2R} .$$

Prin urmare,

$$\varphi(P) = \int_C \varphi(Q) \frac{ds}{2R} \text{(constantă).}$$

Am demonstrat în § 183 că, dacă P este un punct interior cercului şi tinde către un punct Q_0 de pe cerc, atunci, $\psi(a,b)$ tinde către

$$\pi\varphi(Q_0) + \int_C \varphi(Q) \frac{ds}{2R} .$$

Funcţia

$$(13) \qquad \varphi(P) = \frac{1}{\pi}\int_C \varphi(Q) \left\{\frac{\cos\theta}{r} - \frac{1}{2R}\right\} ds$$

rezolvă problema lui Dirichlet pentru cerc. Integrala precedentă a fost scrisă de Poisson sub forma următoare. Să luăm coor-

Scanned with OKEN Scanner

nate polare (polul fiind în centrul cercului) astfel, încât punctele P şi Q să poseadă coordonatele ρ, χ resp. R, ψ. Cum $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\chi$; $r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\psi - \chi)$, formula (13) se scrie sub forma dată de Poisson

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{R^2-\rho^2}{r^2}d\psi \ ,$$

sau,

$$(14) \qquad \varphi(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{(R^2-\rho^2)\,d\psi}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\chi)} \ ,$$

unde am pus $f(\psi)$ în loc de $\varphi(Q)$. Această formulă exprimă integrala lui Poisson pentru problema plană.

187. Aplicaţie la seria lui Fourier. Integrala lui Poisson pentru plan oferă o interesantă aplicaţie în teoria seriilor trigonometrice.

Să luăm, pentru simplificare, $R = 1$ şi $\psi - \chi = \omega$, în membrul al doilea al formulei (14), şi să considerăm descompunerea evidentă

$$(15) \qquad \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\omega+\rho^2} = -1 + \frac{1}{1-\rho e^{i\omega}} + \frac{1}{1-\rho e^{-i\omega}}$$

Pe de altă parte, observând că $\rho < 1$, putem desvolta în serie expresiile următoare

$$\left(1-\rho e^{i\omega}\right)^{-1} = 1 + \rho e^{i\omega} + \rho^2 e^{2i\omega} + \cdots + \rho^n e^{ni\omega} + \cdots \ ,$$

$$\left(1-\rho e^{-i\omega}\right)^{-1} = 1 + \rho e^{-i\omega} + \rho^2 e^{-2i\omega} + \cdots + \rho^n e^{-ni\omega} + \cdots \ .$$

Adunând aceste două expresii, obţinem, după (15),

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\omega+\rho^2} = 1 + 2\sum_1^{+\infty}\rho^n\cos n\omega .$$

Seria din membrul al doilea este *uniform* convergentă ($\rho < 1$). Punem $\omega = \psi - \chi$, înmulţim cu $f(\psi)$ şi integrăm dela

zero la 2π prin raport cu ψ; rezultă, dacă avem în vedere relaţia (14),

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n \int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi-\chi)\,d\psi\ ;$$

sau,

$$(16)\qquad \varphi(\rho,\chi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n (a_n \cos n\chi + b_n \sin n\chi)\ ,$$

unde a_n şi b_n sunt coeficienţii seriei FOURIER şi se obţin integrând expresia (16) pe cercul de convergenţă (de rază unu):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\chi)\cos n\chi\,d\chi\ ,$$

$$(17)\qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\chi)\sin n\chi\,d\chi\ ;$$

funcţia $\varphi(P)$ fiind continuă în intervalul $(0, 2\pi)$.

Cu ajutorul relaţiei

$$\cos nx + i\sin nx = e^{inx}\ ,$$

putem scrie desvoltarea (16) sub forma

$$\varphi(P) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{in\chi}\ ,$$

unde avem

$$2\alpha_n = \rho^n (a_n - i\,b_n) \ldots n > 0$$
$$2\alpha_n = \rho^{-n} (a_{-n} + i\,b_{-n}) \ldots n < 0$$
$$2\alpha_0 = a_0\ .$$

Atunci (17) devine

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\chi)\,e^{-in\chi}\,d\chi\ .$$

Asupra aplicaţiilor multiple ale seriilor şi integralelor lui FOURIER în problemele de Fizică matematică se poate consulta HILBERT-COURANT, l. c. I. p. 46–66.

CAP. VI

Introducere în „Ecuaţiile Fizicii matematice“

Mecanica raţională rezolvă problemele de mişcare ale punctului material şi corpului rigid cu ajutorul ecuaţiei diferenţiale ordinare al cărei studiu este bine cunoscut din elementele de Analiză matematică. (v. *Mecanica*).

In chestiunile de „Fizică a câmpului“, — după cum am văzut şi din chestiunile tratate până acum în această expunere, — apar ecuaţiile lui Poisson şi Laplace, ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, al cărui studiu aprofundat face obiect al Analizei matematice. Dat fiind că multe fenomene fizice, — printre care enumărăm: potenţialul gravitaţional, potenţialul electrostatic în dielectric, potenţialul magnetic în spaţiul gol sau ocupat de materie, în teoria curenţilor electrici, problema distribuţiei temperaturii în teoria echilibrului termic la solide, mişcarea irotaţională a fluidelor în mişcare, etc., — ecuaţiile lui Laplace şi Poisson constitue instrumentul analitic fundamental necesar rezolvării numitelor probleme, vom rezuma, în acest capitol, câteva din proprietăţile esenţiale ale acestor ecuaţii.

Pe de altă parte, este instructiv să punem în faţa studentului, spre orientare, şi celelalte tipuri de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale pe care le poate întâlni în studiul altor probleme de Fizică teoretică: mişcarea ondulatorie (teoria undelor luminoase, sonore, şi în general, vibraţiile mediilor continue cu un număr finit sau infinit de grade de libertate), propagarea căldurii, propagarea undelor în cablurile telegrafice, etc. Toate aceste chestiuni se găsesc tratate în numeroase publicaţii străine, la care trimetem pentru aprofundarea studiului lor. In capitolul de faţă, vom schiţa numai proprietăţile esenţiale ale ecuaţiilor respective în intenţia de a familiariza studentul ro-

mân cu acest soi de probleme clasice şi moderne ale Fizicii teoretice, precum şi al interesantelor probleme de Technică.

188. O soluţie generală a ecuaţiei lui LAPLACE, sub formă de integrală definită [1]). Să presupunem că $\varphi(x, y, z)$ este o soluţie a ecuaţiei lui LAPLACE $\Delta\varphi = 0$, şi că ea poate să fie desvoltată în serie de puteri prin raport cu variabilele x, y, z, în vecinătatea unui punct dat x_0, y_0, z_0 :

$$\varphi = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(X, Y, Z), \tag{1}$$

unde φ_n este un polinom omogen de gradul n, şi

$$X = x - x_0 \; ; \; Y = y - y_0 \; ; \; Z = z - z_0 \; .$$

Admitem că funcţia φ este analitică în x_0, y_0, z_0, deci că seria (1) este absolut convergentă pentru

$$|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2 \leqq A, \tag{2}$$

unde A este o constantă pozitivă. Această ipoteză este satisfăcută de funcţiile ce apar în problemele de Fizîcă matematică.

Teoremele generale ale Analizei matematice ne permit să afirmăm că seria (1) este uniform convergentă şi poate fi derivată de câteori vrem în raport cu X, Y, Z, termen cu termen, în domeniul definit de inegalitatea (2).

Introducând desvoltarea (1) în ecuaţia lui LAPLACE, obţinem un număr de $\frac{1}{2} n(n-1)$ relaţii de condiţie între cei $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coeficienţi ai polinomului φ_n. Vom avea astfel, de fapt, în (1), numai $\frac{1}{2}(n+2)(n+1) - \frac{1}{2} n(n-1) = 2n+1$ coeficienţi independenţi în φ_n (compară cu enumerarea făcută la § 141). Prin urmare, termenii de gradul n, în φ, trebue să fie o combinaţie liniară de $2n+1$ soluţii particulare independente, de gradul n. Pentru a găsi un grup de astfel de soluţii, să considerăm soluţia particulară de gradul n

$$\varphi = (Z + iX\cos u + iY\sin u)^n \tag{3}$$

unde $i = \sqrt{-1}$, şi u este un parametru care ia valori cuprinse între $-\pi$ şi $+\pi$.

---

[1]) v. WHITTAKER, l. c. Cap. XVIII ; HILBERT-COURANT, l. c.; RIEMANN-WEBER, *Differentialgleichungen der Physik* ; J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris 1903 ; E. GOURSAT Cours d'Analyse math. v. 3.

Avem

$$(4)\qquad (Z+iX\cos u+iY\sin u)^n = \sum_{m=0}^{n}\{\alpha_m(X,Y,Z)\cos mu+\beta_m(X,Y,Z)\sin mu\}\ ,$$

unde α_m şi β_m sunt funcţii (polinomi) numai de X, Y, Z.

După teoria seriilor lui FOURIER, coeficienţii desvoltării (4) se scriu

$$\pi\alpha_m(X,Y,Z)=\int_{-\pi}^{+\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n\cos(mu)\,du,$$

$$(5)\qquad \pi\beta_m(X,Y,Z)=\int_{-\pi}^{+\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n\sin(mu)\,du.$$

Orice combinaţie liniară de $2n+1$ soluţii (3), independente, corespunzătoare la valori particulare, generice, ale lui u, se va scrie, după (4) şi (5) sub forma

$$(6)\qquad \varphi_n=\int_{-\pi}^{+\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n f_n(u)\,du\ ,$$

unde $f(u)$ este o combinaţie liniară de cantităţile

$$\cos mu,\ \sin mu\quad (m=0,1,2,\ldots n)\ ,$$

deci o funcţie raţională de e^{iu}. Cum am admis că seria (6) este uniform-convergentă, în domeniul definit prin relaţia (2), rezultă că putem scrie

$$\varphi=\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n f_n(u)\,du\ .$$

In definitiv, o soluţie generală a ecuaţiei lui LAPLACE poate fi scrisă sub forma

$$\varphi=\int_{-\pi}^{+\pi}F(Z+iX\cos u+iY\sin u\ ;\ u)\,du\ .$$

Reciproc, dacă funcţia F, de sub semnul integralei, admite derivate parţiale de ordinul întâi şi al doilea, continue, se verifică fără dificultate că ea satisface ecuaţiei $\Delta\varphi = 0$.

Punând în evidenţă variabilele iniţiale x, y, z, (şi introducând termenii în z_0, $ix_0 \cos u$, $iy_0 \sin u$ în expresia variabilei u), o soluţie generală a ecuaţiei lui LAPLACE se poate scrie

$$(6') \qquad \varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + ix\cos u + iy\sin u\ ;\ u)\, du\,,$$

dacă funcţia f permite efectuarea derivări parţiale prin raport cu x, y, z, sub semnul integralei.

189. Soluţii a ecuaţiei lui LAPLACE exprimate cu ajutorul funcţiilor lui LEGENDRE. Dacă în desvoltarea (6) punem

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0\ ,$$

seria obţinută se exprimă în termeni de forma

$$(7) \qquad I_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos(mu)\ du\ ,$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \sin(mu)\ du\ ,$$

unde m şi n sunt întregi, astfel încât $0 \leqq m \leqq n$.

Să introducem coordonate polare în expresiile (7)

$$x = r\sin\theta\cos\psi\ ;\ y = r\sin\theta\sin\psi\ ;\ z = r\cos\theta\ ;$$

avem

$$I_1 = r^n \int_{-\pi}^{+\pi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos(u-\psi)\}^n \cos(mu)\, du\ ,$$

sau, punând $u - \psi = \chi$ şi observând că limitele $(\pi-\psi, -\pi-\psi)$ se pot reduce la $(-\pi, +\pi)$, obţinem

derivate parțiale de ordinul întâi și al doilea, continue, se verifică fără dificultate că ea satisface ecuației $\Delta\varphi = 0$.

Punând în evidență variabilele inițiale x, y, z, (și introducând termenii în z_0, $ix_0 \cos u$, $iy_0 \sin u$ în expresia variabilei u), o soluție generală a ecuației lui LAPLACE se poate scrie

$$\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + ix\cos u + iy\sin u\ ;\ u)\, du, \tag{6'}$$

dacă funcția f permite efectuarea derivări parțiale prin raport cu x, y, z, sub semnul integralei.

189. Soluții a ecuației lui LAPLACE exprimate cu ajutorul funcțiilor lui LEGENDRE. Dacă în desvoltarea (6) punem

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0\ ,$$

seria obținută se exprimă în termeni de forma

$$I_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos(mu)\, du\ ,$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \sin(mu)\, du\ , \tag{7}$$

unde m și n sunt întregi, astfel încât $0 \leqq m \leqq n$.

Să introducem coordonate polare în expresiile (7)

$$x = r\sin\theta\cos\psi\ ;\ y = r\sin\theta\sin\psi\ ;\ z = r\cos\theta\ ;$$

avem

$$I_1 = r^n \int_{-\pi}^{+\pi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos(u-\psi)\}^n \cos(mu)\, du\ ,$$

sau, punând $u - \psi = \chi$ și observând că limitele $(\pi - \psi, -\pi - \psi)$ se pot reduce la $(-\pi, +\pi)$, obținem

Reciproc, dacă funcţia F, de sub semnul integralei, admite derivate parţiale de ordinul întâi şi al doilea, continue, se verifică fără dificultate că ea satisface ecuaţiei $\Delta\varphi = 0$.

Punând în evidenţă variabilele iniţiale x, y, z, (şi introducând termenii în z_0, $ix_0 \cos u$, $iy_0 \sin u$ în expresia variabilei u), o soluţie generală a ecuaţiei lui LAPLACE se poate scrie

$$(6') \qquad \varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + ix\cos u + iy \sin u \; ; \; u)\, du,$$

dacă funcţia f permite efectuarea derivări parţiale prin raport cu x, y, z, sub semnul integralei.

189. Soluţii a ecuaţiei lui LAPLACE exprimate cu ajutorul funcţiilor lui LEGENDRE. Dacă în desvoltarea (6) punem

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \;,$$

seria obţinută se exprimă în termeni de forma

$$(7) \qquad I_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy \sin u)^n \cos(mu)\, du \;,$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy \sin u)^n \sin(mu)\, du \;,$$

unde m şi n sunt întregi, astfel încât $0 \leqq m \leqq n$.

Să introducem coordonate polare în expresiile (7)

$$x = r \sin\theta \cos\psi \;;\; y = r \sin\theta \sin\psi \;;\; z = r\cos\theta \;;$$

avem

$$I_1 = r^n \int_{-\pi}^{+\pi} \{\cos\theta + i \sin\theta \cos(u - \psi)\}^n \cos(mu)\, du \;,$$

sau, punând $u - \psi = \chi$ şi observând că limitele $(\pi - \psi, -\pi - \psi)$ se pot reduce la $(-\pi, +\pi)$, obţinem

$$I_1 = r^n \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos\chi)^n \cos m(\psi + \chi)\, d\chi$$

$$= r^n \cos(m\psi) \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos\chi)^n \cos(m\chi)\, d\chi \ ,$$

integrandul fiind periodic în χ, iar $(\cos\theta + i \sin\theta \cos\chi)^n \sin m\chi$ fiind o funcţie impară. Din definiţia funcţiilor lui LEGENDRE asociate, deducem

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy \sin u)^n \cos(mu)\, du = \frac{2\pi i^m . n!}{(n+m)!} r^n P_n^m(\cos\theta)\cos(m\psi) ;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy \sin u)^n \sin(mu)\, du = \frac{2\pi i^m . n!}{(n+m)!} r^n P_n^m(\cos\theta)\sin(m\psi) .$$

Concludem ; polinomii în x, y, z : $r^n P_n^m(\cos\theta \cos m\psi$; $r^n P_n^m(\cos\theta) \sin m\psi$ sunt soluţii particulare ale ecuaţiei lu LAPLACE. Orice soluţie $\varphi(x, y, z)$ a ecuaţiei lui LAPLACE, care este funcţie analitică în vecinătatea originii, poate să fie exprimată prin desvoltarea

$$(8) \qquad \varphi(r, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \{A_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (A_n^m \cos m\psi + B_n^m \sin m\psi) P_n^m \cos\theta)\} .$$

Dacă seria din membrul al doilea este convergentă pentru $r = R$, şi $0 \leqq \theta \leqq \pi$; $-\pi \leqq \psi \leqq +\pi$, ea este absolut şi uniform convergentă pentru $r < R$.

190. Soluţie a ecuaţiei lui LAPLACE exprimată prin funcţii sferice. Să presupunem că soluţia (8) a ecuaţiei lui LAPLACE este obligată să ia valori date $f(\theta, \psi)$ pe suprafaţa unei *sfere* de rază R :

$$(9) \qquad f(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \{A_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (A_n^m \cos m\psi + B_n^m \sin m\psi) P_n^m(\cos\theta)\}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde presupunem că seria din membrul al doilea este uniform convergentă în domeniul

$$0 \leqq \theta \leqq \pi \; ; \; -\pi \leqq \psi \leqq +\pi \; .$$

Inmulţind (9) cu $P_n^m(\cos\theta)\cos m\psi \sin\theta$ şi $P_n^m(\cos\theta)\sin m\psi \sin\theta$, integrând termen cu termen şi ţinând seamă de § 135, obţinem

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta',\psi')\, P_n^m(\cos\theta')\cos m\psi' \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = \pi R^n \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} A_n^m \; ;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta',\psi')\, P_n^m(\cos\theta')\sin m\psi' \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = \pi R^n \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} B_n^m \; ;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta',\psi')\, P_n^m(\cos\theta')\sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = 2\pi R^n \frac{2}{2n+1} A_n .$$

Cum $r < R$, avem

$$4\pi\varphi(r,\theta,\psi) = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta',\psi') \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^n \Big\{ P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta') + \tag{10}$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta')\cos m(\psi-\psi') \Big\} \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi .$$

Să luăm dreapta θ, ψ drept nouă axă populară pentru θ', ψ' ; notăm cu θ_1, ψ_1 valorile lui θ' şi ψ' raportate la această axă. După § 141, formula 40, rezultă $P_n(1) = 1$ şi după § 145 rezultă $P_n^m(1) = 0$. Aşadar,

$$4\pi\varphi(r,\theta,\psi) = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta',\psi') \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta_1)\sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' . \tag{11}$$

191. Soluţii ale ecuaţiei lui Laplace exprimate prin integralele lui Bessel (compară cu § 146). Un caz particular al expresiei (6') este

$$(12) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} e^{k(z+ix\cos u+iy\sin u)}\cos mu\,du\,,$$

unde k este constant şi m întreg. Expresia (12) este o soluţie particulară a ecuaţiei lui LAPLACE, analitică în origină. Introducând coordonatele cilindrice (ρ, ψ, z) ea se poate exprima ca desvoltare în serie de cos $(m\psi)$, cu coeficienţi daţi de integralele lui BESSEL:

$$e^{kz}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\rho\cos(u-\psi)}\cos mu\,du = e^{kz}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\rho\cos v}\cos m(v+\psi)\,dv$$

$$= 2e^{kz}\int_{o}^{\pi} e^{ik\rho\cos v}\cos(mv)\cos(m\psi)\,dv$$

$$= 2e^{kz}\cos(m\psi)\int_{o}^{\pi} e^{ik\rho\cos v}\cos(mv)\,dv\,. \quad (v=u-\psi)$$

Integralele din ultimul membru sunt cunoscute sub numele de integralele lui BESSEL şi se notează cu $\frac{1}{2\pi i^m}J_m(k\rho)$. Asupra calculului acestor integrale precum şi proprietăţilor lor se poate consulta tratatele citate la § 146 precum şi A. GRAY and G. MATHEWS, *Bessel Functions*, Macmillan, London, 1922.

192. Consideraţii asupra „ecuaţiei undelor". Fenomenele fizice de natură ondulatorie se tratează analitic pornindu-se de la ecuaţia fundamentală

$$(13) \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{q^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,,$$

unde Δ este simbolul laplaceian şi q o constantă reală nenulă. Formal, ecuaţia (13) se poate aduce la forma ecuaţiei lui LAPLACE în patru dimensiuni

$$(14) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2}=0\,,$$

punând $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $iqt = x_4$ (und $i = \sqrt{-1}$), — aşadar, introducându-se o variabilă de natură diferită variabilelor reale; sensul fizic al unei astfel de variabile se lămureşte în teoria relativităţii restrânse.

Teoria generală şi completă a ecuaţiei undelor, esenţială în Fizica clasică ondulatorie, face obiect special în Analiza matematică. Şi pentru Fizica modernă, ecuaţia undelor este de mare însemnătate, ea constituind, în formă adecuată, ecuaţia fundamentală a Mecanicii ondulatorii (E. SCHRÖDINGER ; vezi § 199).

După metoda expusă la § 188, care se extinde uşor la cazul a patru variabile, putem scrie o soluţie generală a ecuaţiei (14), sub forma

$$\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(x_4 + ix_1 \sin u \cos v + ix_2 \sin u \sin v + ix_3 \cos u \,;\, u, v)\, du\, dv \,,$$

ceeace, pentru ecuaţia undelor (13), revenind la coordonatele x, y, z, putem scrie

(15)

$$\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + qt \,;\, u, v)\, du\, dv \,,$$

unde f este o funcţie de tipul (3).

Funcţia $\varphi(x, y, zt)$ reprezintă potenţialul de viteză produs de un *grup de unde plane* de tipul

$$f(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + qt \,, u \,, v)$$

care se propagă în direcţia $(\sin u \cos v \,,\, \sin u \sin v \,,\, \cos u)$ cu *viteza de grup* q.

Un caz particular interesant este cazul propagării unui grup de unde care posedă aceiaşi perioadă :

(16)

$$\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{o}^{\pi} e^{ik(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + qt)} f(u, v)\, du\, dv \,.$$

punând $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $iqt = x_4$ (und $i = \sqrt{-1}$), — aşadar, introducându-se o variabilă de natură diferită variabilelor reale; sensul fizic al unei astfel de variabile se lămureşte în teoria relativităţii restrânse.

Teoria generală şi completă a ecuaţiei undelor, esenţială în Fizica clasică ondulatorie, face obiect special în Analiza matematică. Şi pentru Fizica modernă, ecuaţia undelor este de mare însemnătate, ea constituind, în formă adecuată, ecuaţia fundamentală a Mecanicii ondulatorii (E. SCHRÖDINGER; vezi § 199).

După metoda expusă la § 188, care se extinde uşor la cazul a patru variabile, putem scrie o soluţie generală a ecuaţiei (14), sub forma

$$\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(x_4 + ix_1 \sin u \cos v + ix_2 \sin u \sin v + ix_3 \cos u \,;\, u, v)\, du\, dv\,,$$

ceeace, pentru ecuaţia undelor (13), revenind la coordonatele x, y, z, putem scrie

(15)
$$\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + qt \,;\, u, v)\, du\, dv\,,$$

unde f este o funcţie de tipul (3).

Funcţia $\varphi(x, y, zt)$ reprezintă potenţialul de viteză produs de un *grup de unde plane* de tipul

$$f(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + qt, u, v)$$

care se propagă în direcţia $(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ cu *viteza de grup* q.

Un caz particular interesant este cazul propagării unui grup de unde care posedă aceiaşi perioadă:

(16)
$$\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{o}^{\pi} e^{ik(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + qt)} f(u, v)\, du\, dv\,.$$

Potenţialul vitezei, φ, se exprimă, din (16), cu ajutorul funcţiilor lui BESSEL, precum urmează. Introducem coordonate polare

$$x = r \sin\theta \cos\psi \; ; \; y = r \sin\theta \sin\psi \; ; \; z = r \cos\theta .$$

Fie (ω, χ) coordonatele polare ale direcţiei (u, v) raportate la direcţia (θ, ψ) ca axă polară, planul $\chi = 0$ trecând prin Oz, χ este unghiul făcut de meridianul direcţiei (θ, ψ) cu planul P determinat de această direcţie şi de direcţia (u, v); iar ω este unghiul făcut, în planul P, de direcţiile (θ, ψ) şi (u, v). Avem

$$\cos\omega = \cos\theta \cos u + \sin\theta \sin u \cos(\psi - v) . \tag{17}$$

Ducem o sferă de rază egală cu unitatea, cu centrul în O; fie Z, M, M' punctele unde ea este înţepată de direcţiile Oz, (θ, ψ) şi (u, v). Din triunghiul sferic ZMM' deducem

$$\sin u \sin(\psi - v) = \sin\omega \sin\chi , \tag{18}$$

azimutul relativ al meridianelor (u, v) şi (θ, ψ) fiind $\psi - v$.

Cu ajutorul relaţiilor (17) şi (18) funcţia $f(u, v)$ din expresia (16) se va transforma într'o funcţie de $(\theta, \psi \; ; \; \omega, \chi)$. Să o alegem astfel încât $f(u, v)\, du\, dv$ să se transforme într'o *funcţie sferică armonică* de gradul n, de forma

$$F_n(\theta, \psi \; ; \; \omega, \chi) \sin\omega \, d\omega \, d\chi .$$

Expresia (16) devine

$$\varphi = e^{ikqt} \int_{\pi}^{+\pi} \int_{o}^{\pi} e^{ikr \operatorname{sos} \omega} F_n(\theta, \psi \; ; \; \chi) \sin\omega \, d\omega \, d\chi .$$

După consideraţiile dela § 190, putem scrie

$$F_n(\theta, \psi \; ; \; \omega, \chi) = A_n(\theta, \psi) P_n(\cos\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \{A_n^m(\theta, \psi) \cos m\chi + B_n^m \sin m\chi\} P_n^m(\cos\omega),$$

coeficienţii A_n ; A_n^m , B_n^m fiind independenţi de ω şi χ.

Integrând prin raport cu λ, obţinem

$$\varphi = 2\pi e^{ikqt} A_n(\theta, \psi) \int_0^{\pi} e^{ikr\cos\omega} P_n(\cos\omega) \sin\omega \, d\omega$$

$$(19) \quad = 2\pi e^{ikqt} A_n(\theta, \psi) \int_{-1}^{+1} e^{ikr\mu} P_n(\mu) \, d\mu$$

$$= 2\pi e^{ikqt} A_n(\theta, \psi) \int_{-1}^{+1} e^{ikr\mu} \frac{1}{2^n . n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \, d\mu .$$

Ultima integrală, integrată prin părţi de n ori, se transformă, cu ajutorul integralei lui HANKEL (v. WHITTAKER, l. c. pg. 365 şi 398), într'o integrală BESSEL

$$\varphi = (2\pi)^{\frac{3}{2}} i^n e^{ikqt} (kr)^{-1/2} J_{n+1/2}(kr) A_n(\theta, \psi) .$$

După § 190, putem lua pentru $A_n(\theta, \psi)$ o funcţie sferică $P_n^m \cos\theta) \cos m\psi$. Deci, până la un factor neînsemnat, funcţia

$$r^{-1/2} J_{n+1/2}(kr) P_n^m \cos\theta) \cos(m\psi) \cos(qkt)$$

este o soluţie a ecuaţiei undelor.

193. Ecuaţia diferenţială a coardei vibrante, omogene, prezintă cazul cel mai simplu al ecuaţiei undelor într'o singură dimensiune. Coarda să fie întinsă între două puncte fixe x_1 şi x_2 pe abscisă ; iar secţiunea normală prin coardă să fie neglijabilă faţă de lungimea e(l (finită).

Fie $u(x, t)$ deplasarea verticală a unui punct x al coardei, în momentul t, când aceasta vibrează sub acţiunea unei forţe exterioare.

Condiţiile de frontieră sunt, prin aceasta, determinate :

$$(20) \quad u(x_1, t) = u(x_2, t) = 0 \; ; \quad \dot{u}(x_1, t) = \dot{u}(x_2, t) = 0 .$$

Să exprimăm *energia cinetică* (v. *Mecanica* § 42) prin

$$T(t) = \frac{\rho}{2} \int_{x_1}^{x_2} \dot{u}^2(x, t) \, dx$$

ca funcţie de timp; punctul însemnând derivata în raport cu timpul şi ρ densitatea coardei.

Fie S tensiunea imprimată de forţa exterioară care, producând vibraţiile, face ca lungimea coardei să varieze cu Δl. *Lucrul mecanic* (v. *Mecanica* § 38) produs de această funcţie este

$$U = S \cdot \Delta l = S \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx - (x_2 - x_1) \right\} .$$

Pentru deplasări foarte mici putem scrie

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 ,$$

astfel încât rezultă

$$U(t) = \frac{S}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx .$$

Să aplicăm principiul lui Hamilton (v. *Mecanica* § 359): integrala

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \{T(t) - U(t)\}\, dt \tag{21}$$

luată între poziţia (configuraţia) iniţială $t = t_1$ şi configuraţia finală $t = t_2 > t_1$, să fie un extremum:

$$\delta I = 0 ,$$

sub condiţia de frontieră (20). Aceasta înseamnă că funcţia $u(x, t)$ care exprimă fenomenul fizic, dă integralei (21) o valoare extremă prin comparaţie cu valorile pe care i le dă orice funcţie vecină $u^*(x, t)$ care, satisface condiţiilor

$$u^*(x, t_1) \equiv u(x, t_1) \; ; \quad u^*(x, t_2) \equiv u(x, t_2) .$$
$$u^*(x_1, t) = 0 \quad , \quad u^*(x_2, t) = 0 .$$

Să punem

$$u(x, t) = u^*(x, t) + \varepsilon v(x, t) ,$$

unde ε este un număr foarte mic, diferit de zero; trebuine să

fie satisfăcute condițiile

$$v(x, t_1) = v(x, t_2) = 0 \; ; \quad v(x_1, t) = v(x_2, t) = 0 \; .$$

Inlocuind în (21) și neglijând termenii în ε^2, obținem condiția

$$0 = \delta I(\varepsilon) = I(\varepsilon) - I^*(\varepsilon) = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \rho \dot{u}^* \dot{v} - S \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial x} \right\} .$$

Așadar, trebue ca integrala ce figurează în ultimul membru, ca factor al lui ε, să se anuleze. Efectuând o integrare prin părți prin raport cu t a primului termen și prin raport cu x a ultimului termen, rezultă

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} v(x, t) \left\{ -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} dx = 0 \; .$$

Variația $v(x, t)$ fiind arbitrară în domeniul de integrare, urmează că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \tag{22}$$

unde am pus $q^2 = S : \rho$; ecuație, care exprimă mișcarea coardei vibrante de lungime finită și fixată în extremități.

Integrarea ecuației (22), sub condițiile (20), se efectuiază imediat. Pentru simplificare, să alegem unitatea de timp astfel încât $\rho = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$; atunci $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, după (20). Să punem

$$u(x, t) = f(x) \, . \, g(t) \; , \tag{23}$$

ca produs de două funcții care depind separat numai de variabilele x și t. Ecuația (22) devine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : f(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} : g(t) \; , \tag{24}$$

primul membru fiind o funcție numai de x, iar al doilea o funcție numai de t. In aceste condiții, egalitatea precedentă este posibilă numai dacă rapoartele sunt egale cu aceiași constantă $-\lambda$. Rezultă ecuațiile

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \; ; \quad \ddot{g}(t) + \lambda g(t) = 0 \; .$$

Integrala generală a primei ecuații este de forma

$$c_1 e^{+\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} ,$$

de unde rezultă, pentru fenomenul *periodic*, condiția ca λ să fie un număr pozitiv n^2 (v. *Mecanica* § 79). Ținând seamă de condițiile pe contur scrise mai sus, rezultă

$$f(x) = \sin nx .$$

In mod analog,

$$g(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt ,$$

a_n și b_n fiind constante care se deduc din a doua serie de condiții (20).

Am găsit astfel integrala generală a ecuației (22)

$$u(x, t) = \sum_n \sin nx \,(a_n \cos nt + b_n \sin nt) .$$

194. Ecuația membranei omogene elastice oferă un exemplu de ecuație a undelor în două dimensiuni. Procedăm ca și în cazul precedent. Energia cinetică este, D fiind domeniul ocupat de membrană,

$$T(t) = \frac{\rho}{2} \int_D \dot{u}^2 \, dx \, dy ,$$

iar energia potențială

$$U(t) = \frac{S}{2} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx \, dy .$$

Principiul lui Hamilton ne conduce, ca și în cazul precedent, la ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \tag{25}$$

sub condițiile de frontieră

$u(x, y, t_0) = g(x, y)$; adică o anumită deformare inițială ;

$\{u(x, y, t)\}_C = 0$: adică, membrana e fixată dealungul curbei de frontieră C.

Problema se rezolvă considerând ecuația (25) drept o ecuație Lap. ace (cu $z = qit$), după metoda generală. Se obține

astfel soluţia exprimată prin funcţii BESSEL (în coordonate polare)

$$u = J_m(kr)\cos(m\varphi)\cos(qkt)\ ,$$

unde constantele se determină prin condiţiile de contur.

Observaţie. Problemele de tipul celor expuse mai sus conduc, din punct de vedere analitic, la ecuaţii diferenţiale de tip STUUM-LIOUVILLE, şi deci la interesanta problemă a „valorilor proprii" (Eigenwertproblem) [1].

105. Problema lui STURM-LIOUVILLE. „Valori proprii".[2]) Fie o funcţie $y(x)$ continuă şi diferenţiabilă de două ori, în intervalul (x_1, x_2), inclusiv frontierele. Să considerăm expresia diferenţială liniară de ordinul al doilea

$$L(y) \equiv p_0 \frac{d^2y}{dx^2} + P_0 \frac{dy}{dx} + P_1 y\ , \tag{26}$$

unde coeficienţii p_0, P_0 şi p_1 sunt funcţii continue de x în intervalul considerat. Funcţia $p_0(x)$ să fie de două ori diferenţiabilă, putând lua numai valori *pozitive;* iar $P_0(x)$ să fie o dată diferenţiabilă.

Expresia diferenţială adjunctă lui $L(y)$ se defineşte prin

$$M(y) \equiv \frac{d^2}{dx^2}(p_0 y) - \frac{d}{dx}(P_0 y) + p_1 y\ . \tag{27}$$

Condiţia ca $L(y)$ sa fie propria sa adjunctă este

$$L(y) \equiv M(y)\ .$$

Din (26) şi (27) rezultă că, pentru ca această proprietate să fie satisfăcută, trebue să avem

$$P_0(x) = p'_0(x)\ , \tag{28}$$

însemnând cu accente derivatele în raport cu variabila x. In

---

[1]). Cuvântul german „Eigenwert" poaie fi tradus prin „valoare *singulară*". In adevăr, semnificaţia cuvântului „eigen" nu este numai „propriu", ci şi „singular, bizar" : ein eigener Mensch = un om bizar ; eigenartig = bizar, curios. Noi păstrăm denumirea „valori proprii" spre a face distincţie de obicinuita noţiunea „singularităţilor". Literatura engleză foloseşte direct cuvântul german : „*eigen*value".

[2]) v. HILBERT-COURANT, *Methoden der mathematischen Physik*, I, Cap. V, 924 ;

HARRY SCHMIDT, *Einführung in die Theorie der Wellengleichung*, § 14, Leipzig, 1931.

E. WHITTAKER, *Modern Analysis*. Cambridge, 1920.

Scanned with OKEN Scanner

adevăr, să considerăm termenii prin cari $M(y)$ diferă de $L(y)$; efectuând derivările în raport cu x, obținem, pentru primii doi termeni din (27),

$$(p_0 y)'' - (P_0 y)' = p_0 y'' + (2p'_0 - P_0) y' + (p''_0 - P'_0) y \quad .$$

Este evident că membrul al doilea al relației precedente se reduce la primii doi termeni ai expresiei (26) dacă este satisfăcută relația (28).

Dacă $L(y)$ *nu* este propria sa adjuntă, putem transforma această expresie într'una care satisface numitei proprietăți. In adevăr, să înmulțim (26) cu funcția pozitivă

$$q(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{P_0(\xi) - p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi} \quad ;$$

observând că

$$q'(x) = q(x) \frac{P_0 - p'_0}{p_0} \quad ,$$

obținem

$$L^*(y) \equiv q(x) L(y) \equiv q p_0 y'' + (p_0 q' + p'_0 q) y' + q p_1 y \quad ,$$

care satisface condiției (28): coeficientul lui y'' derivat prin raport cu x este evident egal cu coeficientul lui y'.

Astfel stând lucrurile, vom putea considera, fără a restrânge generalitatea, numai expresii diferențiale

$$L(y) \equiv (p_0 y)' + p_1 y \quad , \tag{29}$$

care sunt propriile lor adjunte. Funcția $p_0(x)$ să fie *pozitivă* și odată diferențiabilă.

Formula lui Green. Integrând prin părți expresia (formată din (29)),

$$\int_{x_1}^{x_2} \{y_2 L(y_1) - y_1 L(y_2)\} dx \quad ,$$

obținem, având în vedere definiția (29), formula lui Green

$$\int_{x_1}^{x_2} \{y_2 L(y_1) - y_1 L(y_2)\} dx = \{p_0 (y_2 y'_1 - y_1 y'_2)\}_{x=x_1}^{x=x_2} \quad . \tag{30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația lui STURM-LIOUVILLE este ecuația diferențială liniară și omogenă

$$L(y) + k\rho(x)\,y(x) = 0\,, \tag{31}$$

unde $L(y)$ este dat de (29); k fiind un parametru, iar $\rho(x)$ o funcție pozitivă și continuă în intervalul $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$.

Problema valorilor proprii constă în determinarea valorilor (numite „proprii") ale parametrului k, astfel încât să se poată construi soluții nenule, în intervalul considerat, ale ecuației (31), numite „funcții proprii", *care să satisfacă anumite condiții de frontieră*. Această restricție nu permite alegerea arbitrară a parametrului k, ci limitează alegerea valorilor la o *mulțime numărabilă*.

Pentru simplificare, să luăm drept condiții de frontieră relațiile

$$y(x_1) = y(x_2) = 0\,. \tag{32}$$

Relațiile de ortogonalitate între două funcții proprii. Fie k_1 și k_2 două valori proprii *distincte*, cărora le corespund două funcții proprii y_1 și y_2. Din (31), ținând seamă de relațiile (30) și (32), obținem relația de ortogonalitate

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho\, y_1\, y_2\, dx = 0 \tag{33}$$

căci, prin ipoteză, $k_1 \neq k_2$.

Funcții proprii „normate". Nu restrângem generalitatea dacă admitem că funcțiile proprii y_i satisfac relației „de normare"

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho\, y_i^2\, dx = 1 \tag{34}$$

In adevăr, dacă y_i este o soluție proprie a ecuației STURM-LIOUVILLE, atunci și funcția $c_i y_i$, unde c_i este o constantă, va fi și ea o soluție.

Funcția lui GREEN. Să considerăm o funcție [1]) $G(x;\xi)$ de x conținând un parametru ξ, cuprins în intervalul (x_1, x_2), și satisfăcând condițiilor (32). Această funcție să anuleze expresia diferențială (29) în toate punctele $x \neq \xi$,

$$L\{G(x;\xi)\} = 0 . \tag{35}$$

Mai mult, funcția $G(x;\xi)$ să fie continuă pentru $x_1 \leqq x \leqq x_2$; de asemenea, derivata ei de primul ordin să fie continuă în același interval, dar numai pentru punctele $x \neq \xi$. Din potrivă, într'un astfel de punct, derivata primă a lui G prin raport cu x să sufere discontinuitatea

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi)\right\}_{x=\xi+0} - \left\{\frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi)\right\}_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} . \tag{36}$$

Observăm, în primul rând, că o astfel de funcție este *simetrică*:

$$G(x;\xi) = G(\xi;x) . \tag{37}$$

Această proprietate rezultă din formula lui GREEN (30), punând $y_1 = G(x;\xi)$; $y_2 = G(x;\eta)$, unde $x_1 < \xi < \eta < x_2$, ținând seamă de (36). In adevăr, punând

$$D = p_0(x)\left[G(x;\eta)\frac{\partial}{\partial x}G(x;\xi) - G(x;\xi)\frac{\partial}{\partial x}G(x;\eta)\right] ,$$

avem

$$\left\{D\right\}_{x=x_1}^{x=x_2} = \left\{D\right\}_{x=\xi+0}^{x=x_2} + \left\{D\right\}_{x=\eta+0}^{x=\xi-0} + \left\{D\right\}_{x=x_1}^{x=\eta-0} = 0 .$$

Ecuația diferențială neomogenă

$$L(y) = -p(x) , \tag{38}$$

unde $p(x)$ este o funcție continuă în (x_1, x_2), posedă o soluție [2])

$$y = y(x) = \int_{x_1}^{x_2} G(x;\xi)\, p(\xi)\, d\xi \tag{39}$$

---

[1]) Asupra demonstrației că o astfel de funcție *există*, trimetem la tratatele de Analiză matematică, citate mai sus.

[2]) Compară cu § 154.

care admite o derivată de ordinul al doilea continuă în acelaş interval. Este evident că o astfel de soluţie satisface condiţiilor de frontieră (32), căci integrandul însuşi le satisface, deoarece funcţia lui GREEN, prin definiţie, satisface acestor relaţii.

Să admitem existenţa soluţiei $y(x)$ a ecuaţiei (38) şi să punem $y_1 = y$ şi $y_2 = G(x;\xi)$ în formula lui GREEN. Având în vedere (38), (35) şi (32), obţinem

$$-\int_{x_1}^{x_2} G(x;\xi)\, p(x)\, dx =$$

$$= \left\{ p_0(x) \left[G(x;\xi)\, y'(x) - y(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right] \right\}_{x=\xi+0}^{x=x_2} + \left\{ \ldots \right\}_{x=x_1}^{x=\xi-0}$$

$$= p_0(\xi)\, y(\xi) \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right\}_{x=\xi+0} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right\}_{x=\xi-0} \right]$$

$$= -y(\xi) ;$$

de unde, prin schimbarea lui ξ cu x, — ceeace după (32) este permis — se obţine soluţia (39). Să arătăm, acum, că funcţia (39) satisface ecuaţiei (38). Avem, din (39),

$$y'(x) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi)\, p(\xi)\, d\xi = \int_{x_1}^{x-0} + \int_{x+0}^{x_2} ; \text{ (căci trebue } \xi \neq x) .$$

Aşadar, primul membru al ecuaţiei (38) devine, pentru această funcţie,

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^{x-0} + \int_{x+0}^{x_2} \right) p_0(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi)\, p(\xi)\, d\xi + \int_{x_1}^{x_2} p_1(x)\, G(x;\xi)\, p(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ p_0(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right\} + p_1(x)\, G(x;\xi) \right] p(\xi)\, d\xi +$$

$$+ p_0(x)\, p(x) \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right\}_{\xi=x-0} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right\}_{\xi=x+0} \right] ;$$

aşa dar,

$$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} L[G(x;\xi)]\, p(\xi)\, d\xi +$$

$$+ p_0(x)\, p(x) \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right\}_{x=\xi+0} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} G(x;\xi) \right\}_{x=\xi-0} \right]$$

sau, în definitiv,

$$L(y) = -p(x) ,$$

ceeace dovedeşte că funcţia (39) satisface ecuaţiei (38).

Conexiune cu teoria ecuaţiilor integrale. Să punem în ecuaţia (38)

$$p(x) = k\ \rho(x)\ y(x) \quad .$$

Funcţia (39) devine

$$(40) \qquad y(x) = k \int_{x_1}^{x_2} G(x;\xi)\ \rho(\xi)\ y(\xi)\ d\xi \quad ,$$

ceeace se mai poate transforma prin substituţia

$$y(x)\sqrt{\rho(x)} = y^*(x) \quad ; \quad G(x;\xi)\sqrt{\rho(x)\ \rho(\xi)} = G^*(x;\xi)$$

în

$$(41) \qquad y^*(x) = k \int_{x_1}^{x_2} G^*(x;\xi)\ y^*(\xi)\ d\xi \quad .$$

Problema găsirii unei soluţii (39), care să satisfacă condiţiilor (32) pentru ecuaţia (38) revine, aşadar, la găsirea unei funcţii $y^*(x)$ care să satisfacă ecuaţiei (41), *ecuaţie integrală omogenă de speţa doua*, cu *nucleul simetric* şi *real* $G^*(x;\xi)$.

In teoria ecuaţiilor integrale [1]) se dovedeşte că există o mulţime numărabilă de valori proprii k_i, astfel încât, pentru aceste valori, şi numai pentru ele, există câte o soluţie proprie nenulă $y_i^*(x)$ a ecuaţiei (41). Valorile proprii k_i sunt reale dacă nucleul este real.

---

[1]). v. HILBERT-COURANT, l. c.; E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathematique*, v. 3; A. KNESER, *Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik*, 1922; etc.

Ecuaţia lui Bessel *este de tipul* Sturm-Liouville. In adevăr, ecuaţia lui Bessel (§ 146) poate să fie scrisă sub forma

$$(x\,y')' - \frac{n^2}{x}y + \lambda\,x\,y = 0 \quad ,$$

aşadar, de forma (31). Singura deosebire este că pentru această ecuaţie nu mai este valabilă ipoteza că $p_0(x)$ este pozitivă în tot domeniul $0 \leqq x \leqq 1$, căci $p(0) = 0$. Punctul $x = 0$ este un *punct singular* al ecuaţiei diferenţiale a lui Bessel. Această împrejurare necesită o revizuire a condiţiilor de frontieră. Asupra acestor chestiuni nu este locul să insistăm aici, şi trimetem la tratatele de analiză citate mai sus.

Este clar că şi ecuaţia lui Legendre (§ 143, Nr. 3) este de tip Sturm-Liouville,

$$\{(1 - x^2)\,y'\}' + \lambda y = 0 \quad .$$

Funcţiile lui Legendre sunt singurele soluţii „proprii“ corespunzătoare valorilor proprii $\lambda = n\,(n+1)$ cu $n = 0, 1, 2, \ldots$, ale ecuaţiei precedente (v. Hilbert-Courant, l. c. Cap. V).

196. Principiul lui Huygens. **Ecuaţia lui** Kirchhoff [1]). Fenomenul fizic de propagare a luminii, conceput ca fenomen *ondulator* pentru prima oară de Chr. Huygens, a însemnat o revoluţie în concepţiile fizice cari dominau perioada mecanismului newtonian. G. Kirchhoff, folosind principiul lui Faraday, al „acţiunii locale“ (din aproape în aproape), formulează legea: „starea electromagnetică într'un punct oarecare din spaţiu poate să fie cunoscută dacă se cunoaşte starea electromagnetică pe suprafaţa care închide domeniul mărginit ce conţine izvoare (punctuale) de lumină“. El reduce astfel, problema determinării funcţiei care defineşte starea electromagnetică în fiecare punct din spaţiu, la o „problemă de contur“. Kirchhoff pune în evidenţă faptul că lumina se propagă, într'un mediu oarecare, cu o viteză *finită* q, astfel încât, în momentul t vom observa, într'un punct P fenomenul luminos care s'a produs în punctul P_0 (astfel încât $P_0P = r$) la momentul $t - \frac{r}{q}$.

[1]) După cursul ţinut de mine la Facultatea de Ştiinţe din Iaşi, în 1932, tratând „*Teoria electromagnetică a luminii*“.

Fie $\varphi(x, y, z; t - \frac{r}{q})$ o funcţie continuă, finită şi bine determinată, posedând derivate parţiale de primul ordin finite şi continue, într'un domeniu regulat şi mărginit D, şi derivate de al doilea ordin finite şi continue în interior, putând fi discontinue pe frontiera domeniului Σ. O astfel de funcţie să reprezinte „starea“ luminoasă în punctul $P(x, y, z)$, în momentul t.

Folosind relaţia (10) dela § 149, sub condiţiile enunţate, avem, luând punctul P ca origină a axelor de coordonate $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$,

(42)

$$4\pi \varphi_t(0,0,0) = -\int_D \frac{d\tau}{r} \Delta\varphi_{t-\frac{r}{q}}(x, y, z) + \int_\Sigma d\sigma \left(\varphi_{t-\frac{r}{q}} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \varphi_{t-\frac{r}{q}} \right).$$

Avem, prin calcule simple,

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-\frac{r}{q}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{t-\frac{r}{q}} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t-\frac{r}{q}} \frac{1}{q} \frac{\partial r}{\partial x} \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}_{t-\frac{r}{q}} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{t-\frac{r}{q}} - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\right)_{t-\frac{r}{q}} \frac{1}{q} \frac{\partial r}{\partial x} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{t-\frac{r}{q}} \frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t-\frac{r}{q}} \frac{1}{q} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} .$$

Aşadar,

$$\Delta(\varphi_{t-\frac{r}{q}}) = (\Delta\varphi)_{t-\frac{r}{q}} - \frac{2}{q} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \frac{\partial r}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{t-\frac{r}{q}} - \frac{1}{q} \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t-\frac{r}{q}} .$$

Dar,

$$(\Delta\varphi)_{t-\frac{r}{q}} = \frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{t-\frac{r}{q}}$$

după ecuaţia undelor. Prin urmare,

$$\Delta(\varphi_{t-\frac{r}{q}}) = -\frac{2}{q} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\varphi}{r} - \frac{1}{q} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}_{t-\frac{r}{q}} ;$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, întrucât,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\ , \text{ etc.},$$

avem

$$\Delta(\varphi_{t-\frac{r}{q}}) = -\frac{2}{q}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\varphi}{r} - \frac{1}{q}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_{t-\frac{r}{q}};$$

şi, în definitiv,

$$\Delta(\varphi_{t-\frac{r}{q}}) = -\frac{2}{q}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} - \frac{1}{q}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_{t-\frac{r}{q}}\ ; \tag{43}$$

Aceasta este *ecuaţia lui* KIRCHHOFF, care înlocueşte ecuaţia undelor obicinuită, prin introducerea *potenţialelor întârziate* $\varphi_{t-\frac{r}{q}}$ (H. POINCARÉ). Ecuaţia (43) permite transformarea relaţiei (42) precum urmează. Avem

$$-\int_D \frac{d\tau}{r}\Delta(\varphi_{t-\frac{r}{q}}) = \frac{2}{q}\frac{d}{dt}\int_D d\tau\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{rq}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_{t-\frac{r}{q}}$$

$$= \frac{2}{q}\frac{d}{dt}\int_D \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_{t-\frac{r}{q}})\frac{d\tau}{r^2} = \frac{2}{q}\frac{d}{dt}\int_D \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_{t-\frac{r}{q}})\,dr\,d\Omega\ ,$$

unde $d\Omega = -\frac{d\sigma}{r}\cos\theta$ (cu $\cos\theta = \frac{\partial x}{\partial r}$) este unghiul solid al elementului $d\sigma$. Integrala ultimă se poate efectua, relativ la r dela zero la un r oarecare. Obţinem pentru ea

$$\left\{r\varphi_{t-\frac{r}{q}}\right\}_o^r\ ;$$

ceeace ne dă pentru valoarea primului membru

$$\int_D \frac{d\tau}{r}\Delta(\varphi_{t-\frac{r}{q}}) = \frac{2}{q}\frac{d}{dt}\int_\Sigma r\varphi_{t-\frac{r}{q}}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{d\sigma}{r^2}$$

Relaţia (42) devine, dacă introducem valoarea precedentă,

$$4\pi\varphi_t(0,0,0) = \int_\Sigma d\sigma\left\{-\frac{2}{qr}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t-\frac{r}{q}}\frac{\partial r}{\partial n} + \varphi_{t-\frac{r}{q}}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}\varphi_{t-\frac{r}{q}}\right\};$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă, în definitiv, pentru potențialul în punctul $P(0,0,0)$ în momentul t,

$$(44) \qquad 4\pi\,\varphi_t(P) = \int_{\Sigma} d\sigma \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{1}{qr}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n} \right\}_{t-\frac{r}{q}} .$$

Aceasta este formula în care toarnă KIRCHHOFF principiul lui HUYGENS: cunoscând funcțiile φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ și $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ pe frontiera Σ a domeniului mărginit și regulat D, care cuprinde în interior izvoarele de lumină, vom determina valoarea funcției potențiale φ în fiecare punct P *interior* domeniului D.

Formula (44) este caracteristică pentru noțiunea de *undă sferică*, al cărei potențial întârziat se exprimă prin *soluția lui* HERTZ

$$\varphi\left(x, y, z; t - \frac{r}{q}\right) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{q}\right) ,$$

care permite să dăm o formă interesantă relației (44), precum urmează. Observăm că

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{t-\frac{r}{q}} = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{q}\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ;$$

$$\varphi_{t-\frac{r}{q}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{rq}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t-\frac{r}{q}} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{q}\right)\right\} .$$

Așadar, (44) se scrie

$$4\pi\,\varphi_t(P) = \int d\sigma \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} f_{t-\frac{r}{q}}\right) - \frac{1}{r} f_{t-\frac{r}{q}} \frac{1}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} .$$

Primul termen din membrul al doilea reprezintă potențialul întârziat al unui *pol* simplu; al doilea termen poate fi conceput drept potențialul întârziat al unui *dipol*.

Aplicarea fundamentală a formulei (44) este cunoscută în Teoria electromagnetică a luminei, pentru *fenomenul difracției*.

197. Ecuația „telegrafistului". Să considerăm un conductor electric perfect, de forma unui fir liniar, foarte lung, prin care curge un curent electric variabil cu timpul și cu distanța x,

dealungul firului. Densitatea de curent este dată de *legea diferențială a lui* OHM (v. *Electromagnetismul*, p. 62):

$$\bar{i} = \sigma \bar{E} = -\sigma \operatorname{grad} V(x) \ ,$$

unde σ este conductibilitatea specifică, $\bar{E}$ câmpul electric datorit curentului și $V(x)$ potențialul electric. Curentul total I este dat de legea integrală a lui OHM

$$R I = -\frac{\partial V}{\partial x} \ ,$$

unde R este rezistența ohmică

$$R = \frac{1}{\sigma} \int \frac{ds}{q} \ ,$$

integrala fiind extinsă la toată lungimea firului, de secțiune q și element de lungime ds.

Pe de altă parte, FARADAY a stabilit că, atunci când curentul variază în timp $V = V(x, t)$ intră în joc și „inducția proprie" a firului (self-inducția) : $L \frac{\partial I}{\partial t}$ pe unitatea de lungime (L fiind o constantă de material, și anume, „coeficientul de inducție proprie"), care acționează ca o forță de inerție; astfel încât ecuația (45) se scrie, în acest caz,

$$L \frac{\partial I}{\partial t} + R I = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \ . \tag{46}$$

Pe de altă parte, fie $e(x, t)$ *încărcarea electrică* într'un punct x al conductorului. Legea lui FARADAY spune că

$$e(x, t) = C \cdot V(x, t) \ , \tag{47}$$

unde C este *capacitatea ohmică* pe unitatea de lungime a conductorului (o constantă pentru conductorul considerat).

Cum încărcarea totală rămâne invariabilă, rezultă că variația în timp a încărcării electrice dintre două puncte x_A și x_B în fir, va fi dată de

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B e(x, t)\, dx = I_A - I_B \ .$$

dealungul firului. Densitatea de curent este dată de *legea diferențială a lui* OHM (v. *Electromagnetismul*, p. 62):

$$\bar{i} = \sigma \bar{E} = -\sigma \operatorname{grad} V(x) \ ,$$

unde σ este conductibilitatea specifică, $\bar{E}$ câmpul electric datorit curentului și $V(x)$ potențialul electric. Curentul total I este dat de legea integrală a lui OHM

$$R I = -\frac{\partial V}{\partial x} \ ,$$

unde R este rezistența ohmică

$$R = \frac{1}{\sigma} \int \frac{ds}{q} \ ,$$

integrala fiind extinsă la toată lungimea firului, de secțiune q și element de lungime ds.

Pe de altă parte, FARADAY a stabilit că, atunci când curentul variază în timp $V = V(x, t)$ intră în joc și „inducția proprie" a firului (self-inducția) : $L \frac{\partial I}{\partial t}$ pe unitatea de lungime (L fiind o constantă de material, și anume, „coeficientul de inducție proprie"), care acționează ca o forță de inerție; astfel încât ecuația (45) se scrie, în acest caz,

$$L \frac{\partial I}{\partial t} + R I = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \ . \tag{46}$$

Pe de altă parte, fie $e(x, t)$ *încărcarea electrică* într'un punct x al conductorului. Legea lui FARADAY spune că

$$e(x, t) = C \cdot V(x, t) \ , \tag{47}$$

unde C este *capacitatea ohmică* pe unitatea de lungime a conductorului (o constantă pentru conductorul considerat).

Cum încărcarea totală rămâne invariabilă, rezultă că variația în timp a încărcării electrice dintre două puncte x_A și x_B, în fir, va fi dată de

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B e(x, t)\, dx = I_A - I_B \ .$$

La limită $A \to B$; rezultă

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x} \quad . \tag{48}$$

Comparând relaţiile (48) şi (47), urmează

$$C\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x} \quad . \tag{49}$$

Trebue să ţinem seamă, însă, şi de *pierderea de potenţial*, dacă legăm conductorul la pământ. Insemnând cu constanta S *conductanţa* (pierderea pe unitatea de lungime), atunci în primul membru al ecuaţiei (49) trebue adăogat şi termenul SV; astfel încât (49) devine

$$C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + S\,V(x,t) = -\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} \quad . \tag{50}$$

Eliminarea lui I sau V din ecuaţiile (46) şi (50) conduce la acelaş tip de ecuaţie diferenţială, la care trebue să satisfacă I şi V; anume

$$CL\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (RC + SL)\frac{\partial \varphi}{\partial t} + RS\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad , \tag{51}$$

numită „ecuaţia telegrafistului“.

Observăm, în primul rând, că dacă rezistenţa R şi conductanţa S sunt nule, ecuaţia (51) se reduce la ecuaţia de undă într'o singură dimensiune

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{q^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad , \quad \text{cu} \quad q = \sqrt{CL} \quad .$$

Această ecuaţie se regăseşte şi în Mecanica corpurilor deformabile pentru *problema propagării sunetului* dealungul unui corp unidimensional.

Dacă însă inducţia proprie L este neglijabilă faţă de rezistenţa R ecuaţia (51) devine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{S}{C}\varphi = \frac{1}{CR}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad ,$$

identică cu *ecuaţia propagării căldurii* (v. § următor), într'un

mediu de o singură dimensiune. Se observă că, atunci, termenul în S din ecuaţia precedentă exprimă „pierderea de căldură"—ca şi pierderea de electricitate,—prin radiaţie.

Ecuaţia, sub forma precedentă, a fost folosită, pentru prima oară, de Lord Kelvin, în 1855, în studiul transmisiei prin cablul submarin, cu ocazia instalării „Cablului Atlantic".

Punând în ecuaţia generală (51), pentru prescurtarea scrisului

$$a = CL \; ; \quad 2b = RC + SL \; ; \quad c = RS \; ;$$

ecuaţia (51) se scrie

$$a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad , \tag{52}$$

unde $a, b, c,$ sunt constante diferite de zero.

Să facem substituţia

$$\varphi(x, t) = u(x)\, e^{ipt} \quad , \tag{53}$$

uude p este o constantă reală. Această substituţie revine, fiziceşte, a considera *unde periodice* în timp. Prin substituţia (53), ecuaţia (52) devine

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0 \quad ,$$

unde

$$k^2 = a p^2 - c - 2bpi \quad .$$

Punem

$$k = \alpha - i\beta \quad ;$$

rezultă

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{4b^2p^2 + (ap^2 - c)^2} + ap^2 - c\right\}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{4b^2p^2 + (ap^2 - c)^2} - ap^2 + c\right\}} \quad .$$

Putem scrie soluţia ecuaţiei (53) sub forma

$$u = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx} \quad .$$

Pentru lămurirea sensului fizic al problemei, să considerăm soluția particulară e^{ikx}, (impusă prin condiția fizică ce cere ca amplitudinea undei să nu devină infinită cu x), și s'o introducem în (53); obținem

$$\varphi(x,t) = e^{i(pt-kx)} = e^{-\beta x} e^{i(pt-\alpha x)} .$$

Să considerăm, cum se face de obicei, partea reală a acestei funcții, anume,

$$\varphi = e^{-\beta x} \cos(pt-\alpha x) .$$

Ea reprezintă o *undă progresivă*, amortizată, de perioadă $\tau = 2\pi/p$ și lungime de undă $\lambda = 2\pi/\alpha$; viteza undei fiind $v = p/\alpha = \beta/b$.

Observăm că *amplitudinea* undei *scade*, pentru fiecare lungime de undă, în raportul $e^{-2\pi\beta/\alpha}$. Apoi, se observă că viteza și lungimea de undă depind de frecvență. Ori, aceste unde suferă în cablu puternice efecte de *dispersie*, care produc variații supărătoare de frecvență. Acest fenomen explică dificultățile telegrafiei prin cablu submarin, la mari distanțe.

Pentru un studiu mai aprofundat al ecuației precedente se vor consulta tratatele citate.

198. Ecuația propagării căldurii (Fourier), sau *problema conductibilității termice*. Se știe din experiență că două corpuri de temperaturi diferite, puse în contact, tind să-și egaleze temperaturile; acelaș fenomen are loc și între două regiuni ale aceluiaș corp, de temperaturi deosebite. Acest fapt experimental impune ideia existenții unui *curent de convecție* a căldurii, și anume, după experiență, dela regiunile cele mai calde spre regiunile cele mai reci. Să definim curentul de convecție al căldurii printr'un vector $\bar{A}$, a cărui direcție într'un punct P să fie aceia a curentului ce trece prin P; valoarea absolută a vectorului de convecție să fie dată de numărul de *calorii* care trec, pe secundă, prin unitatea de element de suprafață $d\sigma$ normal pe direcția vectorului în P; iar sensul pozitiv să fie sensul cald → rece.

Viteza curentului de convecție a căldurii este proporțională cu „căderea de temperatură", $U(x,y,z;t)$ în punctul P.

Coeficientul de proporţionalitate k măsoară *conductibilitatea* corpului şi depinde de materialul din care este construit corpul bun conducător de căldură, considerat.

Vectorul de curent va avea aşadar, aceiaşi direcţie, dar sens contrar, cu gradientul temperaturii:

$$\bar{\ell} = -k \operatorname{grad} U \quad . \tag{53}$$

Această ecuaţie reprezintă, prin urmare, un prim *fapt experimental* al fenomenului de conductibilitate a căldurii.

O altă aserţie de natură experimentală a fenomenului de conductibilitate a căldurii se deduce precum urmează. Fie c căldura specifică a corpului şi ρ densitatea sa materială. Numărul de calorii primite, pe secundă, într'o regiune închisă D a corpului, (din cauza variaţiei căldurii) va fi

$$\int_D c\rho \frac{\partial U}{\partial t} d\tau \quad .$$

Ori, această cantitate de căldură nu poate proveni decât din fluxul vectorului $\bar{\ell}$, prin suprafaţa Σ ce închide regiunea D. Aşadar,

$$\int_D c\rho \frac{\partial U}{\partial t} d\tau = \int_\Sigma \bar{\ell}\, d\bar{\sigma} \quad .$$

Dar, după formula lui Gauss (unde trebue să observăm că am luat fluxul *spre interior*, aşadar, normala *interioară* $\bar{n}$ la Σ), rezultă

$$\int_D c\rho \frac{\partial U}{\partial t} d\tau = -\int_D \operatorname{div} \bar{\ell}\, d\tau \quad ,$$

şi, prin urmare, după (53),

$$\int_D \left(c\rho \frac{\partial U}{\partial t} - k \operatorname{div} \operatorname{grad} U\right) d\tau = 0 \quad .$$

Admiţând că integrandul este funcţie continuă în tot domeniul de integrare, rezultă

$$\frac{\partial U(x;t)}{\partial t} = a^2 \Delta U(x;t) \quad , \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right) , \tag{54}$$

care este ecuaţia căutată a conductibilităţii termice, datorită lui FOURIER, şi studiată în celebra sa publicaţie *Theorie de la chaleur*. Studiul acestei ecuaţii a condus pe FOURIER la cunoscutele sale serii şi integrale, care-i poartă numele şi la întreaga „teorie a seriilor trigonometrice“ [1]).

Problema care se pune este : să se găsească o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (54), care satisface următoarele condiţii : în momentul $t = 0$ să avem $U_0 = f(x)$ funcţie dată de x; pentru $t > 0$, U să fie în tot domeniul o funcţie finită şi continuă de x şi de t, posedând derivate continue.

Pentru a găsi o soluţie generală să considerăm, pentru moment, soluţia particulară

$$u(x\,;t) = X(x)\;T(t) \quad .$$

Făcând această substituţie în ecuaţia (54), obţinem

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} \quad .$$

Primul membru fiind o funcţie exclusiv de x, iar al doilea membru o funcţie numai de t, egalitatea precedentă nu este posibilă decât dacă ambii membri sunt egali cu aceiaşi constantă $-\lambda^2 a^2$. Deducem astfel,

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 a^2 T \quad ; \quad \text{aşadar,} \quad T = \text{const. } e^{-\lambda^2 a^2 t} \quad .$$

Am ales λ^2 *pozitiv, real*, întrucât funcţia $U(x\,;t)$ trebue să fie finită atât în t cât şi în x.

Din a doua ecuaţie

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad .$$

deducem soluţia

$$X = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \quad ,$$

A şi B fiind constante de integrare, pe care le putem lua ca depinzând de parametrul λ.

---

[1]) FOURIER, H. POINCARE, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1895;
E. GOURSAT, Analyse mathematyque, V. III, C. 29;
G. KIRCHHOFF, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig, 1894.
M. SCHAEFER, Einführung in die theoretische Physik, II. Berlin, 1921.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția generală se obține sumând prin raport cu λ toate soluțiile particulare. Așadar,

$$U(x\,;t)=\int_0^{\infty}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,e^{-\lambda^2 a^2 t}\,d\lambda\quad .$$

Constantele $A(\lambda)$ și $B(\lambda)$ se pot alege astfel încât să fie satisfăcută condiția inițială: pentru $t=0$ să avem $U_0=f(x)$. Să admitem că funcția $f(x)$ satisface condițiilor de continuitate *(condițiile lui* DIRICHLET, pentru integralele FOURIER), într'un interval finit, funcția fiind nulă în exteriorul acestui interval. In aceste condiții funcția $f(x)$ se poate exprima printr'o *integrală* FOURIER

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)\,d\alpha\quad .$$

Cum, pentru $t=0$,

$$U_0=\int_0^{\infty}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,d\lambda\quad ,$$

rezultă

$$A=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos(\alpha\lambda)\,d\alpha\ ;\ B=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\sin(\alpha\lambda)\,d\alpha\ .$$

Avem, astfel,

$$(55)\qquad U(x\,;t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2 a^2 t}\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)\,d\alpha\ ;$$

și se verifică ușor că pentru $t=0$ avem $U_0=f(x)$. Schimbând ordinea de integrare în (55), obținem

$$U(x\,;t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(\alpha)\,d\alpha\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda\ ,$$

Integrarea prin raport cu λ se efectuează imediat şi se obţine

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (\alpha - x)\, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}$$

astfel încât avem, pentru soluţia generală,

$$(56) \qquad U(x;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}\, d\alpha \ .$$

Interpretarea fizică a soluţiei (56) se lămureşte prin considerarea soluţiei particulare

$$(57) \qquad u = \frac{A}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} \ ,$$

cu o constantă arbitrară A. Pentru $t = 0$, această soluţie face peste tot pe $u = 0$, cu excepţia punctului $x = \alpha$. Acest fapt implică drept condiţie iniţială, condiţia ca în momentul iniţial temperatura să fie peste tot nulă, cu excepţia planului $x = \alpha$. La infinit $u = 0$ pentru toate timpurile.

Să calculăm *cantitatea de căldură* Q conţinută într'un cilindru paralel cu axa de x, de secţiunea egală cu unitatea şi şi lungimea infinită. Avem (luând, pentru $t = 0$, $Q = 0$),

$$(58) \qquad Q = \rho\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} u\, dx = \rho\sigma A \ .$$

Aşadar, Q este independent de t: cantitatea de căldură rămâne constantă şi finită în cilindrul considerat. La început ($t = 0$), Q era răspândită pe o fâşie infinit subţire. Cu timpul, căldura se răspândeşte în tot corpul, pentru ca pentru $t = \infty$ să fie infinit diluată, rămânând în total, constantă.

Dacă avem un singur izvor de căldură în punctul $x = \alpha$, de randament $f(\alpha)$, cantitatea de căldură într'o fâşie infinit lungă, de grosimea $\delta\alpha$, va fi

$$Q = \rho\sigma f(\alpha)\, \delta\alpha \ ,$$

Scanned with OKEN Scanner

ceeace, comparat cu (58), ne dă

$$A = f(\alpha)\,\delta\alpha \quad .$$

Aşadar, (57) devine

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} f(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}\, \delta\alpha \quad .$$

Soluţia integrală (56) exprimă analitic „principiul suprapunerii soluţiilor" particulare, principiu, care se interpretează, fiziceşte, prin sumarea acţiunilor tuturor izvoarelor, independente unele de altele.

Pentru numeroasele exemple fizice şi cazuri particulare ale problemei conductibilităţii căldurii, trimitem la tratatele citate. Remarcăm numai faptul, interesant, că ecuaţia căldurii se regăseşte şi în fenomenul fizic al *dispersiei*; conducât la teoria cunoscută a mişcării Brown-iene (A. Einstein şi M. V. Smoluchowski).

199. Ecuaţia Mecanicii ondulatorii (E. Schrödinger) [1]. Mecanica newtoniană îşi pierde puterea de instrument analitic pentru descrierea fenomenelor fizice din *domeniul dimensiunilor atomice*, întrucât ea operează că mărimi macroscopice, *măsurabile simultan*. Suprapusă principiilor teoriei quantice clasice, Mecanica macroscopică, conducea la interpretarea fenomenelor quantice cu ajutorul dicţionarului conţinut în „principiul corespondenţei" a lui N. Bohr,—ceeace, din punct de vedere conceptual, este complet nesatisfăcător. Această observaţie l'a condus pe W. Heisenberg (1925) să creeze o Mecanică microscopică, pentru descrierea teoretică a fenomenelor din interiorul atomului, Mecanica bazată pe calculul cu „mărimi principial observabile", care, analitic, se înfăţişau sub caracterul algebric de *matrice*. Prin aceasta, calculele păreau inestricabile, în Mecanica Heisenberg-iană.

Imediat după apariţia publicaţiei fundamentale a lui Heisenburg, fizicianul german Erwin Schrödinger (1926) toarnă într'o nouă formă, accesibilă calculului analitic, concepţia iniţială, pornind dela observaţia, conţinută în lucrarea fundamentală a fizicianului francez Louis de Broglie: după cum ecuaţia Opticii

[1] *Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig*, 1927.

geometrice nu este valabilă pentru fenomenele ondulatorii, dominate de ecuaţia undelor, tot astfel ecuaţiile Mecanicii analitice clasice nu pot satisface descrierea fenomenelor subatomare.

In cartea mea de *Mecanică* (§ 377, p. 462) am arătat cum se poate obţine ecuaţia lui SCHRÖDINGER, pentru un punct material:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U(x))\psi = 0 \,, \tag{59}$$

unde m este massa punctului material, E este energia totală, U energia potenţială, h este constanta lui PLANCK, iar Δ este simbolul laplaceian.

SCHRÖDINGER, şi acesta este marele lui merit în descurcarea unei probleme aşa de dificilă, observă că ecuaţia precedentă conduce la problema analitică a „valorilor proprii", prin apariţia parametrului E, în ecuaţie. Cum însă, în problema de faţă, nu putem îngrădi alegerea valorilor parametrului E prin *condiţii pe contur*, această îngrădire se obţine prin următoarea observaţie: soluţiile ecuaţiei (59) să fie în interiorul domeniului şi pe *contur* funcţii *regulate* (uniforme, continue şi finite); condiţie impusă de însăşi problema fizică.

Alegerea unei mulţimi numărabile de *valori discrete* pentru E (energia totală) corespunde, în adevăr, *condiţiei quantice clasice*: energia totală a atomului nu poate să varieze decât prin valori discrete, *nu continuu*. Prin aceasta, SCHRÖDINGER reduce „quantizarea" clasică, la o chestie de pură analiză matematică: determinarea „valorilor proprii". De altfel, chiar titlul lucrărilor sale fundamentale poartă denumirea sugestivă: „*Quantisierung als Eigenwertproblem*").

Aplicarea ecuaţiei (59) în cazul mişcării KEPLER-iene necesită calcule multe şi dificile, — pentru cari trimitem la opera fundamentală a lui SCHRÖDINGER, — nefiind în intenţia noastră o expunere completă a problemei. Vom exemplifica totuşi metoda, prin aplicarea ecuaţiei (59) la un model mai simplu al atomului clasic.

Rotatorul cu axa fixă în spaţiu: un punct material M, de massă m, obligat să se mişte cu viteză constantă pe un cerc de rază R. Coordonatele de poziţie ale punctului se reduc la una singură: unghiul de rotaţie θ. Reamintindu-ne expresia

laplaceianului în coordonate polare, pentru cazul de față rămâne

$$\Delta\psi \equiv \frac{1}{R^2}\frac{d^2\psi}{d\theta^2} \equiv \frac{m}{J}\psi''(\theta) \quad .$$

unde am pus $J = m R^2$ (momentul de inerție al lui M față de axa de rotație, pe care am luat-o normală la planul cercului). Energia potențială este constantă; nimic nu ne împiedică s'o luăm egală cu zero. Ecuația (59) se reduce, în aceste condiții la

$$\psi''(\theta) + \frac{8\pi^2 J E}{h^2}\psi(\theta) = 0 \quad , \tag{60}$$

a cărei integrală generală se scrie

$$\psi(\theta) = A\cos\left(\frac{2\pi}{h}\sqrt{2JE}\;\theta\right) + B\sin\left(\frac{2\pi}{h}\sqrt{2JE}\;\theta\right) \quad .$$

Condiția de regularitate pe frontieră, se transformă, în cazul de față în *condiția de periodicitate*

$$\psi(2\pi) = \psi(0) \quad , \tag{61}$$

care conduce, după cum era de așteptat, la determinarea valorilor proprii. In adevăr, relația (61) este satisfăcută numai pentru

$$\frac{2\pi}{h}\sqrt{2JE} = n \quad ,$$

unde n este un *număr întreg*. Așadar,

$$E = E_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 J} = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m R^2}$$

sunt valorile proprii ale parametrului E. Rezultatul acesta este, după cum trebuia, în perfectă concordanță cu teoria clasică a quantelor.

PROBLEME RECAPITULATIVE DE TEORIA POTENȚIALELOR

1. Un fir material rectiliniu AB de lungime b, de secțiune constantă q și de densitate constantă ε, acționează după legea newtoniană asupra unui punct P de massă 1, așezat pe dreapta AB, în exteriorul segmentului AB și la distanța a de extremitatea B a firului. Să se găsească intensitatea atracției.

Ind. Fie X atracția căutata și x distanța dela B la un punct oarecare al firului. Luând sensul $A \to B$ ca pozitiv, atracția elementară (f fiind constanta atracției universale) este

$$dX = -\frac{f q \varepsilon}{(a+x)^2} dx \quad .$$

Integrând pe segmentul întreg avem

$$X = -\frac{f b q \varepsilon}{a(a+b)} = -\frac{f m}{a(a+b)}$$

unde m este massa firului întreg.

2. Aceiași chestiune pentru un punct $P(m=1)$ situat în interiorul segmentului AB. Ce se întâmplă când P coincide cu B?

Ind. a) In modul analog se găsește $X = \frac{f(b-2a) q \varepsilon}{a(b-a)}$

b) Făcând $a = 0$, avem $X = -\infty$.

3. Definim „centrul de atracție" al unei linii, suprafețe sau volum ca fiind un punct, în care presupunem concentrată întreaga massă a corpului considerat astfel încât atracția exercitată asupra unui alt punct dat este aceiași ca în cazul distribuției reale a massei în corp. Să se găsească „centrul de atracție" în cazul problemei (1).

Ind. Notând abscisa centrului de atracție cu ξ, avem

$$X = -\frac{f m}{a(a+b)} = -\frac{fm}{\xi^2}, \text{ de unde } \xi = \sqrt{a(a+b)} \; ;$$

deci, distanța dela P la C este media geometrică dintre a și $a+b$. Să se construiască grafic acest punct.

Scanned with OKEN Scanner

4. Aceiași chestiune ca (1), forța de atracție fiind invers proporțională cu puterea $n-a$ a distanței.

Ind. Abstracție făcând de semn, avem $X = fq\varepsilon \int_o^b \frac{dx}{(a+x)^n}$.

Dacă $n>1$, avem $X = \frac{f\,q\,\varepsilon}{n-1} \cdot \frac{(a+b)^{n-1} - a^{n-1}}{[a\,(a+b)]^{n-1}}$;

se vede că este o generalizare a rezultatului dela (1).

Dacă $n=1$, $X = f\,q\,\varepsilon \log \frac{a+b}{a}$.

5. Un fir material având forma lănțișorului $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ acționează asupra unui punct $m=1$ așezat în origina axelor. Fie secțiunea firului q și densitatea ε. Atracția este proporțională cu massa și cu distanța.

Ind Din cauza simetriei curbei față de OY, se reduc componentele atracției pe axa OX. Atracția (f fiind coeficientul de proporționalitate) este deci $Y = \frac{f}{2} k\,q\,\varepsilon \left[\frac{k}{2}\left(e^{\frac{2x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + 2x\right]$

sau, notând cu s arcul lănțișorului, a cărui proecție pe OX este x, avem $Y = f\,q\,\varepsilon\,(sy + kx)$

6. A fiind punctul cel mai de jos al lănțișorului din problema precedentă iar B și C două puncte simetrice față de OY, așezate pe curbă, să se găsească atracția plăcii materiale mărginită de arcul BAC al lănțișorului și de segmentul de dreaptă BC asupra punctului $m=1$, așezat în origină. Fie ω densitatea superficială. Atracția este proporțională cu massa și cu distanța.

Ind. Componentele paralele cu OX se reduc. Pentru Y, găsim

$$Y = \frac{1}{8} f\omega \left[4a\,(2b^2 - k^2) - k^3\left(e^{2\frac{a}{k}} - e^{-2\frac{a}{k}}\right)\right],$$

(a, b) fiind coordonatele punctului B. Sau încă

$$Y = \frac{1}{2} f\omega\,[2a\,b^2 - k\,(ak + bs)],$$

unde s = lungimea arcului $AC = CB$.

7. Să se calculeze atracția newtoniană a unui con circular drept, omogen, de densitate ε, de înălțime h și raza bazei $\frac{b}{2}$, asupra unui punct situat pe axa conului, de partea bazei, la distanța $a\,(>h)$ de vârf. Ce devine această atracție când punctul atras este situat în centrul bazei?

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Luăm ca origină vârful conului și ca OX axa conului. Notând cu r distanța dela un punct oarecare Q al conului la O și cu ω unnghiul dintre proiecția lui OQ pe planul YOZ și axa OY, avem imediat

$$X = -f\varepsilon \int_0^h \int_0^{\frac{bx}{n}} \int_0^{2\pi} \frac{r(a-x)\,dx\,dr\,d\omega}{\sqrt{[(a-x)^2+r^2]^3}} .$$

Efectuând integrarea, avem

$$X = 2\pi f\varepsilon h\left\{\frac{h}{s^2}\left[\frac{ab^2}{hs}\log\frac{s^2-ah+cs}{a(s-h)} - c + a\right] - 1\right\},$$

unde s e lungimea generatoarei, c e distanța dela punctul atras la bază. $s = \sqrt{b^2+h^2}$, $c = \sqrt{b^2+(a-h)^2}$.
Dacă P coincide cu centrul bazei, $a = h$, deci

$$X = 2\pi f\varepsilon h\left[\frac{h}{s^2}\left(\frac{b^2}{s}\log\frac{b(b+s)}{h(s-h)} - b + h\right) - 1\right] .$$

8. Aceiași chestiune ca la (7), dar punctul atras se află deasupra vârfului la distanța a ($> h$) de bază.

Ind. Procedând la fel ca la (7) se găsește

$$X = 2\pi f\varepsilon h\left\{1 - \frac{h}{s^2}\left[\frac{b^2 d}{hs}\log\frac{b^2+ah+cs}{(h+s)d} + c - d\right]\right\},$$

unde d e distanța dela punctul atras la vârful conului. Când fac $a = h$ (punctul în vârf) obțin o formă nedeterminată, a cărei adevărată valoare este

$$X = 2\pi f\varepsilon h\left[1 - \frac{h}{s}\right] .$$

9. Să se demonstreze relația

$$\frac{1-z^2}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)z^n ,$$

unde $P_n(x)$ sunt polinoamele lui LEGENDRE.

Ind. Notând primul membru cu $f(z)$ și desvoltând în seria lui MACLAURIN, avem (considerând $x = \text{const}$) :

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1}f'(0) + \frac{z^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots$$

Calculând coeficienții găsim $f(0) = 1$, $f'(0) = 3x$, $\cdots$

$$\cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = (2n+1)P_n(x) .$$

10. Să se verifice relaţia

$$\frac{1+z}{z\sqrt{(1-2xz+z^2)}}-\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\{P_n(x)+P_{n+1}(x)\}z^n.$$

Ind. Aici primul membru are un punct singular în origină. Vom desvolta deci funcţia $\varphi(z)=\dfrac{1+z}{\sqrt{1-2xz+z^2}}-1$ şi vom verifica, după metoda din (9) că

$$\frac{1}{z}\left[\varphi(0)+\frac{z}{1}\varphi'(0)+\frac{z^2}{2!}\varphi''(0)+\cdots\right]=P_0(x)+P_1(x)+$$

$$+(P_1(x)+P_2(x))z+(P_2(x)+P_3(x))z^2+\cdots .$$

11. Să se demonstreze relaţia $(n+1)P_n=-z\dfrac{dP_n}{dz}+\dfrac{dP_{n+1}}{dz}$.

Ind. P_n satisface ecuaţia lui LEGENDRE

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\frac{dP_n}{dz}\right]-n(n+1)P_n=0 .$$

Inlocuind pe $(z^2-1)\dfrac{dP_n}{dz}$ din formula (71) § 143, şi ţinând seamă de faptul că $P_n=P_{-n-1}$, se obţine relaţia cerută.

12. Să se demonstreze relaţia $(2n+1)P_n=\dfrac{dP_{n+1}}{dz}-\dfrac{dP_{n-1}}{dz}$.

Ind. Se adună formula din exerciţiul precedent cu relaţia (72) din § 143.

13. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{dP_n}{dz}=(2n-1)P_{n-1}+(2n-5)P_{n-3}+(2n-9)P_{n-5}+\cdots .$$

Ind. Aplicând succesiv formula din exerciţiul (12), obţinem

$$\frac{dP_n}{dz}=(2n-1)P_{n-1}+\frac{dP_{n-2}}{dz}$$

$$\frac{dP_{n-2}}{dz}=(2n-5)P_{n-3}+\frac{dP_{n-4}}{dz}$$

$$\frac{dP_{n-4}}{dz}=(2n-9)P_{n-5}+\frac{dP_{n-6}}{dz}$$

. . . . . .

Adunând aceste relaţii membru cu membru se obţine formula cerută. Ultimul termen este aici, după paritatea lui n, $3P_1$ sau P_0.

Scanned with OKEN Scanner

14. Să se demonstreze relaţia

$$\int_0^z P_n^2\,dz = \left[z - \frac{1-z^2}{n} P_n P'_n - (1-z^2)\right] \times$$

$$\times \left[\frac{P_{n-1}\,P'_{n-1}}{n(n-1)} + \frac{P_{n-2}\,P'_{n-2}}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{P_1 P'_1}{2\,.\,1}\right] .$$

Ind. Din relaţiile $(1-z^2)\,P'_{n+1} = (n+1)\,(P_n - z\,P_{n+1})$ şi $(1-z^2)\,P'_n = (n+1)\,(z\,P_n - P_{n+1})$, deducem formula $(1-z^2)\,(P'^2_n - P'^2_{n+1}) = (n+1)^2\,(P^2_{n+1} - P^2_n)$.

Dar $(n+1)\,\{(2n+3)\,P^2_{n+1} - (2n+1)\,P^2_n\} =$

$= (n+1)\,(n+2)\,P^2_{n+1} - n\,(n+1)\,P^2_n + (1-z^2)\,(P'^2_n - P'^2_{n+1})$.

Ţinând apoi seamă de ecuaţia diferenţială a lui LEGENDRE şi de relaţia $(2n+1)\,(1-z^2)\,P'_n = n\,(n+1)\,(P_{n-1} - P_{n+1})$, se obţine uşor

$$(2n+3)\,P^2_{n+1} - (2n+1\,P^2_n = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1-z^2}{n+1}(P_n\,P'_n - P_{n+1}\,P'_{n+1})\right\} ,$$

de unde, prin integrare, se obţine formula propusă.

15. Să se arate că $P_n(1) = 1$.

Ind. Se demonstrează prin inducţie. In adevăr $P_o(1) = 1$ şi $P_1(1) = 1$. Admiţând că $P_{n-1}(1) = P_n(1) = 1$ rezultă din formula $(n+1)\,P_{n+1}(z) - (2n+1)\,z\,P_n(z) + n\,P_{n-1}(z) = 0$ că $P_{n+1}(1) = 1$.

16. Să se arate că $P_n(-1) = (-1)^n$; $P_{2n-1}(0) = 0$.

Ind. Acelaş procedeu ca la exerciţiul (15).

17. Să se determine (până la un factor constant) $P_n(z)$, **prin condiţia ca să fie un polinom de gradul** n **care să verifice ecuaţia diferenţială a lui** LEGENDRE.

Ind. Punem $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\,z^i$; deci $P'_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\,i\,z^{i-1}$ şi

$P''_n = \sum_{i=2}^{n} a_i\,i\,(i-1)\,z^{i-2}$. Inlocuind în ecuaţia lui LEGENDRE avem $\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\sum_{i=1}^{n} a_i\,i\,z^{i-1}\right] = -n\,(n+1)\sum_{i=0}^{n} a_i\,z^i = 0$.

Egalând cu zero coeficienţii diferitelor puteri ale lui z, obţinem pentru a_i $(i = 0, \ldots n)$ un număr de $n+1$ ecuaţii omogene, din care determinăm (până la un factor arbitrar) coefisienţii a_i .

Scanned with OKEN Scanner

Se obţine P_n sub forma (38) din § 14°. Să se găsească, în special, prin această metodă expresiile lui

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ şi } P_5 .$$

18. Să se demonstreze relaţia

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left\{2\cos n\theta + 2\,\frac{1.n}{1.(2n-1)}\cos(n-2)\theta + 2\,\frac{1.2.(2n-1)(2n-3)}{1.3.n(n-1)}\cos(n-4)\theta + \cdots\right\} .$$

Ind. Intrebuinţând formula lui EULER $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, avem $(1-2zh+h^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-he^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-he^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}$. Desvoltând ultimile două paranteze după formula binomului, observăm că coeficientul lui h^n din produs, care este chiar $P_n(\cos\theta)$, este egal cu

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left[e^{in\theta}+e^{-in\theta}+\frac{1}{2}\,\frac{2n}{2n-1}\left\{e^{i(n-2)\theta}+e^{-i(n-2)\theta}\right\}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\left\{e^{i(n-4)\theta}+e^{-i(n-4)\theta}\right\}+\cdots\right] ;$$

de unde, aplicând încă odată formula lui EULER căpătăm relaţia cerută.

19. Să se desvolte în serie polinoame LEGENDRE funcţia

$$f(z) = (2n+1)\,z^{2n} .$$

Ind. $f(z) = \sum_0^n a_k P_k(z)$. Coeficienţii se calculează cu ajutorul formulei $a_s = \frac{2s+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\ )\,P_s(z)\,dz$. Se obţine

$$a_0 = 1 , \quad a_2 = \frac{5.2n}{2n+3} , \quad a_4 = \frac{9.2n(2n-2)}{(2n+3)(2n+5)} \text{ etc.}$$

20. Să se desvolte în serie polinoame LEGENDRE $f(z) = (2n+3)\,z^{2n+1}$

Ind. Prin aceiaşi metodă se găseşte

$$a_0 = 0 , \quad a_1 = 3 , \quad a_2 = 0 , \quad a_3 = \frac{7.2n}{2n+5} \text{ etc.}$$

21. Să se desvolte în serie de polinoame LEGENDRE funcţia

$$f(z) = \frac{8}{\pi\sin z} .$$

Se obţine P_n sub forma (38) din § 14'. Să se găsească, în special, prin această metodă expresiile lui

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ şi } P_5 .$$

18. Să se demonstreze relaţia

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left\{2\cos n\theta + 2\,\frac{1.n}{1.(2n-1)}\cos(n-2)\theta + 2\,\frac{1.2.(2n-1)(2n-3)}{1.3.n(n-1)}\cos(n-4)\theta + \cdots\right\} .$$

Ind. Intrebuinţând formula lui EULER $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, avem $(1-2zh+h^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-he^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-he^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}$. Desvoltând ultimile două paranteze după formula binomului, observăm că coeficientul lui h^n din produs, care este chiar $P_n(\cos\theta)$, este egal cu

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left[e^{in\theta}+e^{-in\theta}+\frac{1}{2}\,\frac{2n}{2n-1}\left\{e^{i(n-2)\theta}+e^{-i(n-2)\theta}\right\}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\left\{e^{i(n-4)\theta}+e^{-i(n-4)\theta}\right\}+\cdots\right] ;$$

de unde, aplicând încă odată formula lui EULER căpătăm relaţia cerută.

19. Să se desvolte în serie polinoame LEGENDRE funcţia

$$f(z) = (2n+1)\,z^{2n} .$$

Ind. $f(z) = \sum_0^n a_k P_k(z)$. Coeficienţii se calculează cu ajutorul formulei $a_s = \frac{2s+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\ )\,P_s(z)\,dz$. Se obţine

$$a_0 = 1 , \quad a_2 = \frac{5.2n}{2n+3} , \quad a_4 = \frac{9.2n(2n-2)}{(2n+3)(2n+5)} \text{ etc.}$$

20. Să se desvolte în serie polinoame LEGENDRE $f(z) = (2n+3)\,z^{2n+1}$

Ind. Prin aceiaşi metodă se găseşte

$$a_0 = 0 , \quad a_1 = 3 , \quad a_2 = 0 , \quad a_3 = \frac{7.2n}{2n+5} \text{ etc.}$$

21. Să se desvolte în serie de polinoame LEGENDRE funcţia

$$f(z) = \frac{8}{\pi\sin z} .$$

Ind Procedând analog, găsim

$$a_0 = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 7\left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ etc.}$$

22. $Q_k(z)$ fiind funcţiile lui LEGENDRE de specia doua, să se demonstreze relaţia $\frac{dQ_{n+1}}{dz} - \frac{dQ_{n-1}}{dz} = (2n+1)\,Q_n$.

Ind. Derivând în raport cu z formula lui NEUMANN pentru $Q_{n+1}(z)$ obţinem $\frac{dQ_{n+1}(z)}{dz} = -\frac{1}{2}\int \frac{P_{n+1}(t)}{(z-t)^2}\,dt$. Integrând prin părţi, membrul al doilea devine

$$-\frac{1}{2}\left[P_{n+1}(t)\frac{1}{z-t}\right]_{-1}^{+1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dP_{n-1}(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{z-t}$$. Aplicând acest rezultat primului membru al relaţiei de demonstrat, obţinem

$$\frac{d}{dz}(Q_{n+1} - Q_{n-1}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{d}{dt}\left(P_{n+1}(t) - P_{n-1}(t)\right)\frac{dt}{z-t} =$$

$$= \frac{1}{2}(2n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{z-t}\,dt = (2n+1\,Q_n .$$

23. Să se demonstreze relaţia $n\,(Q_n\,P_{n-1} - Q_{n-1}\,P_n) = -1$.

Ind. Avem $n\,P_n + (n-1)\,P_{n-2} = (2n-1)\,z\,P_{n-1}$; prin urmare, $n\,Q_n + (n-1)\,Q_{n-2} = (2n-1)\,z\,Q_{n-1}$; înmulţim prima relaţie cu Q_{n-1} , a doua cu P_{n-1} şi le scădem. Se obţine $n\,(P_n\,Q_{n-1} - P_{n-1}\,Q_n) = (n-1)\,(P_{n-1}\,Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1})$. Notând primul membru cu f_n se observă eă $f_n = f_{n-1}$; şi repetând procedeul, deducem $f_{n-2} = \cdots f_1$.

Dar $f_1 = Q_0\,P_1 - Q_1\,P_0 = zQ_0 - Q_1 =$

$$= \frac{z}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - \left(\frac{z}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - 1\right) = 1 .$$

De unde rezultă relaţia propusă.

24. Să se demonstreze relaţia $P_n\,Q_{n-2} - Q_n\,P_{n-2} = \frac{(2n-1)z}{n(n-1)}$.

Ind. Avem $n\,P_n + (n-1)\,P_{n-2} = (2n-1)\,z\,P_{n-1}$ şi relaţia analoagă în Q. Inmulţind prima cu Q_{n-2} , a doua cu P_{n-2} şi scăzând avem $n\,(P_n\,Q_{n-2} - Q_n\,P_{n-2}) =$

$$= (2n-1)\,z\,(P_{n-1}\,Q_{n-2} - P_{n-2}\,Q_{n-1}) = (2n-1)\,\frac{z}{n-1}$$.

25. Să se demonstreze relaţia $P_n \frac{dQ_n}{dz} - Q_n \frac{dP_n}{dz} = \frac{1}{1-z^2}$.

Ind. Plecând dela ecuaţia $\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right] + n(n+1)P_n = 0$, aplicăm acelaş procedeu ca în exerciţiile precedente (23) şi (24).

26. Să se deducă formula

$$P_n^m(z) = \frac{(2n)!\,(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n\, n!\,(n-m)!}\left[z^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} z^{n-m}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} z^{n-m-4} + \cdots\right] .$$

Ind. Prin definiţie (§ 145, (93)) avem $P_n^m = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dz^n}$. Insă $P_n = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$; deci $P_n^m = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n\, n!}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}(z^2-1)^n$.

Inlocuind şi derivând obţinem desvoltarea cerută.

27. Să se demonstreze formula de recurenţă

$$P_n^{m+2} - \frac{2(m+1)z}{\sqrt{1-z^2}} P_n^{m+1} + (n-m)(n+m+1) P_n^m = 0 .$$

Ind. Derivând de m ori ecuaţia lui LEGENDRE se obţine

$$(1-z^2)\frac{d^{m+2}P_n}{dz^{m+2}} - 2(m+1)z\frac{d^{m+1}P_n}{dz^{m+1}} +$$
$$+ (n+m+1)(n-m)\frac{d^m P_n}{dz^m} = 0 .$$

Inmulţind cu $(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$ şi ţinând seamă de definiţia lui $P_m^n(z)$ se obţine relaţia cerută.

28. Să se demonstreze relaţia

$$(2n+1)z P_n^m - (n-m+1) P_{n+1}^m - (m+n) P_{n-1}^m = 0 .$$

Ind. Avem $(2n+1)z P_n - (n+1)P_{n+1} - n P_{n-1} = 0$ şi $\frac{dP_{n+1}}{dz} - \frac{dP_{n-1}}{dz} - (2n+1) P_n = 0$. Derivând prima formulă de m ori în raport cu z şi a 2-a de $(m-1)$ ori, căpătăm

$$(2n+1)z\frac{d^m P_n}{dz^m} + m(2n+1)\frac{d^{m-1}P_n}{dz^{m-1}}$$
$$- (n+1)\frac{d^m P_{n+1}}{dz^m} - n\frac{d^m P_{n-1}}{dz^m} = 0$$

și $\frac{d^m P_{n+1}}{dz^m} - \frac{d^m P_{n-1}}{dz^m} = (2n+1)\frac{d^{m-1} P_n}{dz^{m-1}}$. Eliminând între aceste două ecuații pe $\frac{d^{m-1} P_n}{dz^{m-1}}$, înmulțind cu $(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$ și ținând seama de definiția lui P_n^m, se obține relația propusă.

29. Să se demonstreze relația $\int_{-1}^{+1} P_n^m P_n^l \frac{dz}{1-z^2} = 0$. (pentru $m \neq l$).

Ind. Se va aplica metoda utilizată pentru dovedirea proprietății de ortogonalitate (vezi § 145).

30. Să se demonstreze relația $\int_{-1}^{+1} (P_n^m)^2 dz = \frac{2}{2n+2} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$.

Ind. Putem pune P_n^m sub forma

$$P_n^m = \frac{(-1)^m}{2^n n!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} V^{-\frac{m}{2n}} \frac{d^{n-m} V}{dz^{n-m}}, \text{ unde } V = (z^2-1)^n;$$

deci $(P_n^m)^2 = (-1)^m \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{d^{n+m} V}{dz^{n+m}} \cdot \frac{d^{n-m} V}{dz^{n-m}}$.

Integrând prin părți și observând că partea integrată se anulează pentru ambele limite

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n+m} V}{dz^{n+m}} \frac{d^{n-m} V}{dz^{n-m}} dz = -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n+m-1} V}{dz^{n+m-1}} \cdot \frac{d^{n-m+1} V}{dz^{n-m+1}} dz =$$

$$= (-1)^m \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^n V}{dz^n}\right)^2 dz$$ și repetând procedeul de m ori,

deducem

$$(-1)^m (2^n n!)^2 \int_{-1}^{+1} (P_n)^2 dz = (-1)^m (2^n n!)^2 \frac{2}{2n+1}.$$

31. Fie $Y_i(\vartheta, \varphi)$ **și** $Z_j(\vartheta, \varphi)$ **două funcții sferice de suprafață, de grade diferite** i **și** j. **Să se arate că** $\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_i Z_j \, dz \, d\varphi = 0$.

Ind. Consider funcţiile sferice generale $V_i(x, y, z) = r^i Y_i(\theta, \varphi)$ şi $V_j(x, y, z) = r^j Z_j(\theta, \varphi)$: Substituind aceste valori în formula lui GREEN extinsă asupra sferei de rază r, avem

$$\int (V_i \Delta V_j - V_j \Delta V_i)\, d\tau = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \left(V_i \frac{\partial V_j}{\partial n} - V_j \frac{\partial V_i}{\partial n}\right) r^2\, dz\, d\varphi =$$

$$= r^{i+j+1}(j-i)\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y_i Z_j\, dz\, d\varphi = 0\,, \quad \text{deoarece primul}$$

membru este identic nul, V_i şi V_j fiind funcţii armonice.

32. Să se arate că dacă $i = j$, avem relaţia

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y_i Z_i\, dz\, d\varphi = \frac{2\pi}{2i+1}\left[2 a_0 a'_0 + \sum_{l=1}^{i} (a_l a'_l + b_l b'_l)\frac{(i+l)!}{(i-l)!}\right],$$

unde $Y_i = a'_0 P_i(z) + \sum_{l=1}^{i} (a_l \cos l\varphi + b_l \sin l\varphi)\, P_i^l(z)$,

$$Z_i = a'_0 P_i(z) + \sum_{l=1}^{i} (a'_l \cos l\varphi + b'_l \sin l\varphi)\, P_i^l(z)\,.$$

Ind. Inlocuind sub semnul integrării pe Y_i, Z_i prin seriile respective şi observând că

$$\int_0^{2\pi} \cos p\varphi \sin q\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos p\varphi \cos q\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi 2} \sin p\varphi \sin q\varphi\, d\varphi = 0 \text{ (exceptând cazul } p = q\text{), avem}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y_i Z_i\, dz\, d\varphi =$$

$$= a_0 a'_0 2\pi \int_{-1}^{+1} P_i^2\, dz + \pi \sum_{l=1}^{i} (a_l a'_l + b_l b'_l)\int_{-1}^{+1} (P_i^l)\, dz\,.$$ Insă

am văzut (problema 30) că $\int (P_i^l)^2\, dz = \frac{2}{2i+1}\frac{(i+l)!}{(i-l)!}$.

Inlocuind, obţinem relaţia căutată.

33. Să se demonstreze că

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y_j(\theta,\varphi)\, P_i\left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\right] dz\, d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi}{2i+1}\, Y_i(\theta',\varphi') \quad .$$

Ind. Se verifică uşor că $P_i\left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\right] =$

$$= P_i(z)\, P_i(z') + 2\sum_{l=1}^{i} \frac{(i-l)!}{(i+l)!} \cos l(\varphi-\varphi')\, P_i^l(z)\, P_i^l(z')$$

Inlocuind în rezultatul problemei precedente, avem $a'_0 = P_i(z)$,

$$a'_l = \frac{2(i-l)!}{(i+l)!}\cos l\varphi'\, P_i^l(z') \quad , \quad b'_l = \frac{2(i-l)!}{(i+l)!}\sin l\varphi'\, P_i^l(z') \quad .$$

Deci, acest rezultat devine egal cu

$$\frac{2\pi}{2i+1}\left[2a_0 P_i(z') + 2\sum_{l=1}^{i}(a_l\cos l\varphi' + b_l\sin l\varphi')\, P_i^l(z')\right]$$

$$= \frac{4\pi}{2i+1}\, Y_i(\theta',\varphi) \quad .$$

34. Să se arate că funcţia $y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\varphi)\, d\varphi$ **satisface ecuaţiei lui** BESSEL $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$.

Ind. Derivând sub semnul integralei, avem

$$\frac{dy}{dx} = -x\int_0^{\pi}\cos(x\cos\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi \quad \text{şi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\int_0^{\pi}\cos(x\cos\varphi)\cos^2\varphi\, d\varphi \quad .$$ Inlocuind în ecuaţie vedem eă aceasta se verifică. Cum $y(0) = 1$, rezultă că $y(x) = J_0(x)$ este chiar funcţia lui BESSEL de ordinul zero.

35. Să se desvolte $J_0(x)$ **în serie :**

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\,4^2} - \frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2} + \cdots$$

Ind. Am văzut (exerciţiul 34) că $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos\varphi)\,d\varphi$.

Desvoltând $\cos(x\cos\varphi)$ în serie, se obţine

$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x^2\cos^2\varphi}{2!} + \frac{x^4\cos^4\varphi}{4!} + \cdots\right)d\varphi$. Se ştie

însă că $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2r}\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\ldots 2r}$;

înlocuind, obţinem desvoltarea funcţiei $J_0(x)$.

36. Luând pentru $I_n(x)$ expresia

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi,$$ **să se arate că**

$$I'_0(x) = -I_1(x) \text{ şi că } I''(x) = \frac{1}{2}(I_2(x) - I_0(x)).$$

Ind. Verificăm direct, derivând sub semnul integralei.

37. Să se scrie seria ipergeometrică care satisface ecuaţia diferenţială $x(x-1)F'' - 5(1-x)F' + 4F = 0$. Să se arate convergenţa acestei serii $(|x| < 1)$.

Ind. Identificând ecuaţia dată cu forma generală a ecuaţiei ipergeometrice, găsim $\gamma = 5$, $\alpha+\beta = 4$, $\alpha.\beta = 4$, deci $\alpha = \beta = 2$.

Seria este $F(2, 2, 5, x) = 1 + \frac{4}{5}x + \frac{2^2\cdot 3^3}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6}x^2 + \frac{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^3 + \cdots$ Seria este convergentă deoarece $\gamma - \alpha - \beta = 5 - 2 - 2 = 1 > 0$. (vezi § 46, pg. 292).

38. Să se studieze distribuţia căldurii într'o sferă solidă de rază $r = a$, dacă suprafaţa sferei este menţinută la temperatura $T = f(\theta, \varphi)$.

Ind. Temperatura $T = T(r, \theta, \varphi)$ într'un punct al sferei trebue să satisfacă la condiţii $\Delta T = 0$ pentru $r < a$, şi $T = f(\theta, \varphi)$ pentru $r = a$. Prima condiţie e satisfăcută dacă luăm T de forma $T = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \varphi)$. A doua condiţie ne dă $\sum_{n=0}^{\infty} a^n Y_n(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$.

Oți, după rezultatul din problema (33), avem

$$a^n Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} f(\theta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \operatorname{sin}\theta_1 \, d\theta_1 ,$$

unde $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$.
Inlocuind, găsim

$$T(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} f(\theta_1 \Phi_1) P_n(\cos\gamma) \sin\theta_1 \, d\theta_1 .$$

39. Să se calculeze potențialul vitezelor într'o mișcare fluidă, datorită mișcării unei membrane sferice cufundate în fluid; viteza normală la suprafața sferică fiind $= Y_n(\theta, \varphi)$.

Ind. Potențialul de viteze V satisface, aici, următoarelor condiții: $\Delta V = 0$, pentru $r \neq a$ (a = raza sferei mobile) și $\frac{\partial V}{\partial r} = Y_n$, pentru $r = a$. Prima condiție este satisfăcută luând pentru punctele interioare sferei $V = V_i = a_n Y_n(\theta, \varphi) r^n (r < a)$ și pentru punctele exterioare $V = V_e = \beta_r Y_n(\theta, \varphi) r^{-n-1} (r > a)$. Pentru punctele sferei avem $V = V_i = \alpha_n r^n Y_n$; deci făcând $a = r$ rezultă $\alpha_n = \frac{n a^{n-2}}{1}$. La fel se determină $\beta = -\frac{a^{n+2}}{n+1}$.

40. Fie $\bar{s}(\xi, \eta, \zeta)$ **vectorul de poziție al electronului,** $\bar{r}(x, y, z)$ **al punctului curent;** $\bar{r}'$ **e vectorul ce unește electronul cu punctul curent, iar** $\bar{p}$ **momentul dipolului electric. Radiația unui dipol se obține cu ajutorul vectorului lui** HERTZ $\bar{z} = \frac{\bar{p}\left(t - \frac{r'}{c}\right)}{r'}$. **Să se deducă radiația unui** *quadrupol*, **desvoltând mărimile ce intră în expresia lui** $\bar{z}$ **după puterile lui** $\frac{\bar{s}}{\bar{r}}$. (I. I. PLĂCINȚEANU).

Ind. Avem $r' = r - \frac{1}{r}(\bar{s} \cdot \bar{r}) + \cdots$; $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - (\bar{s} \cdot \operatorname{grad}\frac{1}{r}) + \cdots$

$$\bar{p}\left(t - \frac{r'}{c}\right) = \bar{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c}\dot{\bar{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\frac{(\bar{s} \cdot \bar{r})}{r} + \cdots .$$

Scanned with OKEN Scanner

Mărginindu-ne la termenii de ordinul de mărime a lui $\frac{1}{r}$, avem $\overline{Z}=\dot{\overline{p}}\ (t-\frac{r}{c})\frac{(\overline{s}\,.\,\overline{r})}{cr^2}$. Deci potențialul vectorial este $\overline{A}=\frac{1}{c}\ \dot{\overline{Z}}=\frac{1}{c^2 r^2}\left[\ddot{\overline{p}}\ (\overline{s}\,.\,\overline{r})+\dot{\overline{p}}\ \ (\dot{\overline{s}}\,.\,\overline{r})\right]$. Pentru a calcula câmpul magnetic $\overline{H}=\text{rot}\ \overline{A}$, observăm că

$$\text{rot}\left[\ddot{\overline{p}}\,\frac{(\overline{s}\,.\,\overline{r})}{r^2}\right]=\frac{1}{cr^3}\left[(\overline{s}\,.\,\overline{r})[\ddot{\overline{p}}.\overline{r}]+(\dot{\overline{s}}\,.\,\overline{r})\,[\ddot{\overline{p}}\,\overline{r}]\right]$$ și

$$\text{rot}\left[\dot{\overline{p}}\,\frac{(\overline{s}\,.\,\overline{r})}{r^2}\right]=\frac{1}{cr^3}\left[(\dot{\overline{s}}\,\overline{r})\,[\ddot{\overline{p}}\,\overline{r}]+(\ddot{\overline{s}}\,\overline{r})\,[\dot{\overline{p}}\,.\,\overline{r}]\right]\ ,\ \text{deci}$$

$$\overline{H}=\frac{1}{c^2 r^3}\left[(\overline{s}\,.\,\overline{r})\,[\dddot{\overline{p}}\,\overline{r}]+2\,(\dot{\overline{s}}\,\overline{r})\ [\ddot{\overline{p}}\,\overline{r}]+(\ddot{\overline{s}}\,\overline{r})\,[\dot{\overline{p}}\ \overline{r}]\right]\ .$$

La fel, vectorul de câmp electric $\overline{E}=$ grad div $\overline{Z}-\frac{1}{c}\dot{\overline{A}}$, calculat cu aceiași aproximație, se poate pune (ținând seama și de relația $[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]]=\overline{b}\,(\overline{a}.\overline{c})-\overline{c}\,(\overline{a}.\overline{b})$), sub forma

$$\overline{E}=\frac{1}{c^3 r^4}\left\{(\overline{s}\,.\,\overline{r})\left[\overline{r},[\overline{r},\ \dddot{\overline{p}}]\right]+2\,(\dot{\overline{s}}\,.\overline{r})\left[\overline{r},[\overline{r},\ \ddot{\overline{p}}\,]\right]+\right.$$

$$\left.+\ (\ddot{\overline{s}}\,.\overline{r}\,)\left[\overline{r}\,,[\overline{r}\,,\dot{\overline{p}}]\right]\right\},$$

In fine, vectorul lui Poynting $\overline{S}=\frac{c}{4\pi}[\overline{E}\,,\overline{H}]$ are valoarea

$$|\overline{S}\,|=\frac{\sin^2\theta\,\cos^2\theta}{4\pi\,c^5\,r^2}\left\{(\overline{s}\,.\,\dddot{\overline{p}}\,)^2+9\,(\dot{s}\ \ddot{\overline{p}})^2+4\,(\overline{s}\,.\,\ddot{\overline{p}})\ (\dot{\overline{s}}.\dddot{\overline{p}})\right\}.$$

Dacă notăm momentele quadrupolului cu $\Theta_\xi=e\xi^2$, $\Theta_\eta=e\eta^2$, $\Theta_\zeta=e\zeta^2$, atunci $|\overline{S}\,|=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{16\,\pi\,c^5\,r^2}\,(\dddot{\Theta}_\xi+\dddot{\Theta}_\eta+\dddot{\Theta}_\zeta)^2$,

sau, integrând pe o sferă de rază r, obținem emisiunea totală

$$S=\frac{1}{30\,c^5}\left(\Sigma_\xi\ \dddot{\Theta}_\xi\right)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

41. Să se calculeze potențialul unui disc plan, omogen, dreptunghiular $OABC$ într'un punct P așezat pe normala la planul discului în vârful O. (KELLOGG).

Ind, $OA = a$, $OB = b$: $\overline{PO} = x$; $\overline{PA} = d_1$; $\overline{PB} = d_2$; $\overline{PC} = d_3$. Se va porni dela integrala

$$\int \log (b + \sqrt{x^2 + b^2 + \zeta^2})\, d\zeta = \zeta \log (b + \sqrt{x^2 + b^2 + \zeta^2}) +$$

$$+ b \log (\zeta + \sqrt{x^2 + b^2 + \zeta^2}) - \zeta +$$

$$+ x \operatorname{tang}^{-} \frac{\zeta}{x} - x \operatorname{tang}^{-1} \frac{bx}{x\sqrt{x^2 + b^2 + \zeta^2}} .$$

Se găsește, pentru potențialul căutat, expresia

$$k \left\{ b \log \frac{a + d_3}{d2} + a + \log \frac{b + d_3}{d1} - x \operatorname{tang}^{-1} \frac{ab}{x\, d_3} \right\} .$$

42. Densitatea unei stere materiale este o funcție continuă $k(s)$ de distanța s la centru. Să se arate că potențialul este

$$4\pi \left\{ \frac{1}{s} \int_0^s k(r)\, r^2\, dr + \int_s^R k(r)\, r\, dr \ldots \text{ pentru } 0 < s \leqq a \ ; \right.$$

$$4\pi \frac{1}{s} \int_0^R k(r)\, r^2\, dr = M : s \ldots \qquad ,, \quad a \leqq s .$$

unde R este raza sferei și r distanța unui punct al sferei la centrul O; iar M este massa totală a sferei (KELLOGG).

Ind. Prima formulă se stabilește descompunând volumul sferei în două, printr'o sferă concentrică dusă prin punctul interior P și luându-se contribuția fiecărei regiuni asupra potențialului în P, care pentru o regiune se va găsi în exterior, iar pentru cealaltă, în interior.

43. Să se arate că, dacă $x + iy = h \cosh (\xi + i\eta)$, ecuația undelor în mișcarea plană este

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{h^2}{q^2} (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

(Lamé)

Ind. Se va folosi expresia laplaceianului în coordonate generale (§ 117, (57)).

44. Dacă $x = (c + r\cos\theta)\cos\psi$; $y = (c + r\cos\theta)\sin\psi$; $z = r\sin\theta$, să se arate că ecuaţia lui LAPLACE în coordonatele r, θ, ψ, este

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r(c+r\cos\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{(c+r\cos\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right\}+\frac{r}{c+r\cos\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}=0.$$

Ind. Se va folosi expresia laplaceianului în coordonate generale (§ 117, (57)).

45. Să se particularizeze formula care dă potenţialul exterior al unui elipsoid omogen plin (§ 163) pentru cazul când elipsoidul degenerează într'un sferoid alungit.

Ind. Insemnăm cu d distanţa dintre focare şi secţiunea meridiană; cu s suma razelor vectoare ale punctului P la focare; x distanţa lui P la planul equatorial şi r distanţa lui P la axă. Se obţine

$$\varphi_e = \frac{6\pi abck}{d^2}\left\{\frac{4x^2-2r^2-d^2}{2d}\log\sqrt{\frac{s-d}{s+d}}+\frac{s^2(2x^2-r^2)-2f^2x^2}{s(s^2-f^2)}\right\}.$$

46. Aceiaşi problemă pentru cazul când elipsoidul degenerează într'un sferoid turtit.

Ind. Se obţine

$$\varphi_e = \frac{6\pi abck}{d^2}\left\{\frac{4x^2-2r^2-d^2}{2d}\operatorname{cosec}\frac{d}{s}+\frac{s^2(r^2-2x^2)-d^2r^2}{s^2\sqrt{s^2-d^2}}\right\}.$$

47. Să se arate că

$$I=\frac{1}{2\pi}\int P_n(\cos\theta\cos'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi')\,d\varphi' = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta').$$

Ind. Integrala precedentă este un polinom de gradul n în $\cos\theta$, căci integrala puterilor întregi ale lui $\cos\varphi'$ este nulă. Deci, se poate scrie

$$I=\sum_0^n c_r(\theta')\,P_n(\cos\theta).$$

Determinarea coeficienţilor $c_r(\theta')$ conduce la relaţia cerută.

48. Să se demonstreze că o funcţie, de două ori diferenţiabilă, care poate fi exprimată în forma

$$\varphi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\sin nx,$$

satisface ecuației diferențiale

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} .$$

Ind. Se introduc noi variabile $\xi = x + t$ și $\eta = x - t$. Ecuația diferențială devine $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$; iar

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2}\Sigma (a_n \sin n\xi - b_n \cos n\xi) + \frac{1}{2}\Sigma (a_n \sin n\eta + b_n \cos n\eta)$$

$$= S_1(\xi) + S_2(\eta) .$$

Sumele $S_1(\xi)$ și $S_2(\eta)$ sunt absolut convergente și de două ori diferențiabile.

49. Un fir omogen de lungime și greutate egale cu unitatea atârnă vertical, fixat în punctul $x = 1$, capătul liber fiind în punctul $x = 0$ (sensul axei de x este invers sensului gravității). Fie u deplasarea unui punct al firului, perpendiculară pe axa de x. Să se integreze ecuația diferențială a mișcării:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) .$$

Ind. Se face substituția $u(x, t) = q(t)\,\varphi(x)$. Condiții: $\varphi(1) = 0$; $\varphi(0)$ este finită. Se obține funcția lui BESSEL:

$$\varphi(x) = \text{const.}\, J(2\sqrt{\lambda x}) ,$$

50. Dacă u este determinat ca funcție de x, y, z, prin ecuația

$$A(u)\,x + B(u)\,y + C(u)\,z = 1 , \tag{1}$$

sub condiția

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0 , \tag{2}$$

să se arate că orice funcție $f(u)$, cu derivate prime și secunde finite, satisface ecuației lui LAPLACE.

Ind. Derivând (1) în raport cu x, y, z, se obține:

$$A : \frac{\partial u}{\partial x} = B : \frac{\partial u}{\partial y} = C : \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda(x, y, z) \tag{3}$$

unde λ este finit și diferit de zero.

Din condiția (2) rezultă $\lambda^2 (x, y, z) (\text{grad } u)^2 = 0$;

deci $(\text{grad } u)^2 = 0$. Înmulțind numărătorul și numitorul din relația (3) respectiv cu $\frac{\partial A}{\partial u}$, $\frac{\partial B}{\partial u}$, $\frac{\partial C}{\partial u}$, se găsește

$\Delta u = 0$. Rezultă pentru $f(u)$ ecuația

$$\Delta f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} (\Delta u) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (\text{grad } u)^2 = 0 .$$

ELEMENTE
DE
CALCUL TENSORIAL

CAP. I

Exemple introductive

Mărimile fizice, ale căror expresii matematice ne-au condus la conceptul de *scalar* sau *vector*, nu epuizează întreg domeniul Fizicii. Chiar în Mecanică apar,—prin însăşi natura obiectului de studiat,—entităţi, cari nu satisfac operaţiilor scalare sau vectoriale.

Să ilustrăm această observaţie prin câteva exemple, care ne vor iniţia spre înţelegerea nouei noţiuni, de „tensor", pe care ne propunem s'o desvoltăm în cele ce urmează [1]).

200. Tensiunile într'un solid deformabil (Elasticitate) Un solid deformabil, spre deosebire de corpul „rigid", este caracterizat prin faptul că distanţele mutuale ale diferitelor regiuni,—resp. puncte,—nu rămân invariabile când solidul este supus unor acţiuni exterioare. Chiar în stare de echilibru iau naştere, în interiorul solidului, acţiuni reciproce interne, care însă nu schimbă forma şi aspectul solidului.

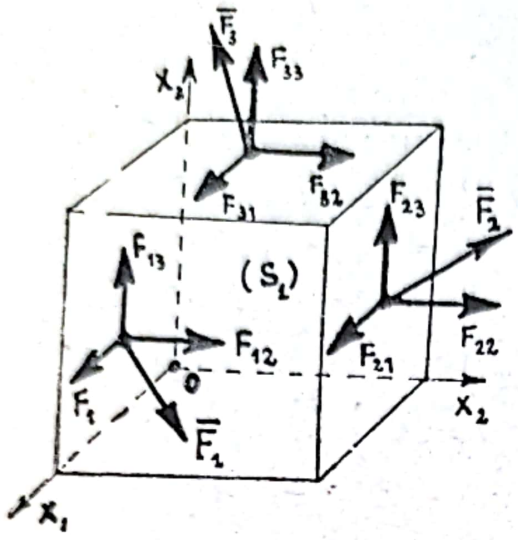
Să considerăm, în spaţiul fizic euclidian, un sistem (car-

---

[1]). v. L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité*, Masson, 1938; H. WEYL, *Raum. Zeit. Materie*; P. APPELL, *Mécanique rationnelle*, v. 5, 1933; L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton, 1926; A. S. EDDINGTON, *Space. Time. Gravitation*, Cambridge, 1920; J. BECQUEREL, *Le Principe de relativité*, Paris, 1922; G. JUVET, *Introduction au Calcul tensoriel*, Paris, 1922; T. LEVI-CIVITA; *The absolute differential calculus*, London, 1927; etc.

Scanned with OKEN Scanner

esian) de trei axe rectilinii ortogonale, x_1, x_2, x_3. (fig. 75). Fie S_1 o suprafaţă plană paralelă cu planul (x_2, x_3), care separă solidul în două regiuni. Regiunea din solid aşezată (de pildă) de partea normalei pozitive la S_1 va exercita asupra regiunii aşezate de partea normalei negative un *efort de tracţiune* $\vec{F}_1$ (forţă interioară, raportată la unitatea de suprafaţă) ale cărei componente pe cele trei axe să fie F_{11}, F_{12}, F_{13}. Repetăm aceleaşi consideraţii pentru suprafeţele S_2 şi S_3, perpendiculare pe axele x_2 şi x_3. Fie F_{21}, F_{22}, F_{23} şi F_{31}, F_{32}, F_{33} componentele eforturilor respective $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$.



(Fig. 75)

Numim aceste acţiuni, într'un solid, *tensiuni*. Mărimea definită prin tabloul celor *nouă* componente

$$(1) \qquad \mathcal{F} \equiv \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{matrix} \right\| ,$$

poartă numele de *tensor* (de ordinul al doilea), anume, tensorul tensiunilor elastice. In general, un tensor de ordinul al doilea posedă N^2 componente, unde N este numărul dimensiunilor spaţiului în care figurăm tensorul.

Observaţie: tensorul elasticităţii este *simetric*. In cea mai mare parte din problemele teoriei Elasticităţii se presupune că nu există acţiuni exterioare asupra solidului, care să provoace un cuplu (proporţional cu elementul de volum). In acest caz,

$$(2) \qquad F_{sk} = F_{ks} \quad . \qquad (s, k = 1, 2, 3).$$

Proprietatea (2) se evidenţiază precum urmează. Să considerăm paralelipipedul dx_1, dx_2, dx_3 şi fie, de exemplu, momentul forţelor F_s în raport cu axa Ox_1. Forţele de pe feţele adiacente acestei laturi au o contribuţie neglijabilă la valoarea totală a cuplului. Faţa de sus şi din dreapta dau cuplul total (forţa înmulţită cu braţul cuplului)

$$(F_{32}\, dx_2\, dx_3)\, dx_2 - (F_{23}\, dx_1\, dx_3)\, dx_2 \quad ,$$

care, după condiția enunțată, trebuind să fie nul, ne dă una din relațiile (2). Repetând raționamentul și pentru celelalte axe, obținem, în adevăr, relațiile (2).

Tensorul este, în acest caz, *simetric*: elementele simetric așezate față de diagonala tabloului, sunt egale. Din cele 9 componente inițiale rămân numai 6 independente.

In Elasticitate se obicinuesc notațiile

$$F_{11} = N_1 \; ; \; F_{22} = N_2 \; ; \; F_{33} = N_3 \qquad \text{(forțe normnle)};$$
$$F_{12} = F_{21} = T_3 \, ,$$
$$F_{23} = F_{32} = T_1 \, , \qquad \text{(forțe tangențiale).}$$
$$F_{31} = F_{13} = T_2 \, .$$

Lipsa de simetrie a acestor notații nu le face comode pentru calcul. De aceia, și pentru generalitate, în calculele teoretice, se obicinuește notația t_{sk}, pe care o vom folosi, la timp, în cele ce urmează.

Tensor anti-simetric se numește tensorul pentru care există relațiile

$$(3) \qquad t_{sk} = -t_{ks} \quad , \quad t_{ss} = -t_{ss} = 0 \quad ,$$

rămânând, bineînțeles, deocamdată la tensorul de ordinul al doilea, definit mai sus.

Este clar că prin condițiile (3) tabloul componentelor are pe diagonală numai zerori. Rămân așadar, pentru tensorul de ordinul al doilea, numai trei componente distincte; tot atâtea câte posedă un vector. Totuși tensorul simetric de ordinul al doilea nu poate fi asimilat cu un vector polar, ci cu vector axial (din cauza antisimetriei). Această identificare este posibilă numai în spațiul euclidian cu trei dimensiuni.

In unele probleme de Fizică putem întâlni tensori *degenerați*. De pildă, într'un fluid, componentele tangențiale ale tensiunilor sunt nule, forța ce se exercită pe un element superficial din fluid, fiind egală cu *presiunea* p, înmulțită cu elementul de suprafață dS. In acest caz, tabloul tensiunilor ia forma degenerată

$$\begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix} \; ;$$

iar tensorul cu o singură componentă p, poate fi tratat ca un scalar.

Descompunerea tensorului (de ordinul al doilea) într'un tensor simetric şi unul antisimetric. Vom stabili mai târziu proprietatea generală de adunare a doi sau mai mulţi tensori (de ordin oarecare), şi vom constata că doi tensori (de acelaş ordin) se adună, adunând componentele respective, din tablouri. Pentru tensorul (1), putem scrie

$$\mathcal{F} = \left\| \begin{matrix} F_{11} & \frac{1}{2}(F_{12}+F_{21}) & \frac{1}{2}(F_{13}+F_{31}) \\ \frac{1}{2}(F_{21}+F_{12}) & F_{22} & \frac{1}{2}(F_{23}+F_{32}) \\ \frac{1}{2}(F_{31}+F_{13}) & \frac{1}{2}(F_{32}+F_{23}) & F_{33} \end{matrix} \right\| +$$

$$+ \left\| \begin{matrix} 0 & \frac{1}{2}(F_{12}-F_{21}) & \frac{1}{2}(F_{13}-F_{31}) \\ \frac{1}{2}(F_{21}-F_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(F_{23}-F_{32}) \\ \frac{1}{2}(F_{31}-F_{13}) & \frac{1}{2}(F_{32}-F_{23}) & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Primul tablou reprezintă un tensor simetric ; al doilea, un tensor antisimetric, după cum se poate verifica uşor.

201. Condiţia de echilibru între forţele elastice şi forţele exterioare, într'un solid deformabil. Condiţia de echilibru este redată prin echivalenţa sistemului total de forţe (vectori), cu un sistem nul.

Să scriem, prin urmare, că suma proiecţiilor tuturor forţelor pe axa Ox_1 (de exemplu) este nulă. Forţa exterioară este proporţională cu elementul de volum $dx_1\, dx_2\, dx_3$ şi cu densitatea ρ ; pe axa Ox_1 are componenta $\rho X_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$. Forţele elastice, care acţionează asupra elementului de volum au pentru feţele adiacente în O, componentele $N_1\, dx_2\, dx_3$, $T_2\, dx_1\, dx_2$ şi $T_3\, dx_1\, dx_3$. Ele nu intervin decât prin diferenţele valorilor relative la perechile de feţe opuse, astfel încât (până la termeni de ordinul al doilea) rămân numai variaţiile tensiunilor

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}\, dx_1\right) dx_2\, dx_3 ; \quad \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_2}\, dx_2\right) dx_3\, dx_1 ; \quad \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_3}\, dx_3\right) dx_1\, dx_2 .$$

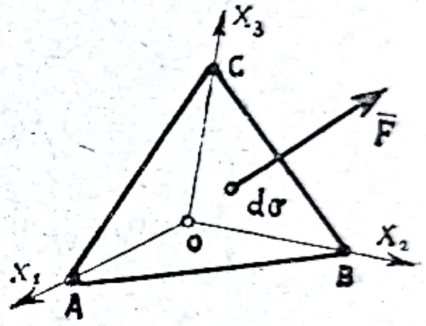
Avem, în definitiv, ecuațiile de echilibru

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial T_3}{\partial x_2}+\frac{\partial T_2}{\partial x_3}+\rho X_0=0 \ ,$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\frac{\partial T_1}{\partial x_3}+\rho Y_0=0 \ ,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_1}+\frac{\partial T_1}{\partial x_2}+\frac{\partial N_3}{\partial x_3}+\rho Z_0=0 \ .$$

202. Distribuția tensiunilor în jurul unui punct (într'un mediu deformabil). Cunoașterea câtimilor $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, (tensiunile într'un punct O pe trei plane perpendiculare) permit să se calculeze tensiunea în O pe un plan de orientare arbitrară. Fie, în jurul punctului O un tetraedru elementar $OABC$ (fig. 76), cu trei fețe paralele cu planele de coordonate. fața ABC, de arie $d\sigma$, având normala cu cosinusurile directoare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Pe elementul de suprafață $d\sigma$ se exercită forța $\vec{F}\, d\sigma$, de componente $F_1\, d\sigma$, $F_2\, d\sigma$, $F_3\, d\sigma$. Proiecțiile elementului de arie $d\sigma$ pe planele de coordonate sunt



(Fig. 76)

$$(4) \qquad d\sigma_1=\alpha_1\, d\sigma \ ; \ d\sigma_2=\alpha_2\, d\sigma \ ; \ d\sigma_3=\alpha_3\, d\sigma \ .$$

Să scriem condiția ca forța ce se exercită pe fața oblică $d\sigma$ să fie compensată de forțele ce se exercită pe celelalte fețe. Căutăm proiecția pe axa x_1: de pe fața $x_2 x_3$ rămâne numai componenta $N_1\, d\sigma_1$; de pe fața $x_3 x_1$, rămâne $T_3\, d\sigma_2$; de pe fața $x_1 x_2$, rămâne $T_2\, d\sigma_3$. Avem așadar,

$$F_1\, d\sigma = N_1\, d\sigma_1 + T_3\, d\sigma_2 + T_2 \ .$$

Inlocuind valorile (4) și procedând la fel și pentru celelalte proiecții, obținem, în definitiv,

$$(5) \qquad \begin{aligned} F_1 &= \alpha_1 N_1 + \alpha_2 T_3 + \alpha_3 T_2 \ , \\ F_2 &= \alpha_1 T_3 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 T_1 \ , \\ F_3 &= \alpha_2 T_2 + \alpha_2 T_1 + \alpha_3 N_3 \ . \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

In notațiile strânse, folosite curent în calculele teoretice, aceste trei ecuații se pot scrie

$$T_s = \sum_k \alpha_k t_{sk} , \qquad (s, k = 1, 2, 3), \tag{6}$$

unde t_{sk} însemnează componentele tensorului, iar T_s componentele vectorului $\bar{T}$, relativ la direcția $\bar{n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Revenind la notațiile inițiale, să considerăm cuadricele (Σ) de centru O și reprezentate de ecuația

$$f(x_1, x_2, x_3) = N_1 x_1^2 + N_2 x_2^2 + \tag{7}$$

$$+ N_3 x_3^2 + 2T_1 x_2 x_3 + 2T_2 x_3 x_1 + 2T_3 x_1 x_2 = \pm 1 ,$$

unde luăm semnul ± 1 astfel ca să avem cuadrice reale. Fie M un punct curent de pe această suprafață. Să punem $\overrightarrow{OP} = \bar{r}$ (astfel încât $x_i = \alpha_i r$). Din (5) și (7) se deduce

$$\frac{1}{2} f'_{x_1} = r F_1 ; \quad \frac{1}{2} f'_{x_2} = r F_2 ; \quad \frac{1}{2} f'_{x_3} = r F_3 . \tag{8}$$

Câtimile din primii membri ai relațiilor precedente sunt proporționale cu cosinusurile directoare ale normalei la $d\sigma$ (element infinitesimat pe Σ) în punctul M. Așadar, forța elastică $\overrightarrow{F}$ exercitată asupra unui plan (P) perpendicular pe $\overrightarrow{OM}$ în O, are direcția normalei în M la (Σ).

Există trei plane (P) de simetrie pentru quadricele (Σ) numai pentru aceste plane tensiunile sunt normale pe ele. Acestea sunt *planele principale* ale quadricei, iar tensiunile corespunzătoare se numesc *tensiuni principale*.

Raportată la aceste plane, ecuația qadricei (7) se scrie

$$N'_1 x'^2_1 + N'_2 x'^2_2 + N'_3 x'^2_3 = 1 , \tag{9}$$

iar tensiunea pe planul $P(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ are componentele

$$F'_1 = \alpha'_1 N'_1 ; \quad F'_2 = \alpha'_2 N'_2 ; \quad F'_3 = \alpha'_3 N'_3 .$$

Observând că, după relația lui EULER, pentru funcțiile omogene,

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + x_3 f'_{x_3} = 2 f(x_1, x_2, x_3) = 2 ,$$

rezultă

$$\frac{1}{r^2} + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 \quad .$$

Aşadar, componenta N a forţei $\overline{F}$ pe direcţia normalei $\overrightarrow{OM}$ la planul (P) este egală cu $1/r^2$.

Observăm că, dacă tensiunile principale sunt *tracţiuni* (toate pozitive) numai cuadrica $f(x_1, x_2, x_3) = +1$ este reală şi anume un elipsoid, iar componenta N (totdeauna pozitivă), este o tracţiune. Dacă tensiunile principale sunt *presiuni* (toate negative), quadrica reală (9) are ecuaţia $f(x_1, x_2, x_3) = -1$, iar N este şi ea o presiune. Dacă tensiunile principale nu sunt de acelaş semn, ecuaţia (9) va reprezenta iperboloizii conjugaţi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \pm 1 \quad .$$

In acest caz, conul asimptotic este locul normalelor la planele (P), pentru care tensiunile sunt tangenţiale $(N = 1/r^2 = 0)$. Dacă una sau două din tensiunile principale se anulează, suprafaţa (9) devine un cilindru eliptic sau iperbolic, sau un sistem de două plane.

203. Tensorul „moment de inerţie". In problema mişcării sistemelor de puncte materiale şi a solidelor apar, în calcule, nişte mărimi, care sunt esenţiale pentru structura materială şi forma geometrică a corpului material, — de forma $\eta = \Sigma\, m_s \delta_s$; unde m_s este massa unui punct material aşezat în punctul geometric M_s, iar δ_s este distanţa acestui punct la un punct fix dat, ori la un ax fix dat, ori la un plan fix dat, — mărimi, numite momente de inerţie".

In cursul nostru de *Mecanică* (pg. 197, cap. III) am stabilit proprietăţile acestor câtimi; între altele, am arătat că η se exprimă prin forma patratică

$$\eta = I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 + 2I_{23}\beta\gamma + 2I_{31}\gamma\alpha + 2I_{12}\alpha\beta \quad ,$$

unde

$$I_{11} = \Sigma m_s (y_s^2 + z_s^2) \quad , \qquad I_{23} = I_{32} = -\Sigma m_s y_s z_s \quad ,$$
$$I_{22} = \Sigma m_s (z_s^2 + x_s^2) \quad , \qquad I_{31} = I_{13} = -\Sigma m_s z_s x_s \quad ,$$
$$I_{33} = \Sigma m_s (x_s^2 + y_s^2) \quad , \qquad I_{12} = I_{21} = -\Sigma m_s x_s y_s \quad ;$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încât mărimile

$$\left\| \begin{matrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{matrix} \right\| ,$$

alcătuesc un tensor simetric de ordinul al doilea. Quadrica

$$I_{11}\,x^2 + I_{22}\,y^2 + I_{32}\,z^2 + 2\,I_{23}\,yz + 2\,I_{31}\,zx + 2\,I_{12}\,xy = 1 ,$$

analoagă quadricei (7), reprezintă „elipsoidul de inerţie" relativ la un punct dat din solid, şi înlesneşte calcularea momentelor de inerţie relative la punctul considerat. Proprietăţile algebrice ale acestui tensor sunt identice, evident, cu proprietăţile algebrice ale tensorului elasticităţii, definit în paragrafele precedente.

Un tensor analog se găseşte în Electromagnetism, după cum am văzut în expunerea noastră asupra teoriei lui MAXWELL. Numai cât acest tensor nu mai este simetric, deoarece atât corpurile magnetizate aşezate în câmpurile magnetice, cât şi dielectricele aşezate în câmpurile electrice (neparalele cu polarizarea dielectrică) suferă mişcări produse de cupluri proporţionale cu elementul de volum. (v. *Electromagnetismul. Teoria lui* MAXWELL).

204. Caracterul esenţial al tensorului de ordinul al doilea. Observă că tensorul întâlnit în exemplele precedente este definit prin *componentele* sale; deci, prin câtimi ale căror valori depind de sistemul de coordonate ales. Este indicat, prin urmare, să ne întrebăm: cum se comportă aceste mărimi, faţă de o transformare a sistemului de coordonate?

Să răspundem la această întrebare, deocamdată, pentru cazul când trecem dela un sistem de coordonate (cartesian), rectiliniu şi ortogonal, la un alt sistem de axe tot rectilinii şi ortogonale (tot cartesian); prin urmare, când efectuăm o *transformare liniară* de coordonate [1])

(10) $$\xi_s = \beta_{sk}\,x_k \qquad (s\,,\,k = 1\,,\,2\,,\,3).$$

[1]) Folosim *regula sumării*: când un indice apare de două ori într'un monom, se sumează pe acest indice numit *indice curent*. În relaţia (10) se înţelege Σ_k, în membrul al doilea.

Condiția de ortogonalitate se exprimă prin relațiile

$$(11) \qquad \beta_{sl}\,\beta_{ml} = \delta_s^{\,m} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } s = m \ ; \\ 0, & \text{„ } \quad s \neq m \ ; \end{cases}$$

unde câtimile β_{sk} sunt cosinusurile directoare ale nouilor axe ξ, față de vechile axe x.

Fie $\bar{n}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ o direcție dată și $\bar{T}$ un vector corespunzător acestei direcții (format la fel ca forța elastică $\bar{F}$ relativă la planul perpendicular pe $\bar{n}$). Componentele lui $\bar{T}$ pe axele x_i se scriu, după relațiile (5),

$$(12) \qquad T_i = \alpha_s\, t_{is} \ .$$

Fie $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ cosinusurile directoare ale direcției $\bar{n}$ față de nouile axe ξ_i; componentele lui $\bar{T}$ pe nouile axe să fie

$$(12') \qquad T'_k = \alpha'_s\, t'_{ks} \ .$$

Dar, după *regula componentelor*, la vectori, avem

$$(13) \qquad T'_k = \beta_{kp}\, T_p \ .$$

Făcând în această ultimă expresie substituțiile (12) și (12') rezultă

$$(14) \qquad \beta_{kp}\,\alpha_s\, t_{ps} = \alpha'_s\, t'_{ks} \ .$$

Să luăm ca direcție $\bar{n}$, succesiv, direcțiile nouilor axe ξ_i. Obținem, pentru direcția (ξ_1), din (14),

$$\beta_{kp}\,\{\cos(\bar{\imath}', \bar{\imath})\, t_{p1} + \cos(\bar{\imath}', \bar{\jmath})\, t_{p2} + \cos(\bar{\imath}', \bar{k})\, t_{p3}\} = t'_{k1} \ ;$$

sau, încă,

$$\beta_{kp}\,\beta_{1r}\, t_{pr} = t'_{k1} \ ;$$

și, în mod analog, pentru direcțiile (ξ_2) și (ξ_3),

$$\beta_{kp}\,\beta_{2r}\, t_{pr} = t'_{k2} \ ; \quad \beta_{kp}\,\beta_{3r}\, t_{pr} = t'_{k3} \ ;$$

ceeace revine, în scriere prescurtată,

$$(15) \qquad t'_{ks} = \beta_{kp}\,\beta_{sr}\, t_{pr} \ ;$$

relație, care ne dă componentele t'_{ks} dacă se cunosc componentele t_{pr}; așadar, legea de transformare a componentelor tensorului de ordinul al doilea, față de o transformare liniară de coordonate.

In membrul al doilea al relației (15) avem o sumă dublă, extinsă asupra indicilor $p = 1, 2, 3$, și $r = 1, 2, 3$; așadar, în total, *nouă* termeni.

Scanned with OKEN Scanner

Mai târziu, vom stabili formulele de transformare pentru tensori de ordin oarecare, pentru transformări de axe oblice şi curbilinii.

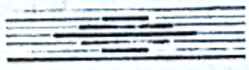
Observăm, din (15), că formula de transformare pentru tensorul de ordinul al doilea este o expresie liniară în vechile componente ale tensorului, dar *biliniară* în cosinusurile direc-toare ale nouilor direcţii, faţă de vechile axe, spre deosebire de formulele (13) de transforma-e ale vectorilor, care, pre-cum am văzut mai demult, sunt liniare atât faţă de vechile componente, cât şi faţă de cosinusurile directoare.

Formele biliniare şi formele patratice joacă un rol capital în calculul tensorial. De aceia, vom reaminti, în capitolul ce urmează proprietăţilor acest forme.

Pe de altă parte, o lege fizică nu poate, — prin însăşi natura ei, — să depindă de alegerea specială a sistemului de referinţă: *o lege fizică, exprimată tensorial într'un anumit sistem de coordonate, este valabilă în oricare alt sistem de coordonate.* Acest principiu ne impune căutarea *invarianţilor* câmpurilor tensoriale.

Stabilirea regulelor de calcul tensorial în spaţiile euclidiene şi în spaţiile riemanniene, precum şi găsirea invarianţilor câmpurilor tensoriale, este problema pe care vrem s'o desvoltăm în capitolele ce urmează.

Teoria calculului tensorial poate să fie desvoltată, fie pornind de la conceptele de „operaţie„ şi „formaţie", cum face prof. Octav Onicescu (Calcul vectorial, Cultura Naţională, 1928), fie pornind de la proprietăţile fundamentale ale spaţiului, cum face H. Weyl, în „Raum. Zeit. Materie". Pentru noi, scalarii, vectorii, tensorii, sunt construcţii matematice reprezentative ale unor mărimi fizice, şi, prin aceasta, ele însele mărimi matematice; iar operaţiile cu aceste mărimi ne interesează în măsura posibilităţii de a determina o metodă comodă şi naturală pentru exprimarea legilor fizice. In acest scop, vom folosi atât proprietăţile pur algebrice cât şi reprezentările în spaţiile euclidiene şi riemanniene, drept metode de calcul şi imagini geometrice, pentru mărimi deduse din problemele puse de Fizica clasică şi modernă.



CAP. II.

Forme liniare, biliniare şi patratice.

A. Forme şi substituţii liniare [1]).

205. Forme liniare. 1. *Difiniţie.* Numim *formă* orice polinom întreg şi omogen în raport cu n (număr finit) variabile independente $x_1, x_2, \ldots x_n$. Dacă polinomul este de gradul întâi în raport cu toate variabilele, forma se numeşte *liniară.* O formă liniară L_s se scrie

$$L_s(x) = l_{sk}\, x_k \,, \tag{1}$$

unde în membrul al doilea se înţelege că sumăm de la 1 la n pe indicele ce apare de două ori, după cunuscuta regulă a sumării, pe care o vom folosi în cele ce urmează tot timpul cât nu este de temut vre-o ambiguitate. Coeficienţii

l_{sk} $(s, k = 1, 2, \ldots n)$ fiind constanţi.

2. *Forme liniare independente.* Fie m forme liniare de n variabile

$$L_s(x) = l_{sk}\, x_k \,, \qquad (s = 1, 2, \ldots m) .$$

Aceste formn sunt liniar independente, dacă nu este posibil să se găsească m numere nu toate nule λ_s, astfel încât forma $\Sigma \lambda_s L_s$ să fie identic nulă. Pentru ca această condiţie să

---

[1]) v. D. HILBERT—COURANT, *Methoden der mathematischen Physik,* I, 1924 ;

P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle,* T. V ; 1933 ;

H. WEYL, *Raum. Zeit. Materie,* 1921 ; precum şi orice tratat de Algebră superioară.

fie înplinită, este necesar şi suficient ca sistemul de m ecuaţii liniare omogene (în λ),

$$\lambda_s \, l_{sk} = 0$$

să nu poseadă alte soluţii de cât soluţiile $\lambda_s \equiv 0$. Aceasta implică $m \leqq n$; iar din teoria determinanţilor, se ştie că e necesar şi suficient ca tabloul coeficienţilor

$$l = \| l_{sk} \| ,$$

să fie de rangul m.

Condiţia precedentă este echivalentă cu *teorema*: „pentru ca m forme liniare să fie independente, este necesar şi suficient ca să putem alege valorile numerice ale variabilelor astfel încât formele să ia valori numerice arbitrare, date de mai înainte". In adevăr, tabloul coeficienţilor l_{sk} ai sistemului de ecuaţii liniare neomogene

$$l_{sk} \, x_k = A_s ,$$

unde A_s sunt numere date, fiind diferit de zero, putem rezolvi sistemul precedent în raport cu variabilele x_k.

3. *Proprietăţi.*

$$L(x + y) = L(x) + L(y)$$
$$L(\lambda x) = \lambda L(x) .$$

206. Substituţii liniare. Fie un sistem de n relaţii de forma

$$\xi_s = \alpha_{sk} \, x_k \qquad (s = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

între două serii de n variabile ξ_s şi x_k ; câtimile α_{sk} să fie independente de variabile ; iar determinantul lor $\alpha = | \alpha_{sk} |$ să fie diferit de zero.

Relaţiile (2) definesc o substituţie liniară, pe care o putem reprezenta prin scrierea simbolică

$$\xi = S \, x .$$

Dacă sunt daţi coeficienţii, prin tabloul

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & . & \ldots & \alpha_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ \alpha_{n1} & . & \ldots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| , \tag{3}$$

substituția este complet determinată. Tabloul (3) formează *matricea* substituției; valoarea α a determinantului (3) se numește *modùlul* substituției.

Modùlul fiind diferit de zero, putem rezolva ecuațiile (2) în raport cu variabilele x_k; operație, care poartă numele de *inversarea* substituției

$$x = S^{-1}\,\xi\ ;$$

ceeace se scrie

$$x_s = \overset{*}{\alpha}_{sk}\,\xi_k\ . \tag{4}$$

întru cât substituția inversă e și ea liniară.

Din (2) și (4), deducem

$$x_s = \overset{*}{\alpha}_{sk}\,\alpha_{kp}\,x_p\ ;$$

de unde rezultă condițiile

$$\alpha_{pk}\,\overset{*}{\alpha}_{ks} = \overset{*}{\alpha}_{sk}\,\alpha_{kp} = \delta_s{}^p, \tag{5}$$

$\delta^s{}_p$ fiind simbolul lui KRONECKER (egal cu 1 pentru $s = p$ și cu zero pentru $s \neq p$).

Să considerăm două substituții succesive

$$\xi_s = \alpha_{sk}\,x_k \quad ; \quad x_k = \beta_{kp}\,y_p\ .$$

Obținem imediat substituția rezultantă (*produsul* primelor două: $S_3 = S_1 \times S_2$):

$$\xi_s = \alpha_{sk}\,\beta_{kp}\,y_p \quad ; \quad \text{sau,}\ \xi_s = \gamma_{sp}\,y_p\ ,$$

undee am pus

$$\gamma_{sp} = \alpha_{sk}\,\beta_{kp}\ ; \tag{6}$$

relație, care exprimă regula de multiplicare (*necomutativă* în general) a matricelor. Așadar, modùlul substituției rezultante este egal cu produsul modulilor substituțiilor parțiale. Comutativitatea are loc pentru substituțiile inverse: ele sunt, atunci, permutabile.

Produsul a două substituții inverse dă substituția identică $S^0 = 1$; a cărei matrice este matricea unitară; modùlul acestei matrice, este, evident, egal cu unitatea.

Mulțimea substituțiilor liniare formează un *grup*: produsul a două substituții liniare, oarecare, face parte din mulțime;

substituţia inversă ca şi substituţia identică aparţin mulţimii.

207. Substituţii ortogonale. O substituţie se zice *ortogonală*, dacă admite *invariantul*

$$\sum_{i=1}^{n} x_2^i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad : \tag{7}$$

adică, dacă transformă forma practică $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ în ea însăşi.

Pentru ca această relaţie să aibă loc, trebue ca

$$\sum_{i} \xi^2{}_i = \sum_{i,s,p} \alpha_{is}\, \alpha_{ip}\, x_s\, x_p = \delta^p{}_s\, x_s\, x_p = \sum_{s} x_s{}^2 .$$

Din identitatea precedentă rezultă *relaţiile de ortogonalitate:*

$$\alpha_{is}\, \alpha_{ip} = \delta_s{}^p . \tag{8}$$

Comparând (5) şi (8), se vede că substituţia inversă posedă coeficienţii

$$\alpha^*_{sp} = \alpha_{ps} ;$$

deci, matricele a două substituţii ortogonale inverse diferă numai prin schimbarea între ele a liniilor cu coloanele.

Observaţie. Concepând substituţia liniară drept o *transformare a axelor de coordonate* x_i în ξ_i, observăm că matricea substituţiei este alcătuită din elemente α_{sp}, care se raportează *simultan* la *ambele sisteme de coordonate*. De pildă, în transformarea ortogonală α_{sp} sunt cosinusurile directoare ale noilor axe faţă de vechile axe.

Această observaţie este bine să fie reţinută, întru cât, în tabloul prin care am definit tensorul de ordinul al doilea, ca şi (după cum vom vedea mai târziu) în tabloul care defineşte, în general, un tensor de ordin oarecare, elementele constitutive (componentele tensorului) se referă numai la *un anumit sistem de coordonate*. Prin urmare, matricea unei substituţii liniare nu are caracter de tensor, în timp ce un tensor poate fi exprimat printr'o matrice.

B. Forme biliniare şi forme pătratice.

206. Forme biliniare. Numim formă biliniară un polinom de gradul întâi în fiecare din cele două serii de variabile x_i şi

y_j; aşadar, formă liniară în fiecare din variabile, separat:

$$(Q)\ (x\,,\,y) = q_{sk}\, x_s\, y_k\ .$$

Forma nu este *aegenerată* dacă nu devine identic nulă pentru un sistem de valori ale variabilelor y_k, decât când toţi $x_s = 0$. Această proprietate nu este satisfăcută decât dacă sistemul de ecuaţii omogene

$$q_{sk}\, x_s = 0\ , \qquad (k = 1\,,2\,,\ldots n),$$

nu admite decât soluţia $x_s = 0$. Rezultă că determinantul coeficienţilor, numit *discriminatul* formei, este diferit de zero;

$$q = |\ q_{sk}\ | \neq 0\ .$$

Forma biliniară este simetricâ, dacă

$$Q\,(x\,,y) = Q\,(y\,,x)\ ;$$

deci, dacă toţi

$$q_{sk} = q_{ks}\ .$$

Dintr'o formă biliniară nesimetrică putem să construim o formă biliniară simetrică prin operaţia

$$\frac{1}{2}\,\{\,Q\,(x\,,y) + Q\,(y\,,x)\,\}\ .$$

Fiecărei forme biliniare $Q\,(x\,,y)$ îi corespunde o *formă patratică* şi numai una singură,

$$Q\,(x\,,x) = q_{sk}\, x_s\, x_k\ .$$

Invers, fiecărei forme patratice putem face să-i corespundă o infinitate de forme biliniare, dintre care numai una singură este simetrică.

Prin produsul a două forme biliniare

$$A\,(x\,,y) = a_{sk}\, x_s\, y_k\ ; \quad B\,(x\,,y) = b_{sk}\, x_s\, y_k\ ,$$

ale căror discriminanţi sunt $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, se înţeîege forma biliniară

$$\mathcal{C}\,(x\,,\,y) = c_{sk}\, x_s\, y_k\ ,$$

al cărei discriminant este

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

cu termenii

$$c_{sk} = a_{sp}\, b_{pk}\ ,$$

cari se obţin prin regula de multiplicare a matricelor (compară § 21). Puterea $Q^m(x, y)$ se numeşte formă *iterată* de m ori.

Forma biliniară *reciprocă* a formei $Q(x, y)$ este acea formă biliniară

$$Q^{-1}(x, y) = q^{sk} x_s y_k ,$$

care satisface condiţiei $Q \cdot Q^{-1} = 1$.
Din teoria ecuaţiilor algebrice liniare rezultă imediat

$$q^{sk} = (-1)^{s+k} \frac{1}{q} \times \text{minorul lui } q_{ks} \text{ în determinantul } q ;$$

sau încă,

$$q^{sk} = \frac{\partial}{\partial q_{sk}} (\log | q |) .$$

209. Forme patratice. Forma patratică este, precum am văzut în paragraful precedent, un polinom omogen de gradul al doilea în raport cu sistemul de n variabile x_k:

$$Q(x, x) = q_{sk} x_s x_k , \qquad (s, k = 1, 2, \ldots n) \tag{9}$$

în care figurează două feluri de termeni: patratici $(s = k)$ şi dreptunghiulari $(s \neq k)$. Putem, fără a restrânge generalitatea, să considerăm coeficienţii q_{sk} *simetrici*. In adevăr, nu avem decât să scriem expresia (9) sub formele echivalente:

$$Q(x, x) = q_{sk} x_s x_k = q_{ks} x_k x_s = \frac{1}{2} (q_{sk} + q_{ks}) x_s x_k ,$$

astfel încât, în ultima formă, proprietatea de simetrie a coeficienţilor este evidentă. Vom face această ipoteză în cele ce urmează.

Determinantul simetric, nenul, dedus din tabloul

$$\| q_{sk} \| ,$$

format din coeficienţii formei patratice, numit *discriminantul* formei, este presupus, în cele ce urmează, diferit de zero: forma patrntică considerată *nu este degenerată*.

Observăm că derivatele parţiale ale formei patratice

$$\frac{1}{2} Q'_{x_s} = q_{kk} x_k \qquad (s = 1, 2, \ldots n),$$

constituesc un sistem de n forme liniare.

210. Descompunerea unei forme patratice în sume de patrate de forme liniare, independente. Fie m forme liniare de n variabile

$$L_s(x) = X_s = l_{sk}\, x_k , \qquad (s = 1, 2, \ldots m), \tag{10}$$

pe care le presupunem *independente:* determinantul coeficienților $l = |\, l_{sk}\,|$ să fie de rangul m. Putem exprima forma (9) prin sume de patrate

$$Q(x, x) = \sum_{1}^{m} X^2_s . \tag{11}$$

In adevăr, să presupunem:

1. una din variabilele x_s figurează într'un termen patratic, astfel încât $q_{ss} \neq 0$. Să punem

$$L_s(x) = q_{sk}\, x_k = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_s} .$$

Avem, evident,

$$Q(x, x) = \frac{1}{q_{ss}}(L_s)^2 + Q_1(x, x) ,$$

unde forma restantă Q_1 nu mai conține variabila x_s.

2. Să considerăm două variabile x_k și x_s, care nu figurează decât într'un termen dreptunghiular, astfel încât $q_{sk} \neq 0$; termenii lor patratici lipsind din formă ($q_{ss} = 0$, $q_{kk} = 0$). Să punem

$$L_s = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_s} = q_{sk}\, x_k ;$$

$$L_k = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_k} = q_{kp}\, x_p .$$

Avem

$$Q(x, x) = \frac{2}{q_{sk}} L_s L_k + Q_1(x, x) ;$$

sau, încă,

$$Q(x, x) = \frac{1}{2\, q_{sk}}\left\{(L_s + L_k)^2 - (L_s - L_k)^2\right\} + Q_1 ,$$

unde Q_1 nu mai conține nici pe x_s nici pe x_k.

Aplicând succesiv aceste două metode vom ajunge să efectuăm descompunerea preconizată.

Se stabileşte, apoi, că formele liniare (10) astfel obţinute, sunt independente ; ceeace înseamnează că putem atribui formelor liniare (10) valori date dinnainte pentru un sistem anumit de valori ale variabilelor x_s. In adevăr, din descompunerea (11), având în vedere expresiile (10), deducem

$$\frac{1}{2} Q'x_s = l_{ks} X_k \ .$$

Cum determinantul $l = |l_{ks}| \neq 0$, putem inversa sistemul precedent :

$$X_k = l^*_{ks} \left(\frac{1}{2} Q'x_s \right) \ .$$

Rezultă că cele două sisteme de ecuaţii liniare

$$\frac{1}{2} Q'_{x_s} = 0 \quad ; \quad X_k = 0 \ ;$$

sunt echivalente. Dar, rangul sistemului al doilea este m ; acesta va fi şi rangul primului sistem, care este egal cu rangul discriminantului formei patratice date. Prin urmare, formele (10) sunt independente, iar numărul lor $m \leqq n$, este egal cu rangul discriminantului formei patratice.

Metoda precedentă se datoreşte lui Gauss. Ea conduce, evident, la descompuneri diferite, după alegerea ordinii de grupare a variabilelor.

Teoremă. „Oricare ar fi felul descompunerii unei forme patratice în sumă de patrate a unor forme liniare independente, vom găsi totdeauna acelaş număr de termeni patratici, şi anume, un număr egal cu rangul discriminantului formei patratice date".

211. Forme patratice cu coeficienţi reali. In studiul proprietăţilor geometrice ale spaţiilor fizice, formele patratice ce apar, au coeficienţii reali. De aceia, în cele ce urmează vom considera numai astfel de forme.

Metoda lui Gauss, expusă mai sus, ne conduce, în definitiv, la o descompunere, care are, în general, aspectul următor

$$Q(x, x) = \sum_1^{n1} X_s^2 - \sum_1^{n2} Y_k^2 \ , \tag{12}$$

un grup de n_1 termeni fiind pozitivi, iar un grup de n_2 termeni negativi; astfel încât numărul total $n_1 + n_2 = m$, după teorema precedentă.

212. Legea „inerției" formelor patratice. Oricare ar fi descompunerea, se păstrează nu numai numărul total al'patratelor, dar se păstrează, separat, numărul termenilor pozitivi n_1 și numărul termenilor negativi n_2.

In adevăr, fie o altă descompunere, decât (12), anume

$$Q(x, x) = \sum_1^{n'1} (X'_s)^2 - \sum_1^{n'2} (Y'_k)^2 \quad , \tag{13}$$

unde să presupunem că $n'_1 \neq n_1$ și $n'_2 \neq n'_2$. Pentru a fixa ideile, fie $n_1 > n'_1$; atunci, cum $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$, urmează că $n_2 < n'_2$.

Să considerăm sistemele de ecuații liniare

$$X_s = 0 \quad , \quad Y_k = 0 \quad ; \tag{14}$$

$$X_s = 0 \quad , \quad Y'_p = 0 \quad . \qquad \begin{cases} s = 1, 2 \ldots n_1, \\ k = 1, 2 \ldots n_2, \\ p = 1, 2 \ldots n'_2, \end{cases} \tag{15}$$

Sistemul (14), rezolvat, permite să se calculeze $n_1 + n_2$ necunoscute, pe când sistemul (15) permite determinarea unui număr de $n_1 + n'_2 > n'_1 + n'_2 = n_1 + n_2$ necunoscute. Așadar, va exista cel puțin o soluție x_0 a sistemului (15) care nu satisface toate ecuațiile sistemului (14). Să înlocuim această valoare în membrul al doilea al expresiei (12); ea va lua o valoare numerică negativă sau nulă; Să înlocuim apoi, aceiași valoare (x_0) în (13); expresia va lua o valoare pozitivă. Acest rezultat fiind contradictoriu, urmează că trebue să avem:

$$n_1 = n'_1 \text{ și } n_2 = n'_2 \quad .$$

Dacă $n_1 \neq 0$ și $n_2 \neq 0$, forma (12) este *nedefinită*; dacă $n_2 = 0$, forma este *pozitiv-definită*; dacă $n_1 = 0$, forma este *negativ-definită*.

213. Forma „polară" a unei forme patratice. Să considerăm forma patratică $Q(\lambda x + \mu y)$ și s'o desvoltăm în serie Taylor, după puterile parametrilor λ și μ. Coeficientul lui $2\lambda\mu$

se scrie

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} x_s Q'_{ys} = \frac{1}{2} y_s Q'_{xs} = q_{sk} x_s y_k \quad :$$

aşadar, o formă biliniară, numită *forma polară* a formei patratice dată.

214. Forma „adjunctă" a unei forme patratice. Fie forma patratică

$$Q(x, x) = q_{sk} x_s x_k \quad , \tag{16}$$

al cărei discriminant $q = |q_{sk}|$ să fie diferit de zero. Să considerăm substituţia liniară

$$\xi_s = \frac{1}{2} Q'_{x_s} = q_{sk} x_k \quad .$$

Numim variabilele ξ_s *variabile adjuncte.* Această substituţie constitue un sistem de n ecuaţii liniare în x_k, pe care-l putem rezolva în raport cu variabilele x_k. Obţinem

$$x_s = q^{sk} \xi_k \quad .$$

Inlocuind aceste valori în (16), se capătă forma adjunctă

$$Q_a(\xi, \xi) = q^{sk} \xi_s \xi_k \quad . \tag{17}$$

Este evident că, reciproc, form (16) este, la rândul ei adjuncta formei (17).

215. Transformarea unei forme patratice printr'o substituţie liniară. Să aplicăm formei patratice (16) o substituţie liniară oarecare

$$x_s = \alpha_{sk} y_k \quad , \tag{18}$$

de modùl diferit de zero. Inlocuind (18) în (16), obţinem

$$Q^*(y, y) = q_{sk} \alpha_{sp} \alpha_{km} y_p y_m \quad ,$$

sau,

$$Q^*(y, y) = q^*_{pm} y_p y_m \quad ,$$

unde am pus

$$q^*_{pm} = q_{sk} \alpha_{se} \alpha_{km} \quad .$$

Din teoria multiplicării determinanţilor, rezultă

$$q^* = |q^*_{pm}| = \alpha^2 . q \quad . \tag{20}$$

In cazul unei transformări *ortogonale*, după § 107, $\alpha^2 = 1$; aşadar, *discriminantul formei este un invariant.*

C. Interpretare geometrică

Să admitem că ne aflăm într'un spaţiu euclidian E_n cu un număr *finit* n de dimensiuni, definit la § 6. In acest spaţiu fie un vector $\bar{x}$, de componente $x_1, x_2, \ldots x_n$, faţă de un sistem *afin* de coordonate.

216. Multiplicităţi liniare. Fie $m \leq n$ forme liniare, independente

$$L_s(\bar{x}) = l_{sk}\, x_k \qquad (s = 1, 2, \ldots m)$$

După cum am observat în § 21, sistemul de ecuaţii liniare, omogene,

$$L_s(\bar{x}) = 0 \quad ,$$

admite un sistem de soluţii, care determină, în E_n, o *multiplicitate vectorială liniară*, cu $n - m$ dimensiuni.

In § 21 am constatat, de asemeni, că, din teoria ecuaţiilor liniare, soluţiile sistemului de ecuaţii liniare, neomogene,

$$L_s(\bar{x}) = A_s \, , \qquad (s = 1, 2, \ldots m)$$

unde A_s sunt constante date, determină, în E_n, *o multiplicitate punctuală liniară*, cu $n - m$ dimensiuni.

Admiţând existenţa unei *metrici* (v. § 21), se defineşte *produsul scalar* a doi vectori, prin

$$\bar{x} \,.\, \bar{y} = x_s\, y_s = y_s\, x_s = \bar{y} \,.\, \bar{x}$$

Inegalitatea lui Schwartz:

$$(\bar{x} \,.\, \bar{y})^2 \leqq \bar{x}^2 \,.\, \bar{y}^2 \; ;$$

ceeace scalar, se scrie

$$\sum_s (x_s\, y_s)^2 \leqq \Sigma\, x^2{}_s \,.\, \Sigma\, y^2{}_s \; , \tag{21}$$

(unde semnul egal este valabil pentru cazul când toţi x_s şi y_s sunt proporţionali), se demonstrează din observaţia: ecuaţia patratică în variabila independentă u

$$\sum_s (x_s\, u + y_s)^2 = 0 \; , \tag{22}$$

nu poate să aibă decât rădăcini imaginare, sau o rădăcină reală dublă, când are coeficienţii proporţionali. In adevăr, relaţia (21) exprimă condiţia ca discriminantul ecuaţiei (22) să fie mai mic sau, cel mult, egal cu zero.

217. Transformări liniare. O substituţie liniară

$$\xi_s = \alpha_{sk}\, x_k \ , \tag{23}$$

al cărui modùl este diferit de zero, este susceptibilă de două interpretări: 1. ne putem închipui că x_s şi ξ_s reprezintă componentele *aceluiaşi vector*, în E_n, raportate la *două sisteme* de referinţă, diferite; atunci, formulele (23) exprimă legea de transformare a axelor de coordonate; 2. putem admite că x_s şi ξ_s sunt componentele a *doi vectori* diferiţi, raportaţi la *acelaş sistem* de coordonante; relaţiile (23) definesc, atunci, o *corespondenţă liniară vectorială.*

Am utilizat, şi vom utiliza, după nevoi, ambele interpretări.

218. Contragredienţă. Cogredienţă. Contravarianţă. Covarianţă. Două transformări liniare, de modùli diferiţi de zero,

$$x^s = \alpha^s{}_k\, \xi^k \ , \tag{24}$$

$$y_s = \beta_s{}^k\, \eta_k \ , \tag{25}$$

ale variabilelor x, y în variabilele ξ, η, se numesc *contragrediente* (una faţă de cealaltă), dacă forma biliniară unitară $y_s x^s$ se transformă în ea însăşi

$$y_s\, x^s = \eta_s\, \xi^s \ , \tag{26}$$

Relaţia de contragredienţă este reciprocă.

Din (26) rezultă că între coeficienţii expresiilor (24) şi (25) există relaţia

$$\alpha_k{}^s\, \beta_s{}^p = \delta_k{}^p \ ; \tag{27}$$

unde $\delta_k{}^p$ este cunoscutul simbol al lui KRONECKER.

Inversând relaţiile (24) şi (25), obţinem

$$\xi^s = \alpha^*{}_k{}^s\, x^k \ ; \quad \eta_s = \beta^*{}_s{}^k\, y_k \ ; \tag{28}$$

care, trebuind să satisfacă la condiţia de a lăsa invariantă forma (26), admit relaţii similare relaţiilor (27), între coeficienţi:

(27′) $$\alpha^*{}_k{}^s \, \beta^*{}_s{}^p = \delta_k{}^p \quad .$$

Dar, după § 206, între coeficienții substituțiilor inverse (25) și (28), au loc relațiile

(29) $$\alpha^s{}_k \, \alpha^*{}_s{}^p = \delta_k{}^p \; ; \; \beta_s{}^k \, \beta^{*s}{}_p = \delta^k{}_p = \delta^p{}_k = \beta^*{}_s{}^k \, \beta^s{}_p \quad .$$

Comparând relația (27) cu relațiile (29), deducem,

$$\alpha^*{}_s{}^p = \beta_s{}^p \quad ; \quad \beta^*{}_s{}^k = \alpha_s{}^k \quad ;$$

astfel, încât, transformările (28), inverselе transformărilor (24) și 25), se scriu, în definitiv,

(28′) $$\xi^s = \beta_s{}^k \, x^k \quad ; \quad \eta_s = \alpha_s{}^k \, y_k \quad .$$

In cazul unei transformări *ortogonale*,

$$x^s = \alpha^s{}_k \, \xi^k \quad ;$$

a cărei inversă este

$$\xi^s = \alpha^*{}^s{}_k \, x^k \quad .$$

Cum, după § 207,

$$\alpha^s{}_k \; \alpha^*{}_s{}^p = \delta_k{}^p \quad ,$$

rezultă, din (27), că

$$\xi^s = \beta^s{}_k \, x_k \; .$$

Așadar, o *transformare ortogonală este propria ei contragredientă.*

Teoremă. „Dacă supunem o formă liniară în variabilele x^s unei substituții liniare, oarecare, coeficienții formei liniare se transformă prin relații care sunt contragrediente cu transformările variabilelor: «coeficienții se transformă *contragredient* prin raport cu variabilele»“.

Componente vectoriale „contravariante“. Fie vectorul $\bar{x}\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ raportat la un sistem *afin* de coordonate, de vectori unitari $\bar{\imath}_s$ $(s = 1, 2, \ldots n)$

(30) $$\bar{x} = x^s \, \bar{\imath}_s \quad .$$

Să considerăm un alt sistem de coordonate afin $\bar{\imath}_s{}^*$. Fie

(31) $$\bar{\imath}^*{}_s = \alpha_s{}^k \, \bar{\imath}_k \quad ,$$

transformarea liniară, care leagă cele două sisteme de coordonate.

Este evident că transformarea (31) trebue să admită invariantul

$$x^{*s}\,\bar{u}^{*}_{s} = x^{s}\,\bar{u}_{s} = \bar{x} \quad , \tag{32}$$

care exprimă acelaş vector $\bar{x}$ în cele două sisteme de coordonate.

Din (30), (31) şi (32), rezultă

$$x^{*s} = \alpha^{s}_{k}\,x^{k} \quad . \tag{33}$$

Comparând relaţiile de transformare (31) şi (33), posedând invariantul (32), cu relaţiile de definiţie a transformărilor contragrediente (24), (25), (26), putem enunţa proprietatea: „componentele x^{s}, ale vectorului $\bar{x}$, se transformă *contragredient* faţă de transformările suferite de vectorii unitari ai axelor de coordonate".

Definiţie. Componentele x^{s}, care se transformă contragredient faţă de transformarea vectorilor unitari ai axelor de coordonate, se numesc *componente contravariante.*

Notaţie. Componentele contravariante se disting în scris prin aşezarea indicilui; anume, *sus*: x^{s}.

Admiţând o *metrică* în E_n, putem considera drept componente ale vectorului $\bar{x}$, proiecţiile acestui vector pe axele de coordonate $\bar{u}_s$:

$$x_s = \bar{x} \,.\, \bar{u}_s \quad , \tag{34}$$

definite, precum se vede, prin produsul scalar dintre vectorul $\bar{x}$ şi vectorul unitar $\bar{u}_s$. Aceste câtimi, pentru o transformare (31) a sistemului de coordonate, se transformă ca înşişi vectorii fundamentali; anume, chiar după formula (31),

$$x^{*}_{s} = \alpha^{k}_{s}\,x_k \quad . \tag{35}$$

Definiţie. Numim transformarea (35) *cogredientă* cu transformarea (31); iar componentele (34) se numesc componente *„covariante"*.

Notaţie. Componentele covariante ale vectorului se notează punându-se indicele jos: x_s.

Relaţia dintre componentele contravariante şi covariante ale aceluiaş vector $\bar{x}$, se obţine, înlocuind în (34) pe $\bar{x}$ prin exprimarea (32),

$$x_s = (x^{k}\,\bar{u}_k \,.\, \bar{u}_s) = (\bar{u}_k \,.\, \bar{u}_s)\,x^{k} \quad ,$$

sau,

$$x_s = a_{sk}\, x^k ,$$

şi invers,

(37) $$x^s = a^{sk}\, x_k ;$$

unde coeficienţii a_{sk} au o semnificaţie evidentă: sunt cosinusurile unghiurilor făcute de axele de coordonate; iar a^{sk} se deduc din a_{sk} după legea stabilită la § 208.

Intr'un sistem de coordonate cartesian, cele două categorii de componente coincid; ceeace rezultă imediat din faptul că, pentru axe rectangulare, toţi a_{sk} şi a^{sk} sunt egali cu unitatea. In acest caz, matricea transformărilor (36) şi (37) devine *matricea unitară*

$$U = (u_{sk}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

adică, $u_{sk} = \delta_s^k$ (simb. KRONECKER).

219. Reducerea unei forme patratice la „forma canonică" (transformare la axele principale). Fie o formă patratică, cu coeficienţi reali,

(38) $$Q(x, x) = q_{sk}\, x_s\, x_k ,$$

cu matricea $Q = \| q_{sk} \|$ simetrică şi discriminant $| q_{sk} | \neq 0$.

Să căutăm o transformare liniară, ortogonală,

(39) $$x_s = l_{sk}\, y_k = L_s(y) , \qquad (s = 1, 2, \dots n)$$

de modùl diferit de zero, care să transforme forma (38) în

(40) $$Q^*(y, y) = q_s\, y^2{}_s ,$$

numită „formă canonică".

Vom adopta demonstraţia din HILBERT-COURANT (*Methoden der math. Physik*, I. p. 11). Pornim de la *Teorema lui* WEIERSTRASS: „o funcţie continuă de una sau mai multe variabile, conţinute într'un domeniu finit, admite o valoare maximă în acest domeniu".

După această teoremă, vom putea să găsim un vector unitar $\bar{u}_1$ (de componente $u_{11}, u_{12}, \dots u_{1n}$), astfel încât forma pa-

tratică $Q(x, x)$, sub condiția

$$\sum_{s=1}^{n} x^2_s = 1 , \tag{41}$$

să ia valoarea maximă λ_1, pentru $x_1 = u_{11}$, $x_2 = u_{12}, \ldots x_n = u_{1n}$. Apoi, vom găsi un vector unitar $\bar{u}_2$ (de comp. u_{2i}, $i = 1, 2, \ldots n$), perpendicular pe $\bar{u}_1$, astfel încât $Q(x, x)$ să ia valoarea maximă λ_2, pentru $x_s = u_{2s}$, sub condiția suplimentară

$$u_{1s} x_s = 0 . \tag{42}$$

Mai departe, va exista un vector $\bar{u}_3$ (comp. u_{3i}) perpendicular pe $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$, astfel încât $Q(x, x)$ să ia, pentru $x_s = u_{3s}$, valoarea maximă λ_3, sub condiția suplimentară

$$u_{2s} x_s = 0 \quad . \tag{43}$$

Procedând la fel, în continuare, vom găsi un sistem de n vectori, ortogonali, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n$, care formează un sistem de *axe principale*. Componentele u_{sk}, satisfăcând relațiilor de ortogonalitate (41), (42), (43), definesc o transformare ortogonală.

$$x_s = u_{sk} y_k \qquad (s, k = 1, 2, \ldots n), \tag{44}$$

de forma (39), care rezolvă problema propusă ; ceea ce se vede precum urmează.

Prin faptul că (44) este o transformare ortogonală, după § 207, rezultă invariantul

$$\sum_{s=1}^{n} x^2_s = \sum_{k=1}^{n} y^2_k \quad . \tag{45}$$

Prin transformarea (44) forma patratică (38) devine, deocamdată,

$$Q^*(y, y) = c_{sk} y_s y_k \ . \tag{46}$$

Observăm, însă că, din (44), rezultă

$$y_k = u_{ks} x_s \ ; \tag{47}$$

ceeace, pentru $\bar{x} = \bar{u}_s$, conduce, după condițiile de ortogonalitate, la soluția maximală $y_k = 1$, $y_{s \neq k} = 0$. In particular valoarea maximă λ_1 va fi luată de (46) pentru

$$y_1 = 1, \ y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0 .$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel în cât,

$$\lambda_1 + \epsilon\,(q^1_{12} + q^1_{22}\,\epsilon) > \lambda_1.$$

Pentru aceasta este suficient să alegem pe ϵ astfel în cât al doilea termen să fie esențial pozitiv. Dar, aceasta contrazice condiția de maxim preconizată.

Procedăm acum cu forma patratică $Q_1\,(y,\ y)$, din (47), în $y_2,\ y_3, \ldots y_n$, la fel, și obținem

$$Q_1\,(y,\ y) = \lambda_2\ y^2_2 + Q_2\,(y,\ y). \tag{48}$$

Din aproape în aproape ajungem, așadar, la forma canonică (40), sub condiția (44).

220. Numere caracteristice. Valori proprii. Ecuația seculară. Cătimile $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_n$, introduse în păragraful precedent, poartă numele de *numere caracteristice,* iar inversele lor $^1/\lambda_1 \ldots {}^1/\lambda_n$ sunt *valorile proprii* ale formei patratice.

Mărimile absolute ale numerilor caracteristice nu sunt altceva decât patratele lungimilor axelor principale ale cuadricei

$$Q\,(x,\ y) = 1. \tag{49}$$

Din acest motiv, transformarea la forma canonică mai poartă numele, curent în aplicațiile mecanice și geometriee, de „transformare la axele principale".

Dacă unul, cel puțin, din numerile caracteristice este nul, forma $Q\,(x,\ y)$ se numește *degenerată.* Acest fapt are loc numai când discriminantul formei (care este un invariant după § 214)

$$\|q_{ij}\| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

se anulează.

Dacă toate numerile caracteristice sunt pozitive, am numit forma patratică *pozitiv-definită;* dacă sunt toate negative, forma este *negativ-definită;* dacă unele sunt pozitive, iar altele negative, forma este *nedefinită.*

Teorema inerției precizează că, pentru orice transformare, numărul termenilor pozitivi, ca și numărul termenilor negativi, rămâne același.

Să considerăm forma patratică nedefinită

$$\lambda\ \Sigma\, y^2_i - \Sigma\, \lambda_i\ y^2_i\ , \tag{50}$$

care rezultă din forma

$$\lambda \Sigma y^2_i - Q(x, x), \tag{51}$$

printr'o transformare ortogonală (39), după cele ce preced.

Discriminantul formei (50) este, în virtutea proprietății de invarianță (§ 214), egal cu discriminantul formei (51); așadar,

$$\begin{Vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \lambda - \lambda_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda - q_{11} & -q_{12} & \dots & -q_{1n} \\ -q_{21} & \lambda - q_{22} & \dots & -q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q_{n1} & -q_{n2} & \dots & \lambda - q_{nn} \end{Vmatrix}$$

Rezultă că numerile caracteristice λ_i sunt rădăcinile ecuației algebrice

$$\begin{Vmatrix} q_{11} - \lambda & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ p_{21} & q_{22} - \lambda & \dots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} - \lambda \end{Vmatrix} = 0, \tag{52}$$

pentru necunoscuta λ. Această ecuație poartă numele de *ecuație seculară* (prin faptul că apare în problema de mecanică cerească a perturbațiilor seculare în mișcările planetelor).

După *teorema lui* SILVESTER, ecuația (52) posedă numai rădăcini reale când $q_{ij} = q_{ji}$ sunt câtimi reale.

221. Reducerea simultană a două forme patratice la forme canonice. Ne mărginim, cu HILBERT-COURANT, la cazul mai simplu când una din formele date este pozitiv-definită. Cazul general când nu se poate afirma despre una din forme, cel puțin, că este definită, se poate studia în unul din tratatele de algebră superioară (de ex. SALMON, *Algèbre supérieure).*

Așadar, fie două forme patratice

$$Q_1(x, x) = \overset{(1)}{q}_{ij} x_i x_j \; ; \; Q_2(x, x) = \overset{(2)}{q}_{ij} x_i x_j ;$$

și să admitem că forma Q_2 este pozitiv-definită.

Printr'o transformare liniară

$$x_i = l_{ij} y_j$$

formele date pot fi reduse la formele canonice

$$Q_1 = \lambda_i y^2_i \; ; \; Q_2 = \mu_i y^2_i ,$$

unde, după ipoteza admisă pentru Q_2, toți coeficienții μ_i pot fi egalați cu $+1$.

Numim câturile $\lambda_i / \mu_i = k_i$ *numere caracteristice*, iar inversele lor $1 / k_i$ *valorile proprii* ale formei Q_1 prin raport cu forma Q_2.

Aplicând metoda desvoltată precedent în cazul unei singure forme, expresiei $Q_1 : Q_2$, problema găsirii numerilor caracteristici se reduce la rezolvarea ecuației seculare în k:

$$\begin{Vmatrix} q_{11}^{(1)} - k\, q_{11}^{(2)} & q_{12}^{(1)} - k\, q_{12}^{(2)} & \cdots & q_{1n}^{(1)} - k\, q_{1n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1}^{(1)} - k\, q_{n1}^{(2)} & q_{n2}^{(1)} - k\, q_{n2}^{(2)} & \cdots & q_{nn}^{(1)} - k\, q_{nn}^{(2)} \end{Vmatrix} = 0$$

Observație. Formele biliniare și patratice cu un număr *infinit* de variabile au fost studiate de DAVID HILBERT și aplicate de acest autor pentru o nouă formulare și desvoltare a teoriei ecuațiilor integrale. Ele conduc la generalizarea noțiunii de spațiu cu un număr finit de dimensiuni la spațiile cu o infinitate numărabilă de dimensiuni *(spații Hilbertiene)*, folosite în unele chestiuni de Fizică modernă, care necesită formulări tensoriale.

222. Transformări generale. Fie un sistem de variabile x^s $(s = 1, 2, \ldots n)$ definit într'un domeniu dat. O transformare generală a variabilelor x^s într'un sistem de n noui variabile x^{*s} se exprimă prin funcții pe care le presupunem uniforme, continue și derivabile de câte ori este nevoe; determinantul funcțional $D(x^s) : D(x^{*s})$ fiind finit și diferit de zero. In aceste condiții, se poate defini, univoc, transformarea inversă. Admitem, în cele ce urmează că aceste transformări alcătuesc un grup.

223. Funcții de punct. Am definit o funcție de punct $f(P)$, când $P(x^1, x^2, \ldots x^n)$ aparține unei multiplicități conținute într'un domeniu dat, prin mulțimea valorilor pe care le ia $f(P)$ când P parcurge toate valorile posibile în domeniul considerat.

In cele ce urmează vom admite că unei transformări $T(x)$ aplicată variabilelor, îi corespunde o transformare $S(x)$ aplicată funcției $f(x)$, satisfăcând condițiilor următoare: 1. Dacă transformarea T se reduce la o transformare identică, și transformarea S să se reducă la una identică; 2. Dacă T este produsul a două transformări aparținând grupului, și S să fie produsul a două transformări corespunzătoare.

224. Transformări de axe curbilinii. O transformare liniară, cu coeficienți *constanți* exprimă trecerea de la un sistem de axe *rectilinii* la alt sistem de axe tot rectilinii. Adeseori suntem nevoiți să introducem axe de coordonate generale (curbilinii). Ne întrebăm, cum se prezintă o transformare a unor astfel de axe?

Este evident că, o transformare generală de axe se poate exprima prin relațiile

$$x^{*s} = f_s\ (x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^n) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{53}$$

unde funcțiile de punct f_s satisfac condițiilor enunțate în cele două paragrafe precedente; variabilele x^s fiind definite într'un domeniu dat, iar x^{*s} în domeniul corespunzător.

In general, transformările (53) nu vor mai fi liniare. Totuși, — și acesta este cazul care ne interesează în desvoltarea ce urmează, — într'o *regiune infinit mică* din vecinătatea punctului $P\ (x^1, \ldots x^n)$ transformările (53) iau forma liniară, coeficienții nemai fiind însă constanți sau independenți de variabilele x^s; ci, dinpotrivă, ei sunt tocmai funcții de aceste variabile. In adevăr, unei variații infinit mici dx^s a variabilelor x^s, după condițiile de la § 222 și § 223, îi va corespunde o variație infinit mică a funcției f_s, respectivă a variabilelor x^{*s}. Așadar,

$$dx^{*s} = \frac{\partial f_s}{\partial x^k}\, dx^k; \tag{54}$$

transformare, care poate fi scrisă

$$dx^{*s} = \beta^s{}_k\ dx^t; \tag{55}$$

așadar, o transformare liniară în dx^k, ai cărei coeficienți $\beta^s{}_k\ (x^1, x^2, \ldots x^n)$ sunt, însă, funcții de coordonatele x^k; funcții, pe care le presupunem că sunt finite, uniforme, continue și derivabile de câte ori este nevoe, în domeniul variabilelor. Admitem, apoi, că determinantul funcțional $D\ (x^s) : D\ (x^{*s})$ este finit și diferit de zero.

Trebue să reținem că transformarea (55) este valabilă numai într'o regiune infinit mică, în vecinătatea punctului (x^s) al multiplicității.

Din (55), prin transformarea inversă, deducem

$$dx^k = \alpha^k{}_s\ dx^{*s}, \qquad \left(\alpha^k{}_s = \frac{\partial x^k}{\partial x^{*s}}\right) \tag{56}$$

Din relațiile (55) și (56) rezultă, fără dificultate,

(57) $$\alpha^k{}_s \, \beta^s{}_r = \delta^k{}_r \; ; \; \beta^k{}_s \, \alpha^s{}_r = \delta^k{}_r$$

Fie

$$\alpha = \| \alpha^k{}_s \| \; ; \; \beta = \| \beta^s{}_k \|$$

determinanții coeficienților transformărilor (56) și (55).
Avem, evident, după regulile de multiplicare a determinanților,

$$\alpha = D\,(x^s) : D\,(x^{*s}) = 1 : \beta ;$$

rezultă cunoscuta regulă de transformare a elementului de volum:

$$dx^{*1}.\; dx^{*2} \ldots dx^{*n} = \frac{D\,(x^*)}{D\,(x)}\, dx^1 \ldots dx^n = \frac{1}{\alpha}\, dx^1 \ldots dx^n.$$

CAP. III.

Tensori în spațiile euclidiene.

A. Definiția generală a noțiunii de tensor.

225. Tensor de primul ordin (vector). In desvoltările expuse în prima parte a acestei lucrări (Calculul vectorial) am legat noțiunea de vector de noțiunea geometrică de translație, în spațiile euclidiene. In cele ce urmează, vom admite că ne găsim într'un spațiu euclidian cu n dimensiuni, definit în § 21. Pentru a putea extinde, mai târziu, noțiunile actuale și în spațiile riemanniene, vom introduce o nouă definiție, mai generală, a vectorului; anume, definiția algebrică: *vectorul este un tensor de ordinul întâi,* — urmând a lămuri mai jos sensul acestei definiții.

Fie n funcții de punct $a^s\ (x^1, x^2, \ldots x^n)$ unde $(s = 1, 2, \ldots n)$, care satisfac condițiilor § 223 și 222. Spunem că mulțimea acestor funcții constitue componentele *contravariante* ale unui tensor de ordinul întâi, dacă ele se transformă ca și diferențialele variabilelor: așadar, după formula (56, II),

$$(1) \qquad a^{*s} = \frac{\partial x^{*k}}{\partial x^k}\, a^k,$$

deci, după § 218, contragredient față de transformările variabilelor.

De asemeni, vom spune că mulțimea funcțiilor de punct $a_s\ (x^1, \ldots x^n)$ constitue componentele *covariante* ale unui tensor de ordinul întâi, dacă se transformă cogredient cu translormările variabilelor; așadar, după § 218 și relația (56, II),

$$(2) \qquad a^*{}_s = \frac{\partial x^s}{\partial x^{*k}}\, a_k.$$

Relaţiile (57, II) fiind evident satisfăcute pentru transformările (1) şi (2), rezultă că aceste transformări admit *invariantul scalar*

$$a^{*s}\, a^{*}_{s} = a^{k}\, a_{k}, \tag{3}$$

ceea ce, după § 218 era de aşteptat.

Cum transformările (1) şi (2) sunt definite numai în vecinătatea unui punct $P(x^1, \ldots x^n)$, funcţiile de punct $a^s(x)$ şi $a_s(x)$ pot constitui, după § 218, componentele contravariante, respectiv, covariante, ale unui *vector* localizat, şi anume, în punctul respectiv. Prin urmare, pentru a defini un tensor de ordinul întâi, deci un vector localizat, este *necesar să precizăm punctul de aplicare* şi să ţinem seamă de faptul că definiţia este valabilă numai în vecinătatea imediată a acestui punct.

Trebue reţinut următorul fapt esenţial (valabil, după cum vom vedea, şi pentru un tensor de ordin superior), drept consecinţă a observaţiei de mai sus: *un tensor nu poate să conţină decât coordonatele unui singur şi acelaş punct,* în regiunea infinit mică a spaţiului în care-l definim.

Sistemul de referinţă, respectiv, este, deasemeni, definit în acelaş punct.

Notaţii. Pentru uşurinţa şi rapiditatea scrisului, vom adopta, cu APPELL, următoarele prescurtări

$$\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{*k}} = x_{*}{}^{s}{}_{k}\,; \quad \frac{\partial x^{*s}}{\partial x^{k}} = x^{*}{}_{k}{}^{s}. \tag{4}$$

Cu aceste notaţii, relaţiile (1), (2) şi (57, II) se scriu

$$a^{*s} = x^{*}{}_{k}{}^{s}\, a^{k} \quad ; \quad a^{*}_{s} = x_{*}{}^{s}{}_{k}\, a_{k}\,; \tag{5}$$

$$x^{*}{}_{k}{}^{s}\, x^{k}{}_{r} = x^{s}{}_{k}\, x^{*}{}_{r}{}^{k} = \delta_{r}{}^{s}. \tag{6}$$

226. Inversarea formulelor precedente. Permutând variabile x^s şi x^{*s} între ele, obţinem

$$a^{s} = x_{*}{}^{s}{}_{k}\, a^{*k} \quad ; \quad a_{s} = x^{*}{}_{s}{}^{k}\, a^{*}_{k}\,. \tag{7}$$

Formulele precedente se pot deduce şi direct din (5), precum urmează. Să înmulţim, de ex. prima relaţie (5) cu $x_{*}{}^{r}{}_{s}$; rezultă

$$x_{*}{}^{r}{}_{s}\, a^{*s} = x_{*}{}^{r}{}_{s}\, x^{*}{}_{k}{}^{s}\, a^{k}\,;$$

dar, indicele mut s apărând de două ori în fieeare monom din membrul al doilea, sumăm pe el; după (6), avem prin urmare,

$$x^r{}_{*s}\, a^{*s} = \delta^r{}_k\, a^k ;$$

sau

$$a^k = x_*{}^k{}_s\, a^{*s} .$$

227. Invariant scalar. Justificarea identificării tensorului de primul ordin, definit mai sus, cu un vector este evidentă. In adevăr, fie a^s componentele contravariante ale unui vector relative la sistemul de coordonate $(x_1, \ldots x_s)$. Să considerăm forma liniară în variabilele x_s:

$$L = a^s\, x_s . \tag{8}$$

In § 218 am stabilit teorema: dacă supunem o formă liniară în variabilele x_s unei substituţii liniare, coeficienţii formei se transformă contragredient prin raport cu variabilele. Rezultă, aşadar, că a^s (componente vectoriale) sunt componentele contravariante ale unui tensor de primul ordin.

Este clar, pe de altă parte că expresia (8) poate fi considerată şi drept o formă liniară în a^s, cu coeficienţi x_s (componentele covariante ale vectorului $\bar{x}$). Prin urmare, expresia (8) formulează *produsul scalar* (numit şi *produs interior*)

$$\bar{a} \,.\, \bar{x} = a^s\, x_s ,$$

şi este un *invariant scalar* L faţă de transformările liniare. Invariantul scalar (ca orice scalar) apare ca un tensor de ordinul zero. Prin urmare, în teoria tensorilor, un scalar poate fi definit drept un tensor de ordinul zero. Această proprietate serveşte în teorie la recunoaşterea caracterului de *contra* - sau *co*-varianţă a componentelor unui tensor (deocamdată de ordinul întâi) şi ne permite să formulăm regula foarte importantă: *produsul scalar a câte două componente de varianţă deosebită trebue să formeze un invariant scalar.*

228. Tensori de ordin oarecare. Proprietatea enunţată mai sus pentru tensorul de ordinul întâi se generalizează şi serveşte pentru formarea unui tensor de ordin oarecare. In adevăr, fie, de ex. forma triliniară

$$t_k{}^s{}_r\, a^k\, b^r\, c_s , \tag{9}$$

unde a^k sunt componentele contravariante ale vecrorului $\bar{a}$; b^r sunt componentele contravariante ale vectorului $\bar{b}$ şi c_s sunt com-

ponentele covariante ale vectorului $\bar{c}$. Dacă expresia (9) este un invariant (un scalar) coeficienţii $t_k{}^s{}_r$ vor putea fi definiţi drept *componentele mixte* (odată contravariante, prin raport cu indicele s; şi de două ori covariante, prin raport cu indicii k şi r) ale unui tensor de ordinul al *treilea* T.

După formulele de transformare (7) avem

$$(10) \qquad a^k = x_*{}^k{}_s \, a^{*s} \quad ; \quad b^r = x_*{}^r{}_m \, b^{*m} \quad ; \quad c_s = x^*{}_s{}^n \, c^*{}_n .$$

Expresia (9) fiind invariantă faţă de transformările (10), însemnând cu $t^{*s}{}_{kr}$ componentele transformate ale tensorului T, trebue să avem:

$$(11) \qquad t_k{}^s{}_p \, a^k \, b^p \, c_s = t^{*\alpha}{}_{\beta\gamma} \, a^{*\beta} \, b^{*\gamma} \, c^*{}_\alpha .$$

Inlocuind expresiile (10) în (11), obţinem

$$t^k{}_s{}^p \, (x_*{}^k{}_\beta \, x_*{}^p{}_\gamma \, x^*{}_s{}^\alpha) \, a^{*\beta} \, b^{*\gamma} \, c^*{}_\alpha = t^{*\alpha}{}_{\beta\gamma} \, a^{*\beta} \, b^{*\gamma} \, c^*{}_\alpha ;$$

de unde rezultă legea de transformare a componentelor tensorului de ordinul al treilea:

$$(12) \qquad t^*{}_\beta{}^\alpha{}_\gamma = (x_*{}^k{}_\beta \, x_*{}^p{}_\gamma \, x^*{}_s{}^\alpha) . \, t_k{}^s{}_p ;$$

şi invers,

$$(13) \qquad t^k{}_s{}^p = (x^*{}_k{}^\beta \, x^*{}_p{}^\gamma \, x_*{}^s{}_\alpha) . \, t^*{}_\beta{}^\alpha{}_\gamma .$$

Generalizând, putem recunoaşte componentele mixte (de ex. de n ori contra - şi de m ori co-variante) ale unui tensor, prin condiţia

$$(14) \qquad \text{Inv. scalar} = t \begin{matrix} s_1, s_2, \ldots s_n \\ k_1, k_2, \ldots k_n \end{matrix} a^{(1)}_{s_1} \, a^{(2)}_{s_2} \ldots a^{(n)}_{s_n} \, b^{k_1}_{(1)} \ldots b^{k_n}_{(n)} ,$$

unde $a^{(i)}_s$ sunt componentele covariante ale vectorilor $\bar{a}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots n$); iar $b^{k}{}_{(j)}$ sunt componentele contravariante ale vectorilor $\bar{b}_{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots m$). Bineînţeles că, în expresia (14) avem de sumat pe toţi indicii s şi k.

In cazul unui invariant de forma

$$(15) \qquad t_k{}^s{}_r \, . \, \theta^k{}_s{}^r ,$$

deducem caracterul de covarianţă, observând că tensorii T şi θ pot fi scrişi sub formele $a^k \, b^r \, c_s$, resp. $\alpha_k \, \beta_r \, \gamma^s$, prin analogie cu expresia (9), exprimând produse de componente vectoriale.

Regulile de transformare a unui tensor oarecare se scriu imediat, după relaţiile (12) şi (13); obţinem

$$t^{*s_1, s_2, \ldots s_n}_{k_1, k_2, \ldots k_m} = \left(x^{s_1}_{*\alpha_1} \ldots x^{s_n}_{*\alpha_n} \cdot x^{*\beta_1}_{k_1} \ldots x^{*\beta_m}_{k_m} \right) t^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m} ;$$

(16)

$$t^{s_1, s_2, \ldots s_n}_{k_1, k_2, \ldots k_m} = \left(x^{*s_1}_{\alpha_1} \ldots x^{*s_n}_{\alpha_n} \cdot x^{\beta_1}_{*k_1} \ldots x^{\beta_m}_{*k_m} \right) t^{*\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_m} .$$

Numărul componentelor unui tensor de ordinul n, în spaţiul cu N dimensiuni, va fi, după cum se vede uşor, N^n. Astfel, tensorul de ordinul zero (scalarul) are $N^0 = 1$ componente; tensorul de ordinul întâi (vectorul) are $N^1 = N$ componente; etc.

229. Tensori simetrici şi antisimetrici. Simetria şi antisimetria tensorilor este caracterizată prin relaţii de simetrie sau antisimetrie între componentele lor; de exemplu:

(17) $$t_{rs} = t_{sr} \text{ (simetrie)} \quad ; \quad t_{rs} + t_{sr} = 0 \text{ (antisimetrie).}$$

Este esenţial de observat că această proprietate rămâne invariantă pentru transformările admise; ceea ce rezultă imediat din relaţiile de transformare (74). Simetria şi antisimetria micşorează numărul de componente independente.

B. Algebră tensorială.

230. Operaţii algebrice. Operaţiile la care sunt supuse componentele tensoriale sunt: înmulţirea cu un scalar; adunarea; multiplicarea, şi o nouă operaţie caracteristică denumită *contracţie* (în textele germane, numită de EINSTEIN: *Verjungung*).

1. *Inmulţirea cu un scalar.* Este evident că dacă înmulţim componentele unui tensor cu un scalar, tensorul se înmulţeşte cu acel scalar. De exemplu: din a_{ks} obţinem prin înmulţire cu scalarul α tensorul $t_{ks} = \alpha\, a_{ks}$;

2. *Adunarea.* Fiind daţi mai mulţi tensori de *acelaş tip şi ordin*, adunarea lor constă în rezultatul obţinut prin adunarea componentelor lor. Această operaţie este evident comutativă şi asociativă.

$$t^s{}_m{}^k = a^s{}_m{}^k + b^s{}_m{}^k .$$

3. *Multiplicarea.* Fiind daţi doi tensori de tipuri şi ordine oarecari, dacă multiplicăm în toate modurile posibile componentele lor între ele, se obţine un tensor „rezultant", de ordin egal cu suma ordinilor termenilor componenţi.

Operaţia este asociativă şi distributivă.

Operația multiplicării tensoriale este similară operației multiplicării matricelor. Exemplu:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_{11} \dots b_{1m} \\ b_{21} \dots \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{m1} \dots b_{mm} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11}\ c_{12} \dots c_{1N} \\ c_{21}\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{N1}\ \cdot \quad \cdot \quad c_{NN} \end{Vmatrix},$$

unde

$$c_{sk} = a_{sr}\, b_{rk}\ .$$

4. *Contracția* este operația cea mai interesantă în algebra tensorială. Ea permite trecerea de la un tensor de un ordin dat, la un tensor de ordin mai mic; putând duce la formarea unui scalar. Să ilustrăm operația de contracție prin exemplul următor. Fie tensorul de ordinul al doilea $a^k{}_s$. El se transformă după legea cunoscută

$$a^*{}_s{}^k = x_*{}^r{}_s\, x^*{}_p{}^k\, a^p{}_r\ .$$

Să facem $k = s$ și să sumăm pe acest indice curent. Obținem

$$a^*{}_s{}^s = x_*{}^r{}_s\, x^*{}_p{}^s\, a^p{}_r = \delta^p{}_r\ .\ a^p{}_r = a^r{}_r\ ;$$

prin urmare, aplicând odată operația de contracție asupra unui tensor de ordinul al doilea, obținem un scalar; în cazul de față, se obține *urma* $a^r{}_r$.

Acest exemplu ne permite să definim operația de contracție: egalarea a doi indici de *variante deosebite*, și sumare pe indicele mut rezultat.

Astfel, de exemplu, din tensorul mixt de ordinul al treilea, de componente mixte $a_k{}^s{}_r$, care se transformă după legea

$$a^*{}_k{}^s{}_r = x_*{}^\alpha{}_k\, x_*{}^\beta{}_r\, x^*{}_\gamma{}^s\, a_\alpha{}^\gamma{}_\beta\ ,$$

contractând prin raport cu indicii $s = k$, se obține tensorul de ordinul întâi, de componente covariante

$$a^*{}_s{}^s{}_r = a^*{}_r = x_*{}^\alpha{}_s\, x_*{}^\beta{}_r\, x^*{}_\gamma{}^s\, a_\alpha{}^\gamma{}_\beta$$

$$= x_*{}^\beta{}_r\, \delta^\alpha{}_\gamma\, a_\alpha{}^\gamma{}_\beta = x_*{}^\beta{}_r\, a_\beta\ .$$

Este esențial de reținut că operația de contracție se exercită asupra a doi indici de variante diferite. De aceia va fi nevoe, în calcule, când avem de a face cu componente de aceiaș varianță, să se „ridice", sau să se „coboare", mai întâi, unul din indici,

Scanned with OKEN Scanner

spre a putea, apoi, aplica operaţia de contracţie. Această operaţie preliminară va fi definită mai târziu, după introducerea tensorului metric fundamental.

231. Aplicaţie: forţă, viteză, impuls. (*Mecanica*, Cap. III şi IV). In Mecanică se defineşte lucrul elementar al forţelor $\overline{F}$, pentru o deplasare $\delta\overline{r}$, într'un E_n, prin

$$\delta L = \overline{F} \cdot \delta\overline{r},$$

drept un scalar, pentru orice transformare de coordonate. Cum $\delta\overline{r}$ este un vector contravariant, conform criteriului stabilit mai sus, rezultă că $\overline{F}$ este un vector covariant. Vectorul viteză este, evident, contravariant: $\dot{\overline{r}}$. Insă impulsul $\overline{p}$, definit prin ecuaţia fundamentală a Mecanicii newtoniene $m\dot{\overline{p}} = \overline{F}$ este tot un vector covariant, ca şi forţa. Este clar că în spaţiul euclidian tridimensional aceste distincţii nu au loc.

232. Tensori antisimetrici formaţi cu ajutorul produselor de vectori. Produsul vectorial dafinit într'un E_3, este, prin proprietatea sa de anticomutativitate, un exemplu tipic de tensor antisimetric.

Fie, într'un spaţiu euclidian cu N dimensiuni, $n\ (< N)$ vectori $\bar{a}, \bar{b}, \ldots \bar{u}$, de aceiaş varianţă (pentru a fixa ideile, să-i luăm contravarianţi). Tabloul elementelor lor se va scrie

$$\left\| \begin{matrix} a^1 & a^2 & \ldots & a^N \\ b^1 & b^2 & \ldots & b^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^1 & \cdot & \ldots & u^N \end{matrix} \right\|.$$

Să considerăm un grup de n cifre în ordinea $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ dintre cifrele $1, 2, 3, \ldots n$ (cu, sau fără repetiţie) şi să formăm determinantul în care ordonăm elementele în sucesiunea $\alpha, \beta, \ldots$:

$$t^{\alpha\beta\ldots} = \left\| \begin{matrix} a^\alpha & a^\beta & a^\gamma & \ldots \\ b^\alpha & b^\beta & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ u^\alpha & \cdot & \cdot & \ldots \end{matrix} \right\|.$$

Mulţimea acestor determinanţi constitue componentele contravariante ale unui tensor cu n indici superiori, antisimetric (ceea

ce rezultă din cunoscuta proprietate a determinanților, cari schimbă semnul prin permutarea a două linii sau coloane). Așa dar,

$$t^{\alpha\beta\gamma} \ldots = - t^{\beta\alpha\gamma} \ldots$$

Un astfel de tensor se mai numește *produsul exterior* al vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \ldots \bar{u}$, și se scrie

$$t^{\alpha\beta\gamma} \ldots \zeta = [a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots u^{\zeta}]. \tag{18}$$

233. Pseudoscalari. Tensorii antisimetrici posedă, evident, un număr mai mic de componente independente, decât tensorii fără proprietăți de simetrie. De aceia, este posibil și comod să se exprime astfel de tensori prin mărimi mai simple, cu un număr mai mic de indici, care însă nu vor mai păstra întocmai caracterul strict tensorial.

Să lămurim această idee prin exemple în spațiul euclidian cu trei dimensiuni.

1. Fie tensorul de trei ori contravariant, antisimetric, de tip produs exterior:

$$t^{krs} = [a^{k}\, b^{r}\, c^{s}],$$

și să considerăm componenta

$$\tau = t^{k.r.s} \tag{19}$$

unde k, r, s exprimă o succesiune anumită a numerilor 1, 2, 3. După regula de transformare a componentelor tensoriale, avem

$$\tau = t^{krs} = (\pm\, x_{*}{}^{k}{}_{\alpha}\, x_{*}{}^{\beta}{}_{r}\, x_{*}{}^{s}{}_{\gamma})\, t^{*\alpha\beta\gamma},$$

unde semnul $\pm$ corespunde unei permutări α, β, γ pară sau impară. Ori, paranteza din membrul al doilea exprimă exact determinantul Δ al coeficienților transformării considerate. Așa dar, putem scrie

$$\tau = \Delta^{*}{}_{\tau} \cdot \tau^{*} \tag{20}$$

Am definit, în modul acesta, o mărime τ, care nu posedă decât *o singură componentă*, dar care nu este un scalar, căci se transformă în τ^{*}, când efectuăm o transformare de variabile. O astfel de mărime este numită *pseudo-scalar*. In virtutea unor proprietăți, pe care le vom stabili, numim acești pseudoscalari, *capacități scalare*.

2. Fie un tensor antisimetric (de tip produs exterior) covariant în trei indici

$$\Gamma = t_{krs} \cdot \tag{21}$$

Ca şi mai sus, mărimea Γ poate fi definită ca un pseudoscalar, care însă va fi diferit de τ. In adevăr, formula de transformare, în acest caz, este după regula cunoscută,

$$\Gamma = t_{krs} = (\pm\, x^*{}_k{}^{\alpha}\; x^*{}_r{}^{\beta}\; x^*{}_s{}^{\gamma})\; t^*{}_{\alpha\beta\gamma} \cdot$$

Aşadar,

$$\Gamma = \Delta'\, \Gamma^*, \tag{22}$$

unde Δ' este determinantul transformării inverse. Dar, cum $\Delta\, \Delta' = +1$, rezultă pentru Γ transformarea

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta}\, \Gamma^*. \tag{23}$$

Vom numi, pe baza proprietăţilor evidenţiate mai jos, aceşti pseudoscalari, *densităţi scalare.*

Este evidentă proprietatea: produsul unei densităţi scalare printr'o capacitate scalară este un scalar propriu-zis; în adevăr, după (20) şi (23),

$$\tau\, \Gamma = \tau^*\, \Gamma^* = \rho \cdot$$

234. Densităţi şi capacităţi tensoriale. Metoda din paragraful precedent se aplică şi într'un spaţiu euclidian cu N dimensiuni. Prin generalizare, numim capacitate scalară, mărimea

$$\tau = t^{1,\,2,\,\ldots\,s}, \tag{24}$$

unde membrul al doilea este o componentă tensorială de s ori contravariantă a unui tensor antisimetric, alegând o anumită succesiune a indicilor superiori.

De asemeni, numim densitate scalară, mărimea

$$\Gamma = t_{1,\,2,\,\ldots\,s}, \tag{25}$$

unde membrul al doilea este o componentă de s ori covariantă a unui tensor antisimetric, alegând o anumită succesiune a indicilor inferiori.

Mărimile τ şi Γ astfel introduse, se transformă după formulele (12) şi (13); care conduc la aceleaşi legi exprimate prin relaţiile (20) şi (23).

Multiplicând o capacitate scalară τ printr'un tensor oarecare $u^p{}_r{}^k$, obţinem o *capacitate tensorială:*

(26) $$\omega^{p}{}_{r}{}^{k} = \tau\, u^{p}{}_{r}{}^{k}.$$

Legea de transformare rezultă din formulele (12) și (13):

(27) $$\omega^{p}{}_{r}{}^{k} = \Delta\,(x^{*}{}_{m}{}^{p}\, x^{*}{}_{n}{}^{k}\, x_{*}{}^{l}{}_{r})\,\omega^{*}{}_{l}{}^{mn};$$

$$\omega^{*}{}_{l}{}^{mn} = \frac{1}{\Delta}\,(x_{*}{}^{m}{}_{p}\, x_{*}{}^{n}{}_{k}\, x^{*}{}_{l}{}^{r})\,\omega^{l}{}_{r}{}^{k}.$$

In mod analog se definește o *densitate tensorială*, prin multiplicarea unei densități scalare cu un tensor oarecare, de exemplu,

(28) $$\Omega^{p}{}_{r}{}^{k} = \Gamma\, u^{p}{}_{r}{}^{k};$$

regulele de transformare fiind deduse din (12) și (13):

(29) $$\Omega^{p}{}_{l}{}^{k} = \frac{1}{\Delta}\,(x_{*}{}^{p}{}_{m}\, x_{*}{}^{k}{}_{n}\, x^{*}{}_{l}{}^{r})\,\Omega^{*}{}_{r}{}^{mn};$$

$$\Omega^{*}{}_{r}{}^{mn} = \Delta\,(x^{*}{}_{p}{}^{m}\, x^{*}{}_{k}{}^{n}\, x_{*}{}^{l}{}_{r})\,\Omega^{p}{}_{l}{}^{k}.$$

Produsul unei densități sau capacități (scalare sau tensoriale) printr'o capacitate sau densitate tensorială este un tensor propriu-zis. In adevăr, spre exemplu:

(30) $$\Gamma\,\omega^{p}{}_{r}{}^{k} = (\Gamma\,.\,\tau)\,u^{p}{}_{r}{}^{k} = \sigma\,u^{p}{}_{r}{}^{k};$$

$$\tau\,\Omega^{p}{}_{r}{}^{k} = (\tau\,.\,\Gamma)\,u^{p}{}_{r}{}^{k} = \sigma\,u^{p}{}_{r}{}^{k};$$

$$\Omega^{p}{}_{r}{}^{k}\,.\,\omega^{m}{}_{s}{}^{n} = (\Gamma\,.\,\tau)\,u^{p}{}_{r}{}^{k}\,.\,v^{m}{}_{s}{}^{n} = \sigma\,t^{p}{}_{r}{}^{k}{}_{s}{}^{mn}.$$

235. Elementul de volum într'un E_N este un exemplu tipic de capacitate scalară. Fie N vectori infinitesimali δx^s, $\delta' x^s$, $\ldots\ \delta^{N-1} x^s$. Să formăm produsul lor exterior, după legea enunțată în § 233. Vom avea

(31) $$[\delta x^s\,.\,\delta' x^s \ldots \delta^{N-1} x^s] = \begin{Vmatrix} \delta x^1 & \delta x^2 & \ldots & \delta x^N \\ \delta' x^1 & \ldots & \ldots & \delta' x^N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{N-1} x^1 & \ldots & \ldots & \delta^{N-1} x^N \end{Vmatrix} = \delta\tau,$$

câtime de natura unei capacități scalare, care exprimă elementul de volum infinitesimal al paralelipipedului construit cu δx^s, $\delta' x^s$, $\ldots\ \delta^{N-1} x^s$ ca muchi.

In particular, elementul de volum diferențial, va fi dat de

(32) $$[dx^1\,.\,dx^2 \ldots dx^N] = \begin{Vmatrix} dx^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & dx^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & dx^N \end{Vmatrix} = dx^1\,.\,dx^2 \ldots dx^N = d\tau.$$

Aşa dar, pentru o transformare de variabile,

$$(33) \qquad dx^1 \, . \, dx^2 \ldots dx^N = \frac{D\,(x^1, \ldots\ x^N)}{D\,(x^{*1}, \ldots x^{*N})} \, . \, dx^{*1} \, . \, dx^{*2} \ldots dx^{*N} \, ,$$

căci

$$\Delta = D\,(x^1, \ldots x^N) \ : \ D\,(x^{*1}, \ldots x^{*N}) \, ,$$

după cum se poate verifica uşor.

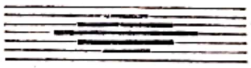
Pentru a exemplifica aceste noţiuni, să ne închipuim că elementul de volum (capacitate goală) se umple cu substanţă de densitate Γ. Cantitatea totală de substanţă (scalar propriu zis), va fi

$$M = \int \Gamma \, d\tau \, ,$$

deci,

$$\text{scalar pur} = \text{densitate} \times \text{capacitate.}$$

Această proprietate justifică denumirile adoptate de „capacitate“ şi „densitate“ pentru pseudoscalarii respectivi.



CAP. IV.

Tensorul metric fundamental

236. Forma patratică fundamentală. După cum am văzut în § 6 şi § 78, metrica unui spaţiu euclidian E_N cu N dimensiuni este determinată prin lungimea elementului infinitesimal de arc, lungime dată de forma patratică în diferenţialele coordonatelor:

$$ds^2 = g_{rk}\, dx^r\, dx^k , \tag{1}$$

unde, în general, $g_{rk}\ (x^1, \ldots x^n)$ sunt funcţii de variabile, continue şi derivabile; fără a restrânge generalitatea, le putem presupune simetrice:

$$g_{rk} = g_{kr} .$$

Admitem în cele ce urmează că determinantul

$$g = \| g_{rk} \| \neq 0.$$

Numim expresia (1) *forma patratică fundamentală.*

Un spaţiu euclidian este definit, precum se ştie, prin proprietatea: printr'o transformare convenabilă de variabile, forma patratică fundamentală poate fi transformată într'o formă patratică cu coeficienţi constanţi (după § 210).

Spaţii pur euclidiene şi pseudoeuclidiene. Dacă am adus forma (1) la o formă patratică cu coeficienţi constanţi, singurele transformări de axe pe care le putem lua în considerare, sunt substituţiile liniare cu coeficienţi constanţi:

$$x^i = \alpha^i{}_k\, x'^k + \beta^i , \tag{2}$$

de modul diferit de zero. Prin transformarea (2) putem aduce forma (1) la forma canonică (§ 219)

$$\sum \epsilon_r \, (dx^r)^2 .$$

a) Dacă toți ϵ_r au același semn, forma fiind definită (pozitiv sau negativ), spunem că spațiul este euclidian;

b) Dacă ϵ_r sunt de semne diferite, forma fiind nedefinită, ne găsim într'un spațiu pseudoeuclidian. Un exemplu de spațiu pseudoeuclidian quadridimensional ni-l oferă relativitatea restrânsă, unde elementul linar se exprimă prin

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (c\,dt)^2 ,$$

unde c este viteza constantă de propagare a luminii în vid. Cum, în general, dacă ne raportăm la un sistem de coordonate generale (curbilinii) într'un E_N, elementul de arc este dat de forma (1), este necesar să analizăm proprietățile acestei forme.

Prin definiție, *forma patratică fundamentală* (1) *este dată într'un sistem de coordonate determinat și rămâne invariantă pentru orice transformare de coordonate.*

237. Tensorul fundamental de ordinul al doilea. Coeficienții simetrici

$$g_{rk} = g_{kr}$$

ai formei fundamentale (1), cu determinantul

$$g = \| g_{rk} \| \neq 0 ,$$

alcătuesc cele $\frac{1}{2} N (N+1)$ componente distincte covariante ale unui tensor de ordinul al doilea simetric. Acest fapt se deduce pe baza criteriilor stabilite la § 228; dx^s , dx^k fiind componente vectoriale contravariante, iar ds un scalar, rezultă afirmația de mai sus.

Fie A^r componentele contravariante ale unui vector $\overline{A}$. Prin regula cunoscută, vom putea alcătui componente covariante a_k ale unui vector $\bar{a}$, prin operația multiplicării contractate:

$$a_k = g_{kr} A^r . \tag{3}$$

Cum determinantul g este diferit de zero, rezolvarea sistemului precedent de ecuații algebrice, ne dă

$$A^k = g^{kr} a_r , \tag{4}$$

unde (§ 208)

(5) $g^{kr} = (-1)^{k+r} \frac{1}{g} \times$ minorul relativ la $g_{kr} = \frac{\partial \log \|g\|}{\partial g_{kr}}$.

Putem, de asemeni, obține un tensor mixt:

(6) $$g^r{}_k = g^{rl} g_{kl}.$$

După regula de înmulțire a determinanților, din relațiile (5) și (6), urmează că tensorul mixt (6) este un tensor unitar; adică,

(7) $$g^r{}_k = \delta^r{}_k = \begin{cases} +1 \text{ pentru } r = k; \\ 0 \quad \text{pentru } r \neq k. \end{cases}$$

Tensorul cu componentele g_{rk}, g^{rk}, $g^r{}_k$ se numește *tensorul fundamental* de ordinul al doilea.

238. Operația de „ridicare" sau „coborîre" a unui indice. Tensori asociați.

Prin operația (3) aplicată componentelor contravariante a^r, ale vectorului $\bar{a}$, obținem componentele covariante a_k, ale aceluiaș vector și invers, prin operația (4).

Operația (3) constă în: multiplicare prin g_{kr} și contractare prin raport cu indicele curent r; am efectuat *coborîrea* indicelui (din a^r cu indicele sus, am obținut a_k, cu indicele jos).

Operația (4) constă în: înmulțire cu g^{kr} și contractare prin raport cu indicele curent r; am efectuat *ridicarea* indicelui (din a_r, cu indicele jos, am obținut a^k cu indicele sus).

Acest joc al indicilor, cu ajutorul tensorului fundamental, este o operație foarte frecventă în calculul tensorial.

(8)
$$a^k{}_r = g_{rl} A^{kl} \ldots\ldots \text{(am coborât indicele k)};$$
$$a_{kr}{}^m = g^{mp} a_{krp} \ldots\ldots \text{(am ridicat indicele p)};$$
$$a^{kr} = g_{mp} a^{krp} \ldots\ldots \text{(am coborât indicele p)};$$
$$a_{kr} = g_{kp} g_{rm} a^{pm} \ldots\ldots \text{(am coborât doi indici: p și m); etc.}$$

Observăm că, dacă ridicăm odată un indice și apoi îl coborîm, obținem tensorul primitiv.

De exemplu:

$$a_{kr} = g_{mr} a^m{}_k = g_{mr} g^{mp} a_{kp} = g^p{}_r a_{kp} = \delta^p{}_r a_{kp} = a_{kr}.$$

Numim *tensori asociați*, tensorii obținuți unii din ceilalți prin operațiile de ridicare și coborîre a indicilor. Așa sunt, de

ex. vectorii $\bar{a}$ şi $\overline{A}$, asociaţi prin relaţiile (3) şi (4); precum şi tensorii asociaţi prin relaţiile (8).

239. Linii geodezice. Să presupunem că variabilele x^k depind de un parametru variabil t, care poate lua valori într'un interval (t^0, t^1).

Punctul P (x^k), extremitatea vectorului cu originea în originea sistemului de coordonate, va descrie un arc de curbă; admitem că reprezentarea parametrică a acestei curbe este *proprie*: unei valori a lui t, între t_0 şi t_1, să-i corespundă un singur punct al curbei. Elementul de arc al unei astfel de curbe, este dat de

$$(9) \qquad ds = \sqrt{g_{rk} \frac{dx^r}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt ,$$

astfel în cât arcul cuprins între punctele corespunzătoare valorilor t_0 şi t va fi

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{rk} \frac{dx^r}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt .$$

O *geodezică* se defineşte prin proprietatea: „dintre toate curbele din E_N, care unesc punctele P_0 şi P_1, există una de lungime maximă sau minimă, prin raport cu celelalte vecine".

In teoria *Calculului Variaţional* se determină o astfel de curbă, numită *curba extremală*, prin condiţia (v. *Mecanica*, § 357)

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} f\,(s;\, x^k, x'^k)\, ds = 0 ,$$

unde f este o funcţie continuă, cu derivate finite şi continue de argumente; s este o variabilă independentă, iar x^k sunt funcţii continue cu derivate finite x'^k de s. In cursul nostru de Mecanică (§ 358) am arătat că o extremală este o curbă integrală a ecuaţiilor lui EULER.

$$(10) \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x'^k}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0 .$$

Să aplicăm acest principiu la determinarea geodezicelor, drept curbe extremale pentru problema variaţională

ex. vectorii $\bar{a}$ şi $\overline{A}$, asociaţi prin relaţiile (3) şi (4); precum şi tensorii asociaţi prin relaţiile (8).

239. Linii geodezice. Să presupunem că variabilele x^k depind de un parametru variabil t, care poate lua valori într'un interval (t^0, t^1).

Punctul P (x^k), extremitatea vectorului cu origina în originea sistemului de coordonate, va descrie un arc de curbă; admitem că reprezentarea parametrică a acestei curbe este *proprie:* unei valori a lui t, între t_0 şi t_1, să-i corespundă un singur punct al curbei. Elementul de arc al unei astfel de curbe, este dat de

$$(9) \qquad ds = \sqrt{g_{rk} \frac{dx^r}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt,$$

astfel în cât arcul cuprins între punctele corespunzătoare valorilor t_0 şi t va fi

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{rk} \frac{dx^r}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt.$$

O *geodezică* se defineşte prin proprietatea: „dintre toate curbele din E_N, care unesc punctele P_0 şi P_1, există una de lungime maximă sau minimă, prin raport cu celelalte vecine".

In teoria *Calculului Variaţional* se determină o astfel de curbă, numită *curba extremală*, prin condiţia (v. *Mecanica*, § 357)

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} f(s; x^k, x'^k)\, ds = 0,$$

unde f este o funcţie continuă, cu derivate finite şi continue de argumente; s este o variabilă independentă, iar x^k sunt funcţii continue cu derivate finite x'^k de s. In cursul nostru de Mecanică (§ 358) am arătat că o extremală este o curbă integrală a ecuaţiilor lui EULER.

$$(10) \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x'^k}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0.$$

Să aplicăm acest principiu la determinarea geodezicelor, drept curbe extremale pentru problema variaţională

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} ds = 0 ;$$

ceiace se mai poate scrie,

$$\delta \int (g_{rk}\, x'^{r}\, x'^{k})\, ds = 0 ,$$

unde accentele exprimă derivatele prin raport cu variabila independentă *s*. Aşadar, vom lua drept funcţie

$$f = g_{rk}\, x'^{n}\, x'^{k} . \tag{11}$$

Să înlocuim expresia (11) în ecuaţiile (10) şi să efectuăm calculele. Avem, succesiv,

$$\frac{d}{ds}(2\, g_{kr}\, x'^{r}) - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^{k}}\, x'^{m}\, x'^{n} = 0 ;$$

sau,

$$g_{kr}\, x''^{r} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^{p}}\, x'^{p}\, x'^{r} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^{k}}\, x'^{m}\, x'^{n} = 0 . \tag{12}$$

Observăm apoi, că, prin schimbări convenabile de indici curenţi, putem scrie

$$\frac{\partial g_{kr}}{\partial x^{p}}\, x'^{p}\, x'^{r} = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^{n}}\, x'^{n}\, x'^{m} = \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^{m}}\, x'^{m}\, x'^{n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^{n}} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^{m}}\right) x'^{m}\, x'^{n} .$$

Aşadar, putem scrie, pentru (12),

$$g_{kr}\, x''^{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^{n}} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^{k}}\right) x'^{m}\, x'^{n} = 0 . \tag{13}$$

Dar, factorul termenului al doilea nu este altceva decât simbolul lui CHRISTOFFEL de prima speţă:

$$\left[\begin{matrix} m & n \\ k \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^{n}} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^{k}}\right) ; \tag{14}$$

din care, prin operaţia

$$\left\{\begin{matrix} m & n \\ l \end{matrix}\right\} = g^{kl}\left[\begin{matrix} m & n \\ k \end{matrix}\right] , \tag{15}$$

deducem *simbolii lui* CHRISTOFFEL de speţa a doua.

Cu aceste notaţii, ecuaţia (13) se scrie explicit :

$$(16) \qquad g_{kr}\frac{d^2x^r}{ds^2}+\begin{bmatrix} m & n \\ k & \end{bmatrix}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}=0.$$

sau, rezolvind cu privire la derivatele de ordinul al doilea (se înmulţeşte în acest scop cu g^{kl}) :

$$(17) \qquad \frac{d^2x^l}{ds^2}+\begin{Bmatrix} m & n \\ l & \end{Bmatrix}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}=0.$$

Curba integrală a sistemului de N ecuaţii diferenţiale (17), sau a echivalentelor (16) este, prin urmare, o curbă geodezică, în E_N.

Trebuie observat că în realitate avem numai $N-1$ ecuaţii independente (17), din cauza relaţiei evidente

$$g_{rk}\,x'^r\,x'^k=1$$

240. Proprietăţile simbolilor lui CHRISTOFFEL.

1. Se poate verifica imediat, din definiţiile (14) şi (15), că

$$\begin{bmatrix} m & n \\ k & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & m \\ k & \end{bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} m & n \\ k & \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} n & m \\ k & \end{Bmatrix};$$

simbolii sunt simetrici în indicii primei linii.

Apoi, se verifică uşor că :

$$\begin{bmatrix} m & n \\ k & \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & n \\ m & \end{bmatrix}=\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n};$$

$$\begin{bmatrix} m & n \\ k & \end{bmatrix}=g_{lk}\begin{Bmatrix} m & n \\ l & \end{Bmatrix}.$$

2. *Formulele lui* CHRISTOFFEL. Definiţia liniilor geodezice este, fără îndoială, independentă de alegerea sistemului de referinţă. Prin urmare, ecuaţia liniilor geodezice trebuie să fie covariantă la transformările de coordonate. Pentru un nou sistem de coordonate (x^{*k}) trebuie ca ecuaţia liniilor geodezice să se scrie

$$(18) \qquad \frac{d^2x^{*l}}{ds^2}+\begin{Bmatrix} m & n \\ l & \end{Bmatrix}^*\frac{dx^{*m}}{ds}\frac{dx^{*n}}{ds}=0.$$

Să efectuăm o transformare oarecare de variabile. Vom avea,

$$\frac{dx^l}{ds}=x^l{}_{*\alpha}\frac{dx^{*\alpha}}{ds};$$

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} = x^l{}_{*\alpha} \frac{d^2 x^{*\alpha}}{ds^2} + x^l{}_{*\alpha\beta} \frac{dx^{*\alpha}}{ds} \frac{dx^{*\beta}}{ds},$$

cu notația

$$x^l{}_{*\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{*\alpha}\, \partial x^{*\beta}}. \tag{19}$$

Înlocuind în (17), obținem

$$x^l{}_{*\alpha} \frac{d^2 x^{*\alpha}}{ds^2} + \left(x^l{}_{*\alpha\beta} + \left\{ \begin{matrix} m & n \\ l \end{matrix} \right\} x^m{}_{*\alpha}\, x^n{}_{*\beta} \right) \frac{dx^{*\alpha}}{ds} \frac{dx^{*\beta}}{ds} = 0.$$

sau, înmulțind cu $x^*{}_l{}^\gamma$ și sumând pe l,

$$\frac{d^2 x^{*\gamma}}{ds^2} + \left(x_l{}^{*\gamma}\, x^l{}_{*\alpha\beta} + x_l{}^{*\gamma}\, x^m{}_{*\alpha}\, x^n{}_{*\beta} \left\{ \begin{matrix} m & n \\ l \end{matrix} \right\} \right) \frac{dx^{*\alpha}}{ds} \frac{dx^{*\beta}}{ds} = 0. \tag{20}$$

Comparând ecuația precedentă cu ecuația (18), rezultă, pentru *simbolii lui* CHRISTOFFEL *transformați* (*), formulele lui CHRISTOFFEL:

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\}^* = x_l{}^{*\gamma}\, x^m{}_{*\alpha}\, x^n{}_{*\beta} \left\{ \begin{matrix} m & n \\ l \end{matrix} \right\} + x_l{}^{*\gamma}\, x^l{}_{*\alpha\beta}; \tag{21}$$

sau, inversând rolul variabilelor x^k și x^{*k},

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = x^\gamma{}_{*l}\, x_\alpha{}^{*m}\, x_\beta{}^{*n} \left\{ \begin{matrix} m & n \\ l \end{matrix} \right\}^* + x^\gamma{}_{*l}\, x^{*l}{}_{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Observațiuni. Simbolii lui CHRISTOFFEL nu sunt componente tensoriale.

In adevăr, formula (21) ne arată că transformarea simbolilor lui CHRISTOFFEL poate coincide cu transformarea unor componente tensoriale numai când

$$x^l{}_{*\alpha\beta} = 0;$$

deci, numai pentru grupul de transformări liniare.

CAP. V.

Analiza tensorială în spaţii euclidiene cu n dimensiuni.

241. Câmp de tensori. In definiţia tensorului, prin componentele sale, este capital faptul că aceste mărimi au un sens determinat numai într'un punct anumit al unui domeniu din multiplicitatea considerată; anume, punctul în care este localizat tensorul, în înţelesul că toate componentele sale sunt funcţii de coordonatele punctului.

Admitem că tensorii, deci componentele lor, sunt funcţii continue şi cu derivate continue, prin raport cu coordonatele punctului respectiv. Numim mulţimea tuturor tensorilor ataşaţi punctelor unei multiplicităţi, un *câmp de tensori.*

Doi tensori, $T_1\ (x^s{}_1)$ definit în punctul $P_1\ (x^s{}_1)$ şi $T_2\ (x^s{}_2)$ definit în punctul $P_2\ (x^s{}_2)$ nu pot fi comparaţi între ei, când distanţa $P_1 P_2$ este finită, fără anumite precauţii: compararea nu se poate face deadreptul, — la distanţă, — aşa cum s'a arătat că este posibil într'un spaţiu euclidian pentru vectori (cu ajutorul noţiunii de „translaţie"). Vom constata, mai târziu, că această operaţie de comparare la distanţă trebue înlocuită cu compararea „din aproape în aproape" (locală).

Prin urmare, într'o multiplicitate n dimensională nu are sens să se vorbească, fără anumite precauţii, de tensori „egali" când sunt ataşaţi în puncte diferite. Această constatare reese clar, în adevăr, dacă efectuăm o transformare de variabile: din egalitatea componentelor raportate la un sistem de coordonate dat, nu putem conclude la egalitatea componentelor raportate la un nou sistem de coordonate, în cazul general. Fie

Scanned with OKEN Scanner

$$t_{1s} = t_{2s} ;$$

prin transformarea

$$t^*_{1s} = x^k{}_{1*s}\, t_{1k} \; ; \; t^*_{2s} = \chi^k{}_{2*s}\, t_{2k} ,$$

egalitateaa nouilor componente nu are loc decât dacă toţi $\chi^k{}_{1ks}$ şi $\chi^k{}_{2ks}$ sunt egali, ceeace este posibil numai în cazul, cu totul particular, al transformărilor liniare. Asupra extinderii noţiunii de multiplicitate oarecare n- dimensională, revenim în Cap. VI.

Din aceste consideraţii rezultă că *numai tensorii localizaţi în puncte infinit vecine pot să fie comparaţi direct, între ei.* In acest scop, este necesar să urmărim variaţia infinitesimală a unui tensor localizat în punct P_1, când acest punct ocupă poziţia P_2 infinit vecină lui P_1; operaţie, care ne conduce, inerent, la noţiunea de „derivată". Această noţiune este, pentru câmpurile tensoriale, mai complicată decât noţiunea curentă din cazul câmpurilor scalare.

In cazul unui scalar $\varphi\,(x^k)$, mărime invariantă pentru orice transformări de coordonate, $(x \longrightarrow x^*)$, avem, pentru derivata primă,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^*_s} = x^k{}_{*s}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \; ;$$

dar, acest procedeu, după cum vom verifica mai jos, nu poate fi aplicat tensorilor de ordjn superior lui zero. Pentru astfel de tensori, derivata obicinuită se înlocueşte prin nişte *expresii diferenţiale tensoriale*, pe care le vom defini în cele ce urmează.

242. „Derivata covariantă" a tensorului de primul ordin. 1. Fie t_s componentele covariante ale unui tensor de primul ordin. Avem, după legea de transformare cunoscută,

$$t^*_s = x^k{}_{*s}\, t_k \; . \tag{1}$$

Derivând în raport cu variabilele noui x^*, avem

$$\frac{\partial t^*_s}{\partial x^{*p}} = x^k{}_{*s}\, x^r{}_{*p}\, \frac{\partial t_k}{\partial x^r} + x^k{}_{*sp}\, t_k \; . \tag{2}$$

Inlocuind în această expresie valorile derivatelor de ordinul al doilea din formulele lui CHRISTOFFEL (22) § 240, şi ţinând seamă de (1), rezultă

$$(3)\qquad \frac{\partial t^*_s}{\partial x^{*p}} = x^k{}_{*s}\, x^n{}_{*p}\, \frac{\partial t_k}{\partial x^r} - x^m{}_{*s}\, x^n{}_{*p} \begin{Bmatrix} m\ n \\ q \end{Bmatrix} t_q + \begin{Bmatrix} s\ p \\ q \end{Bmatrix}^* t^*_q .$$

Indicii curenți m și n pot fi înlocuiți prin k și r. Așa fiind, să facem notația

$$(4)\qquad D_r\, t_k = \frac{\partial t_k}{\partial x^r} - \begin{Bmatrix} k\ r \\ s \end{Bmatrix} t_s .$$

Relația (3) devine astfel

$$D_p\, t^*_s = (x^t{}_{*s}\ x^r{}_{*p})\, .\, D_r\ t_k ;$$

ceeace ne arată că $D_r\ t_k = t_{kr}$, definit prin relația (4), este un tensor covariant de ordinul al doilea. Numim această mărime „*derivata covariantă*“ a componentelor covariante ale tensorului de ordinul întâi.

2. Fie t^s componentele contravariante ale unui tensor de ordinul întâi. Avem, prin operația de coborîre a indicilor,

$$t_k = g_{ks}\ t^s .$$

După (4) obținem

$$D_r\, t_k = \frac{\partial}{\partial x^r}(g_{kp}\ t^p) - \begin{Bmatrix} k\ r \\ m \end{Bmatrix} (g_{mp}\ t^p)$$

$$= g_{kp}\, \frac{\partial t^p}{\partial x^r} + t^p \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^r} - \begin{bmatrix} k\ r \\ p \end{bmatrix} \right)$$

$$= g_{kp}\, \frac{\partial t^p}{\partial x^r} + t^p \begin{bmatrix} p\ r \\ k \end{bmatrix} .$$

Multiplicând ambii membri ai relației precedente cu g^{km} obținem, prin operația de ridicare a indicilor,

$$(5)\qquad D_r\, t^m = \frac{\partial t^m}{\partial x^r} + \begin{Bmatrix} p\ r \\ m \end{Bmatrix} t^p ;$$

relație, care definește un tensor de ordinul al doilea și se numește „derivata covariantă“ a componentelor contravariante ale unui tensor de primul ordin.

243. Derivata covariantă a unui tensor de ordin oarecare. Să aplicăm metoda precedentă, spre exemplu, componentelor mixte, de două ori covariante și odată contravariante, ale

unui tensor de ordinul al treilea. Transformarea lui se face ca și când tensorul ar fi de forma

$$t^k{}_{pr} = a_p\, b_r\, c^k ,$$

unde a_p, b_r, c^k sunt componente co- resp. contravariante ale câte unui tensor de primul ordin. După (4) și (5), expresiile

$$a_{pm} = \frac{\partial a_p}{\partial x^m} - \left\{ \begin{matrix} p\, m \\ p \end{matrix} \right\} a_n \; ; \; b_{rm} = \frac{\partial b_r}{\partial x^m} - \left\{ \begin{matrix} r\, m \\ n \end{matrix} \right\} b_n \; ;$$

$$c^k{}_m = \frac{\partial c^k}{\partial x^m} + \left\{ \begin{matrix} n\, m \\ k \end{matrix} \right\} c^n ,$$

sunt tensori de ordinul al doilea. Inmulțind relațiile precedente respectiv, cu $b_r\, c^k$, $a_p\, c^k$, $a_p\, b_r$ și sumând, obținem un tensor de ordinul al patrulea

$$(6) \qquad t^k{}_{prm} = a_{pm}\, b_r\, c^k + b_{rm}\, a_p\, c^k + c^k{}_m\, a_q\, b_r \; ;$$

sau,

$$(7) \qquad D_m\, t^k{}_{pr} = \frac{\partial t^k{}_{pr}}{\partial x^m} + \left\{ \begin{matrix} m\, n \\ k \end{matrix} \right\} t^n{}_{pr} - \left\{ \begin{matrix} m\, r \\ n \end{matrix} \right\} t^k{}_{pn} - \left\{ \begin{matrix} m\, p \\ n \end{matrix} \right\} t^k{}_{nr} .$$

Formula se aplică la orice tensor de tipul $t^k{}_{pr}$.

Observații. Trebue de reținut că, prin derivare covarianta, se construesc tensori de ordin superior.

2. Dacă toți g_{ij} sunt constanți, ceeace are loc pentru un sistem de coordonate cartesian, și dacă operăm în acest sistem de coordonate, simbolii lui CHRISTOFFEL sunt, evident, nuli; atunci derivata covariantă se reduce la derivata obicinuită, oricare ar fi tensorul considerat.

3. Nu trebue să uităm, prin urmare, că derivata covariantă este definită numai dacă se dă forma patratică fundamentală.

4. Observăm că derivata covariantă a componentelor unui tensor constant *nu* este nulă. Acest fapt nu este surprinzător, căci tensorii de ordin superior, formați prin derivare covariantă, posedă componente care depind de alegerea sistemului de coordonate; după cum vom verifica mai târziu.

244. Proprietăți ale derivatei covariante. 1. Derivarea unui produs exterior este conținută în formula (6); după care rezultă că această derivare se efectuiază ca și în cazul derivării obicinuite.

2. *Derivarea covariantă și contracția sunt două operații permutabile.*

Să efectuăm, în (7), contractarea $k = r$. Observăm că termenii al doilea și al treilea diferă, atunci, între ei, numai prin denumirea indicilor curenți (de sumare); ordonându-i convenabil, acești doi termeni se distrug. Rămâne

$$D_m\, t_p = \frac{\partial t_p}{\partial x^m} - \left\{ \begin{matrix} m\, n \\ n \end{matrix} \right\} t_n ,$$

ceeace reprezintă derivata covariantă a componentelor $t_p = t^r{}_{pr}$ contractatate.

3. Din cele ce preced rezultă că derivata covariantă a unui *produs mixt* se obține după aceiași regulă ca și derivata obicinuită a unui produs.

4. *Teorema lui* RICCI. „Derivatele covariante ale componentelor tensorului fundamental de ordinul al doilea g_{sk}, g^{sk}, $g_s{}^k$, sunt nule".

1. Să considerăm componentele covariante g_{sk}. Avem

$$D_m\, g_{sk} = \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^m} - \left\{ \begin{matrix} s\, m \\ p \end{matrix} \right\} g_{pk} - \left\{ \begin{matrix} k\, m \\ p \end{matrix} \right\} g_{sp} ,$$

sau,

$$D_m\, g_{sk} = \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^m} - \left[\begin{matrix} s\, m \\ k \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} k\, m \\ s \end{matrix} \right] ,$$

expresie, identic nulă, în virtutea proprietăților simbolilor lui CHRISTOFFEL (§ 89, 240).

2. Se verifică, fără dificultate, că și derivata covariantă a componentelor mixte $g^k{}_s$ este nulă, aplicând formula (7).

3. De asemeni, pentru componentele contravariante g^{sk}, observăm că

$$g^{sk}\, g_{kp} = g^s{}_p .$$

Prin urmare, rezultă

$$g_{kp} \cdot D_m\, g^{sk} = 0 .$$

Cum determinantul $\| g_{sk} \|$ este diferit de zero, urmează că

$$D_m\, g^{sk} = 0 ;$$

ceeace, explicit, se scrie

$$(8) \qquad \frac{\partial g^{sk}}{\partial x^m} + \left\{ \begin{matrix} p\ m \\ s \end{matrix} \right\} g^{pk} + \left\{ \begin{matrix} p\ m \\ k \end{matrix} \right\} g^{sp} = 0 .$$

245. Derivata contravariantă se deduce prin operaţia de ridicare a indicilor :

$$D^s \text{ (comp. tens. oarecare)} = g^{sk} D_k \text{ (aceleaşi comp.)}$$

Este evident că toate proprietăţile stabilite pentru derivarea covariantă sunt adevărate şi pentru derivata contravariantă, astfel definită. Singura deosebire este că derivata contravariantă nu se reduce la derivata obicinuită decât dacă g_{sk} sunt nu numai constanţi, ci numai dacă au valorile particulare $g_{sk} = \delta^k_s$ $\left(= 0 \ (s \neq k) \text{ sau } 1 \ (s = k) \right)$.

246. Deplasarea paralelă a unui vector. Derivata covariantă a unui tensor de ordinul întâi este susceptibilă de o interesantă interpretare geometrică.

Fie $\bar{a}$ un vector în spaţiul euclidian, legat în punctul $P(x^s)$. Componentele a_k să fie funcţii continue de coordonatele lui P. Să deplasăm punctul P până la punctul P' de coordonate $x^s + \delta x^s$. Componentele vectorului astfel deplasat în P', vor fi

$$a_k + \delta a_k = a_k + \frac{\partial a^k}{\partial x^s} \delta x^s .$$

In cazul simplu al spaţiului euclidian, când raportăm vectorul la un sistem de axe cartesian, $\frac{\partial a_k}{\partial x^s} \delta x^s$ exprimă variaţia vectorului pe direcţia x^s - lor. Dacă vectorul e constant, derivata precedent scrisă este nulă, vectorul rămânând echipolent cu el însuşi.

In cazul când raportăm vectorul la un sistem de coordonate general (curbilinii), diferenţiala

$$D_s a_k \cdot \delta x^s = \frac{\partial a_k}{\partial x^s} \delta x^s = d a_k$$

trebuie să conţină nu numai variaţia valorii absolute a vectorului, ci şi un termen de pseudo-variaţie, datorit caracterului curbiliniu al coordonatelor generale.

In aceste împrejurări, pentru ca diferențiala vectorului să aibă tot caracter de vector (ca în spațiul euclidian), suntem conduși să o formăm cu derivata covariantă, definită în paragraful precedent, prin relația (4):

$$(9) \qquad D_s\, a_k \,.\, \delta x^s = \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^s} - \left\{ \begin{matrix} s\ k \\ n \end{matrix} \right\} a_n \right) \delta x^s .$$

Prin definiție, dacă în deplasarea punctului P în P' această „diferențială" (covariantă) e nulă, adică vectorul rămâne echipolent cu el însuși, spunem că vectorul a suferit o *deplasare paralelă*. Condițiile necesare și suficiente ca acest fapt să aibă loc, vor fi date, prin analogie cu cazul particular al coordonatelor cartesiene, de anularea derivatei covariante (9). Așadar, pentru *deplasări infinit mici,*

$$(10) \qquad da_k - \left\{ \begin{matrix} s\ k \\ n \end{matrix} \right\} a_n\, dx^s = 0 .$$

Observăm că, în relația precedentă, pe lângă variația valorii absolute (primul termen), apare în formulă și un termen în care figurează simbolii lui CHRISTOFFEL, termen atribuit curburii coordonatelor (el dispărând pentru coordonate cartesiene).

Justificarea considerațiilor precedente rezultă precum urmează.

Să admitem că egalitatea componentelor vectorilor $\bar{a}\ (P)$ și $\bar{a}\ (P')$ are loc pentru un sistem de coordonate (x^{*s}):

$$a^*_k\ (x^{*s} + \delta x^{*s}) = a^*_k\ (x^{*s}) ;$$

așadar,

$$\delta\, a^*_k = 0 ,$$

și să efectuăm o transformare oarecare de coordonate; după § 225, formula (63), avem pentru componentele lață de noul sistem de coordonate (x^s)

$$a_k = x^{*m}{}_k\ a^*_m .$$

Variația componentelor nestelate e dată de relația

$$\delta a_k = \delta a_k{}^{*m}\ a^*_m = x^{*m}{}_{kn}\ \delta x^n\ a^*_m .$$

Făcând substituția

$$a^*_m = x^p{}_{*m}\ a_p ,$$

rezultă

$$\delta a_k = x^{*m}{}_{kn}\, x^{p}{}_{*m}\, a_p\, \delta x^n \,.$$

Să facem notația

$$\Gamma_{sn}{}^{p} = x^{*m}{}_{sn}\, x^{p}{}_{*m} \,.$$

Printr'un calcul elementar se poate stabili o expresie mai intuitivă și comodă pentru coeficientul precedent. In acest scop să derivăm relația evidentă

$$x^{*r}{}_{s}\, x^{m}{}_{*r} = \delta^{m}{}_{s} \,;$$

avem

$$x^{*r}{}_{sk}\, x^{m}{}_{*r} + x^{*r}{}_{s}\, x^{m}{}_{*rp}\, x^{*p}{}_{k} = 0 \,;$$

așadar,

$$x^{*r}{}_{sk}\, x^{m}{}_{*r} = - x^{m}{}_{*rp}\, x^{*r}{}_{s}\, x^{*p}{}_{k} \,.$$

Rezultă că

$$\Gamma_{sk}{}^{m} = - x^{m}{}_{*rp}\, x^{*r}{}_{s}\, x^{*p}{}_{k} \,.$$

Coeficientul precedent, scris explicit :

$$\Gamma_{pr}{}^{s} = - \sum_{m,\,n} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{*m}\, \partial x^{*n}} \frac{\partial x^{*m}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{*n}}{\partial x^r} \,.$$

pe care-l presupunem *simetric* $\Gamma_{pr}{}^{s} = \Gamma_{rp}{}^{s}$, nu este o mărime tensorială, căci în expresia sa sunt implicate ambele sisteme de coordonate simultan. El exprimă diferența dintre coordonatele raportate la vechiul și noul sistem. Relațiile precedente din acest paragraf sunt valabile într'un spațiu afin, fără metrică (v. § 25).

Observăm că ipoteza simetriei mărimilor $\Gamma_{pr}{}^{s}$ nu este constrângătoare. E. CARTAN, făcând abstracție de această ipoteză, studiază spații cărora nesimetria coeficienților $\Gamma_{pr}{}^{s}$, permite să li se atribuie o *torsiune*. Pentru un spațiu metric, după formulele lui CHRISTOFFEL (240), coeficienții Γ se exprimă prin ajutorul simbolilor lui CHRISTOFFEL de speța a doua, unde în cazul de față, trebuie să presupunem că simbolul raportat la vechile axe este nul (am admis egalitatea componentelor relative la aceste axe).

Prin urmare, în adevăr, variația $\Gamma_{pr}{}^{s}\, \delta x^s$, provenită din transportarea axelor din P în P' se datorește curburii sistemului de coordonate, manifestată prin tensorul fundamental g_{sk}, ale cărui derivate figurează în expresiile lui CHRISTOFFEL.

Observații. 1. Pentru *componentele contravariante*, condițiile care definesc o deplasare paralelă se scriu, după (5)

$$(11) \qquad da^k + \left\{ \begin{matrix} n & s \\ & k \end{matrix} \right\} a^n \, dx^s = 0 .$$

2. *Ecuațiile geodezicelor* într'un spațiu euclidian n-dimensional se deduc ușor din considerațiile precedente. In acest scop, observăm că mișcarea rectilinie și uniformă a unui punct, raportată la un sistem cartesian de coordonare, se efectuiază pe o dreaptă, astfel încât vectorul viteză rămâne mereu paralel cu el însuși. Aplicând această definiție la mișcarea raportată la un sistem de coordonate generale, condiția ca vectorul viteză, de componente contravariante.

$$a^k = \frac{dx^k}{dt}$$

să se propage prin deplasare paralelă, este, după (11),

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} a^n \, dx^s = 0 ,$$

care sunt ecuațiile geodezicelor spațiului euclidian cu n dimensiuni.

3. Numim *sistem de coordonate geodezice* într'un spațiu euclidian coordonatele particulare, pentru care egalitatea componentelor unui vector localizat se menține în fiecare punct. (Simbolii lui CHRISTOFFEL sunt nuli). Locul acestor puncte este, precum se deduce imediat, o linie geodezică (dreaptă). Pentru punctele unei astfel de linii, derivata covariantă fiind nulă, prin definiție, un vector se propagă prin deplasare paralelă, rămânând paralel cu el însuși.

4. Numim *derivata absolută* a unui vector, într'un E_N, expresia, dedusă din (11),

$$\frac{Da^s}{Dt} = \frac{\partial a^s}{\partial t} + \left\{ \begin{matrix} m & n \\ & s \end{matrix} \right\} a^m \frac{dx^n}{dt} ,$$

admițând, bine înțeles, că vectorul $\bar{a}$ este legat de punctul $x^n(t)$, care este funcție de parametrul t.

Dacă vectorul $\bar{a}$ este viteza $\frac{dx^s}{dt}$ a unui punct material,

condiția ca mișcarea să se efectueze cu o *accelerație absolută* nulă, (deci, *uniform*) este

$$\frac{d^2 x^s}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} m & n \\ s & \end{matrix} \right\} \frac{dx^m}{dt} \frac{dx^n}{dt} = 0 .$$

Așadar, regăsim ecuațiile diferențiale ale geodezicelor în E^n.

5. Trebue observat că operația de deplasare paralelă permite compararea *lungimilor* vectorilor (când există, evident, o metrică) chiar când vectorii sunt localizați în puncte la distanță finită; — operația fiind posibilă „din aproape în aproape".

„Deplasarea paralelă" este o noțiune care precizează sensul operației de comparare a vectorilor și tensorilor în puncte diferite. In acest sens, se poate vorbi chiar în spațiile riemanniene despre compararea vectorilor și tensorilor localizați în puncte diferite (§ 256). După cum vom vedea mai târziu, H. WEYL înlocuește această noțiune, în geometria infinitesimală pură, prin noțiunea de „deplasare a etalonului metric local" (deci a lungimii), numită *deplasare congruentă*.

247. Formule necesare. 1. Din relația cunoscută

$$g^{sk} g_{sr} = \delta^k{}_r ,$$

rezultă

$$g^{sk} dg_{sr} + g_{sr} dg^{sk} = 0 ;$$

așadar,

$$g^{sk} g^{mr} dg_{sr} = - g_{sr} g^{mr} dg^{sk} = - \delta^m{}_s dg^{sk} = - dg^{mk} .$$

In mod analog,

$$dg_{sk} = - g_{sm} g_{kn} dg^{mn} . \qquad (12)$$

2. Fie t^{sk} și t_{sk} doi tensori asociați. Să înmulțim relația (12) cu t^{sk}; obținem

$$t^{sk} dg_{sk} = - t_{mn} dg^{mn} = - t_{sk} dg^{sk} . \qquad (13)$$

3. Fie $g = |g_{sk}|$ determinantul, diferit de zero, al tensorului fundamental. Din teoria determinanților se știe că dg se formează înmulțind diferențiala fiecărui element cu minorul corespunzător și făcând suma algebrică a câtimilor astfel obținute. Așadar,

condiția ca mișcarea să se efectueze cu o *accelerație absolută* nulă, (deci, *uniform*) este

$$\frac{d^2 x^s}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} m & n \\ s & \end{matrix} \right\} \frac{dx^m}{dt} \frac{dx^n}{dt} = 0 .$$

Așadar, regăsim ecuațiile diferențiale ale geodezicelor în E^n.

5. Trebue observat că operația de deplasare paralelă permite compararea *lungimilor* vectorilor (când există, evident, o metrică) chiar când vectorii sunt localizați în puncte la distanță finită; — operația fiind posibilă „din aproape în aproape".

„Deplasarea paralelă" este o noțiune care precizează sensul operației de comparare a vectorilor și tensorilor în puncte diferite. In acest sens, se poate vorbi chiar în spațiile riemanniene despre compararea vectorilor și tensorilor localizați în puncte diferite (§ 256). După cum vom vedea mai târziu, H. WEYL înlocuește această noțiune, în geometria infinitesimală pură, prin noțiunea de „deplasare a etalonului metric local" (deci a lungimii), numită *deplasare congruentă*.

247. Formule necesare. 1. Din relația cunoscută

$$g^{sk} g_{sr} = \delta^k{}_r ,$$

rezultă

$$g^{sk} dg_{sr} + g_{sr} dg^{sk} = 0 ;$$

așadar,

$$g^{sk} g^{mr} dg_{sr} = - g_{sr} g^{mr} dg^{sk} = - \delta^m{}_s dg^{sk} = - dg^{mk} .$$

In mod analog,

$$dg_{sk} = - g_{sm} g_{kn} dg^{mn} . \tag{12}$$

2. Fie t^{sk} și t_{sk} doi tensori asociați. Să înmulțim relația (12) cu t^{sk}; obținem

$$t^{sk} dg_{sk} = - t_{mn} dg^{mn} = - t_{sk} dg^{sk} . \tag{13}$$

3. Fie $g = |g_{sk}|$ determinantul, diferit de zero, al tensorului fundamental. Din teoria determinanților se știe că dg se formează înmulțind diferențiala fiecărui element cu minorul corespunzător și făcând suma algebrică a câtimilor astfel obținute. Așadar,

(14) $$dg = g \cdot g^{sk}\, dg_{sk} .$$

Sau, după (13),

(15) $$d(\log g) = g^{sk}\, dg_{sk} = - g_{sk}\, dg^{sk} .$$

4. Să contractăm simbolul de speța doua

$$\left\{ \begin{matrix} s\ k \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} g^{km} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^s} .$$

$$= - \frac{1}{2} g_{km} \frac{\partial g^{km}}{\partial x^s} .$$

Deducem, după (14),

(16) $$\left\{ \begin{matrix} s\ k \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial x^s} = \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\log \sqrt{|g|} \right) .$$

Scriem $|g|$ în valoare absolută fiindcă, în unele determinări (cum e în relativitatea restrânsă) determinantul g_{rk} este negativ pentru anumite sisteme de coordonate; ori el rămâne negativ pentru oricare alt sistem de coordonate.

248. Divergența unui tensor. In calculul vectorial am definit noțiunea obicinuită a divergenței unui vector $\bar{a}$ prin relația

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} ,$$

ceeace, în notațiile folosite în calculul tensorial, se scrie $\frac{\partial a_s}{\partial x^s}$.

Generalizând această noțiune, vom defini „*divergența unui tensor*“ prin *derivata covariantă contractată*, și o vom nota cu *Div.*

1. Din formulele (5) avem, pentru componentele contravariante ale tensorului de primul ordin,

$$D_r t^r = \frac{\partial t^r}{\partial x^r} + \left\{ \begin{matrix} s\ r \\ r \end{matrix} \right\} t^s = \frac{\partial t^k}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\log \sqrt{|g|} \right)$$

$$= \frac{\partial t^k}{\partial x^k} + t^t \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k} ;$$

sau, în definitiv,

$$(17) \qquad D_r\, t^r = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(t^k \sqrt{|g|} \right) .$$

Definim divergența prin

$$\mathrm{Div}\, t = \sqrt{|g|}\, D_r\, t^r .$$

2. Pentru componentele covariante ale tensorului de ordinul al doilea, din relația (7), deducem

$$(18) \qquad D_r\, t^r{}_s = \frac{\partial t^r{}_s}{\partial x^r} + \left\{ \begin{matrix} k\, r \\ r \end{matrix} \right\} t^k{}_s - \left\{ \begin{matrix} s\, r \\ k \end{matrix} \right\} t^r{}_k ;$$

$$(19) \qquad D_r\, t^r{}_s = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(t^k{}_s \sqrt{|g|} \right) - \left\{ \begin{matrix} s\, r \\ k \end{matrix} \right\} t^r{}_k .$$

De asemeni,

$$D_r\, t^{rs} = \frac{\partial t^{rs}}{\partial x^r} + \left\{ \begin{matrix} k\, r \\ r \end{matrix} \right\} t^{ks} + \left\{ \begin{matrix} k\, r \\ s \end{matrix} \right\} t^{rk} ;$$

$$(20) \qquad D_r\, t^{rs} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(t^{ks} \sqrt{|g|} \right) + \left\{ \begin{matrix} k\, r \\ s \end{matrix} \right\} t^{rk} .$$

3. *Tensor antisimetric.* Dacă tensorul de ordinul al doilea este antisimetric, ultimul termen al relației (20) este, evident, nul. Rezultă

$$(21) \qquad D_r\, t^{rs} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(t^{ks} \sqrt{|g|} \right) \quad \text{(tensor antisimetric)}$$

4. *Tensor simetric.* Inmulțim relația (20) cu g_{sm} și avem în vedere teorema lui RICCI; obținem

$$D_r\, t^r{}_m = \frac{g_{sm}}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(t^{ks} \sqrt{|g|} \right) + \left[\begin{matrix} k\, r \\ m \end{matrix} \right] t^{rk}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g_{sm}\, t^{ks} \sqrt{|g|} \right) - \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^k} t^{ks} + \left[\begin{matrix} k\, r \\ m \end{matrix} \right] t^{rk} .$$

Printr'o schimbare convenabilă a indicilor curenți, și ținând seamă de simetria tensorului, deducem

$$\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^r} t^{rk} = \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^k} t^{rk} = \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^k} t^{ks} .$$

Rămâne, așadar,

$$(22)\qquad D_r\, t^r{}_m = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\left(t^k{}_m\sqrt{|g|}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^m}\,t^{rk}\ ;\quad \text{(tensor simetric)}$$

$$= \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \frac{1}{2}\,\frac{g^{rk}}{\partial x^m}\,t_{rk}\ .$$

5. *Densităţi tensoriale.* După definiţiile date la § 233 şi 234, se poate deduce imediat că mărimea $\sqrt{|g|}$ este o densitate scalară, iar $1 : \sqrt{|g|}$ este o capacitate scalară. In adevăr, în § 125, formula (20), am demonstrat că determinantul unei forme patratice, de ex. $ds^2 = g_{rk}\,dx^r\,dx^t$, se transformă după relaţia

$$g^* = \Delta^2\, g\ ,$$

unde Δ este determinantul funcţional al transformării. Deci,

$$\sqrt{|g^*|} = \Delta\,.\,\sqrt{|g|}\ ,$$

aşadar, după § 234, ca o „densitate" scalară; de asemeni,

$$\frac{1}{\sqrt{|g^*|}} = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{\sqrt{|g|}}\ ,$$

aşadar, ca o „capacitate" scalară.

In consecinţă, mărimile de forma

$$\alpha^{sk} = \sqrt{|g|}\ .\ a^{sk}$$

reprezintă densităţi tensoriale şi sunt, în general, pseudotensori. Legile de transformore ale acestor mărimi au fost stabilite la § 234:

$$\alpha^{*rs} = \Delta\ .\ (x^{*r}{}_m\, x^{*s}{}_n)\ \alpha^{mn}\ ,$$

unde Δ este determinantul funcţional al transformării.

Introducând aceste relaţii în formula (17) şi însemnând densităţile tensoriale de primul ordin cu

$$\Omega_r = \sqrt{|g|}\ t_r\ ;\ \Omega^k = \sqrt{|g|}\ t^k\ ,$$

obţinem pentru (17)

$$(17')\qquad \text{Div}\ \bar{t} = \Omega^r{}_r = \frac{\partial \Omega^k}{\partial x^k}\ ,$$

în perfectă analogie cu notaţia „divergenţii" obicinuite.

Pentru tensorii de ordin superior, din formulele (19), (20), (21) şi (22), rezultă

(19′) $$\text{Div } t^r{}_s = \frac{\partial \Omega^k{}_s}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} s\ r \\ k \end{matrix} \right\} \Omega^r{}_k ;$$

(20′) $$\text{Div } t^{rs} = \frac{\partial \Omega^{ks}}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} k\ r \\ s \end{matrix} \right\} \Omega^{rk} ;$$

(21′) $$\text{Div } t^{rs} = \frac{\partial \Omega^{ks}}{\partial x^k} \text{ , dacă } t^{rs} \text{ este antisimetric ;}$$

(22′) $$\text{Div } t^r{}_s = \frac{\partial \Omega^k{}_m}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^m} \Omega^{rk} \text{ (tensor simetric)}$$

(22″) $$\text{Div } t^r{}_s = \frac{\partial \Omega^k{}_m}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} \Omega_{rk} .$$

6. *Operatorul lui* LAPLACE. In coordonate cartesiene rectangulare, operatorul lui LAPLACE se exprimă prin divergența gradientului unui scalar. In coordonate generale, vom defini operatorul în mod analog :

$$\Delta\varphi = D_r (D^r \varphi) = D^r (D_r \varphi) ;$$

eeace, după relația (17) § 247, ne dă

(23) $$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{|g|}\ g^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right) ;$$

căci, $D_r \varphi$ determină componentele covariante ale vectorului gradient și am trecut la componentele contravariante prin înmulțire cu g^{rs}.

7. *Aplicație : calculul laplaceianului în coordonate generale, triortogonale.* Să presupunem că ne referim la un sistem de coordonate generale, pentru care forma patratică fundamentală este dată de

$$ds^2 = h_1{}^2 (dx^1)^2 + h_2{}^2 (dx^2)^2 + h_3{}^2 (dx^3)^2 .$$

Avem,

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 ; \quad g^{sk} = 0 \ (s \neq k) ; \quad g^{11} = 1 : h_1{}^2 ;$$
$$g^{22} = 1 : h_2{}^2 ; \quad g^{33} = 1 : h^2{}_3 .$$

Inlocuind aceste valori în expresia (23), regăsim formula cunoscută

(24) $$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right) \right\} .$$

Scanned with OKEN Scanner

8. *Noțiunea de „Rotor“.* In spațiul euclidian E_3 cu trei dimensiuni $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, componentele rotorului unui vector $\bar{a}$ se obțin, după cum se știe, prin relațiile

$$r_{sk} = \frac{\partial a_k}{\partial x^s} - \frac{\partial a_s}{\partial x^k} \; ; \; (s, k = 1, 2, 3) \; ;$$

ceeace definește un tensor antisimetric.

Aceiași noțiune se poate extinde și într'un spațiu euclidian E_n cu n dimensiuni; singura deosebire este că obținem un număr mai mare de componente. Acest lucru se poate justifica precum urmează.

In E_3, formula lui STOKES stabilește relația cunoscută între circulație și flux:

$$\int_C r_{sk} \, ds^{sk} = \int_\epsilon R^k \, d\sigma_k \; ,$$

unde ds este elementul liniar al curbei închise, de contur C, care limitează o suprafață arbitrară Σ, al cărei element superficial este $d\sigma$; ambele satisfăcând condițiilor de regularitate necesare.

In mod analog, într'o multiplicitate oarecare n-dimensională, considerăm un contur C (curbă închisă regulată), pe care se sprijină o suprafață regulată, arbitrară S, posedând *două* dimensiuni, aleasă astfel încât, printr'o alegere convenabilă a sistemului de coordonate (în general curbilinii), ea să fie reprezentată prin următoarele n-2 condiții

$$x^3 = \text{const.} \; ; \; x^4 = \text{const.} \; ; \; \ldots \; x^n = \text{const.}$$

Relația lui STOKES rămâne valabilă și în acest caz. Rezultă

$$R^k = \text{Rot}_{sk} \, \bar{a} = r_{sk} = \frac{\partial a_k}{\partial x^s} - \frac{\partial a_s}{\partial x^k} \; , \quad (s, k = 1, 2, \ldots n)$$

ceeace definește noțiunea de „Rotor“.

249. Precizarea noțiunii de „divergență“. Derivatele covariante ale pseudo-tensorilor. Noțiunea de divergență a unui vector a rezultat, precum știm din Calculul vectorial, din noțiunea de „flux“ al unui vector $\bar{u}$ prin unitatea de suprafață. Această noțiune, însă, la rândul ei, este o abstractizare a imaginii fizice de „flux a unei *cantități de substanță*“ prin unitatea de suprafață care închide domeniul ocupat de substanță, în unitatea de timp:

$$\frac{dm}{dt} = - \operatorname{div} (\rho \bar{u})\, d\tau ,$$

unde $\rho\,(P)$ este funcţia de densitate a materiei în punctul P, iar m este cantitatea de materie conţinută în domeniul dat. Cătimea $\rho\bar{u}$ este o *densitate vectorială*, iar $\operatorname{div}(\rho\bar{u})$ este o *densitate scalară*. Expresia „divergenţei unui vector" se obţine din expresia precedentă în care facem $\rho = 1$. In acest sens, constatăm că este mai corect să se aplice operaţia divergenţei unei *densităţi* şi nu unui vector. De aceia şi noţiunea generalizată de „divergenţă a unui tensor" trebue privită ca abstractizarea noţiunei, conforme cu sensul fizic, de divergenţă a unei *„densităţi tensoriale"*.

Să considerăm, în fiecare punct P al unui domeniu, plin cu substanţă, o funcţie scalară de punct $\Omega\,(P)$, care să definească densitatea scalară a substanţei în punctul considerat. Fie M cantitatea de substanţă închisă în domeniul D; avem

$$M = \int_D \Omega\,(P)\, d\tau .$$

Să aplicăm o deformare infinitesimală acestui domeniu. El va ocupa poziţia vecină D', care conţine cantitatea de substanţă

$$M' = \int_{D'} \Omega\,(P')\, d\tau' .$$

Fie

$$\Delta' = \frac{D\,(x'^1 \ldots x'^n)}{D\,(x^1 \ldots x^n)} = 1 + \frac{\partial u^k}{\partial x^k}\, dt + \ldots$$

determinantul funcţional al transformării de coordonate (deformării) prin care trecem de la punctul P din D la un punct P' din D', infinit vecin lui P: $x'^k = x^k + u^k\, dt + \ldots$

Se ştie din regula transformării de variabile sub semnul integrală, că $d\tau' = \Delta'\, d\tau$; deci, variaţia de substanţă va fi

$$M' - M = dM = \int_D \left\{ \Omega\,(x^k + u^k\, dt)\, \Delta' - \Omega\,(x^k) \right\} d\tau .$$

Prin analogie cu definiţia curentă, vom numi cătimea

$$\Omega\,(x^k + u^k\, dt)\,(\Delta' - 1) + \Omega\,(x^k + u^k\, dt) - \Omega\,(x^k)$$

o „densitate scalară"; de unde, în primă aproximație, putem scrie pentru cîtimea de mai sus,

$$\left(\Omega \frac{\partial u^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \Omega}{\partial x^k} u^k\right) dt = \frac{\partial}{\partial x^k} (\Omega u^k)\, dt = \frac{\partial \Omega^k}{\partial x^k} dt = - \text{Div.} (\Omega^k)\, dt,$$

unde Ω^k este o densitate vectorială. Observăm că Div (Ω^k) este o densitate scalară.

In mod analog, vom defini divergența unei *densități tensoriale*. Fie densitatea tensorială de primul ordin

$$\Gamma^r = \Omega^{rk} u_k .$$

Prin definiție,

$$\text{Div } (\Gamma^r) = \sum_r \frac{\partial \Gamma^r}{\partial x^r} = u_k \frac{\partial \Omega^{rk}}{\partial x^r} + \Omega^{rk} \frac{\partial u^k}{\partial x^r} .$$

Această expresie nu este susceptibilă de o interpretare folositoare, decât dacă admitem că funcția Ω^{rk} este antisimetrică, după cum vom vedea mai jos. Putem scrie atunci

$$\text{Div } (\Gamma^r) = u_k \frac{\partial \Omega^{rk}}{\partial x^r} + \frac{1}{2} \Omega^{rk} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^r} - \frac{\partial u^r}{\partial x^k}\right) ;$$

ultimul tensor este o densitate scalară: produsul densității Ω^{rk} prin tensorul $(\text{rot } \vec{u})_{rk}$; rezultatul este de asemeni, o densitate scalară; deci

$$\text{Div } (\Omega^{rk}) = \sum_r \frac{\partial \Omega^{rk}}{\partial x^r} ,$$

este o densitate tensorială contravariantă.

Derivatele covariante ale densităților tensoriale. Cu ajutorul vectorului arbitrar contravariant u^k să construim, din densitatea scalară Ω, o densitate vectorială contravariantă

$$\Omega^k = \Omega u^k ,$$

și să-i aplicăm divergența; avem

$$\text{Div } (\Omega^k) = \frac{\partial \Omega}{\partial x^k} u^k + \Omega \frac{\partial u^k}{\partial x^k} ,$$

rezultatul fiind o nouă densitate scalară. Pentru simplificare, putem considera vectorul arbitrar u^k ca fiind *staționar*, deci derivata sa absolută să fie nulă:

$$\frac{Du^s}{Dx^k} = \frac{\partial u^s}{\partial x^k} + \Gamma^s_{kr}\, u^r = 0 ;$$

de unde

$$\frac{\partial u^s}{\partial x^k} = - \Gamma^s_{kr}\, u^r .$$

Aşadar, rezultă

$$\mathrm{Div}\,(\Omega^k) = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x^k} - \Omega \Gamma^r_{kr} \right\} u^k .$$

Observăm că paranteza din membrul al doilea, înmulţită cu componentele vectorului contravariant u^k, ne dă o densitate scalară.

Expresia acestei paranteze va fi, prin urmare, o densitate vectorială-covariantă, pe care o luăm drept definiţie pentru *„derivata covariantă a densităţii scalare“* :

$$\frac{D\Omega}{Dx^k} = \frac{\partial \Omega}{\partial x^k} - \Omega\, \Gamma^r_{rk} .$$

Odată ce am definit derivata covariantă a unei densităţi scalare, putem construi derivata covariantă a unei densităţi tensoriale oarecare. Spre exemplu, să considerăm densitatea vectorială

$$\Omega^k = \Omega u^k .$$

Avem

$$\frac{D\Omega^k}{Dx^s} = \frac{D(\Omega u^k)}{Dx^s} = \frac{D\Omega}{Dx^s} u^k + \Omega \frac{Du^k}{Dx^s}$$

$$= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^s} - \Omega\, \Gamma^n_{sn} \right) u^k + \Omega \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^s} + \Gamma^k_{sm}\, u^m \right) .$$

Prin urmare, derivata covariantă este dată de

$$\frac{D\Omega^k}{Dx^s} = \frac{\partial \Omega^k}{\partial x^s} - \Omega^k\, \Gamma^n_{sn} + \Omega^m\, \Gamma^k_{sm} .$$

In mod analog, se calculează derivata covariantă a unei densităţi tensoriale de două ori contravariantă

$$\frac{D\Omega^{kr}}{Dx^s} = \frac{\partial \Omega^{kr}}{\partial x^s} - \Omega^{kr}\, \Gamma_{sn}{}^n + \Omega^{kn}\, \Gamma^r_{sn} + \Omega^{nr}\, \Gamma^k_{sn} .$$

Observație asupra calculului divergenței densităților tensoriale de ordin superior. Cum „divergența" se obține din derivata covariantă prin „contracție", avem în conformitate cu rezultatul cunoscut

$$\text{Div } \Omega^k = \frac{D\Omega^k}{Dx^k} = \sum_k \frac{\partial \Omega^k}{\partial x^k} .$$

căci ultimii doi termeni se distrug.

Pentru densitatea de două ori contravariantă Ω^{kr}, găsim, însă,

$$\text{Div } \Omega^{kr} = \frac{D\Omega^{kr}}{Dx^k} = \frac{\partial \Omega^{kr}}{\partial x^k} + \Omega^{ks} \Gamma^r_{ks} ,$$

prin urmare, în general, divergența densității de două ori contravariante nu se mai reduce la suma derivatelor ordinare. Acest fapt are loc numai când densitatea Ω^{kr} este antisimetrică, după cum am constatat mai sus.

Derivata covariantă a unei „capacități" tensoriale se deduce prin considerații analoage. Fie τ o capacitate scalară; avem

$$\frac{D\tau}{Dx^k} = \frac{\partial \tau}{\partial x^k} + \tau \Gamma^n_{kn} .$$

Produsul $(\Omega\tau)$ al unei densități scalare Ω printr'o capacitate scalară τ, este un scalar pur. Așadar,

$$\frac{D(\Omega\tau)}{Dx^k} = \frac{\partial (\Omega\tau)}{\partial x^k} .$$

250. Tensorul lui Riemann-Christoffel. Dacă aplicăm succesiv derivarea covariantă, constatăm că ordinea în care se efectuiază derivarea nu este indiferentă. Această împrejurare permite să se construiască, prin derivare succesivă, un tensor de ordinul al patrulea, ca funcție de g_{sk} și ca funcție (liniară) de derivatele lui g_{sk}; tensor, care joacă un rol deosebit de important în calculul transorial și în aplicațiile acestui calcul în teoria relativității generalizate (Teoria Gravității).

Observăm, mai întâi, că pentru un scalar,

$$D_r\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} ;$$

așa încât,

$$D_s\,(D_r\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^r\,\partial x^s} - \left\{\begin{matrix} r\,s \\ n \end{matrix}\right\} \frac{\partial\,\varphi}{\partial x^n}\,.$$

Cum al doilea membru este, evident, simetric, rezultă că derivatele secunde ale unui scalar sunt independente de ordinea în care se efectuiază derivarea.

Pentru un tensor oarecare, de ordin superior lui zero, această proprietate nu mai este adevărată.

Să formăm derivata secundă a componentelor t_r. După formulele (4) şi (7), putem scrie

$$D_s\,t_r = \frac{\partial\,t_r}{\partial x_s} - \left\{\begin{matrix} r\,s \\ n \end{matrix}\right\} t_n\;;$$

$$D_k\,(D_s\,t_r) = \frac{\partial}{\partial x^k}\;(D_s\,t_r) - \left\{\begin{matrix} s\,k \\ m \end{matrix}\right\}(D_m\,t_r) - \left\{\begin{matrix} r\,k \\ m \end{matrix}\right\}(D_s\,t_m)\;;$$

deci,

$$\begin{aligned} D_k\,(D_s\,t_r) = {} & \frac{\partial^2\,t_r}{\partial x^s\,\partial x^k} - \left\{\begin{matrix} r\,s \\ n \end{matrix}\right\}\frac{\partial\,t_n}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\begin{matrix} r\,s \\ n \end{matrix}\right\}.\,t_n \\ & - \left\{\begin{matrix} k\,s \\ m \end{matrix}\right\}\frac{\partial t_r}{\partial x^m} + \left\{\begin{matrix} s\,k \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} r\,m \\ n \end{matrix}\right\} t_n \\ & - \left\{\begin{matrix} r\,k \\ m \end{matrix}\right\}\frac{\partial\,t_m}{\partial\,x^s} + \left\{\begin{matrix} r\,k \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,s \\ n \end{matrix}\right\} t_n\,. \end{aligned}$$

Permutând indicii s şi k, între ei rezultă

$$\begin{aligned} D_s\,(D_k\,t_r) = {} & \frac{d^2\,t_r}{\partial x^k\,\partial x^s} - \left\{\begin{matrix} r\,k \\ n \end{matrix}\right\}\frac{\partial\,t_n}{\partial x^s} - \frac{\partial}{\partial x^s}\left\{\begin{matrix} r\,k \\ n \end{matrix}\right\} t_n \\ & - \left\{\begin{matrix} k\,s \\ m \end{matrix}\right\}\frac{\partial\,t_r}{\partial x^m} + \left\{\begin{matrix} k\,s \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} r\,m \\ n \end{matrix}\right\} t_n \\ & - \left\{\begin{matrix} r\,s \\ m \end{matrix}\right\}\frac{\partial\,t_m}{\partial\,x^k} + \left\{\begin{matrix} r\,s \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,k \\ n \end{matrix}\right\} t_n \end{aligned}$$

Formând diferenţa expresiilor precedente, unii termeni dispar, (1) iar ceeace rămâne este, în general, diferit de zero şi se scrie

(1) şi anume: prima formulă o notez cu I şi a doua cu II; numărul termenului din membrul al doilea îl însemnez cu un indice; în felul acesta termenii care se distrug sunt: I_1 cu II_1; I_2 cu II_6; I_4 cu II_4; I_5 cu II_5 şi I_6 cu II_2.

$$D_k(D_s t_r) - D_s(D_k t_r) = t_n \left(\frac{\partial}{\partial x^s} \begin{Bmatrix} r\,k \\ n \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} r\,s \\ n \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{Bmatrix} r\,k \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\,s \\ n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r\,s \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\,k \\ n \end{Bmatrix} \right);$$

ceeace se mai poate scrie

$$D_k(D_s t_r) - D_s(D_k t_r) = t_n R^n{}_{rsk}. \tag{25}$$

După § 242, primul membru al relației precedente este un tensor de ordinul al t.eilea, rezultat prin contracția tensorului de primul ordin t_n cu tensorul de ordinul al patrulea $R^n{}_{rsk}$; tensor, pe care-l scriem, printr'o schimbare de notație a indicilor,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \begin{Bmatrix} \beta\,\delta \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta\,\delta \\ k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k\,\gamma \\ \alpha \end{Bmatrix} - \tag{26}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^{\delta}} \begin{Bmatrix} \beta\,\gamma \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta\,\gamma \\ k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k\,\delta \\ \alpha \end{Bmatrix}.$$

Acesta este *tensorul lui* RIEMANN-CHISTOFFEL.

Acest tensor este deosebit de important, fiind singurul tensor care poate fi construit prin derivarea succesivă a tensorului fundamental metric. In general, prin derivare, se știe că se obține tensori noi; dar, în cazul tensorului fundamental, din cauza teoremei lui RICCI, această operație nu folosește curent. Singura combinație, nenulă, prin derivarea tensorului fundamental, este aceia care ne-a condus la tensorul lui R.-CHR. De aici, importanța acestui tensor fundamental.

Mai mult, tensorul lui R.-CHR., fiind construit cu ajutorul coeficienților g_{sk}, și al derivatelor lor prime și secunde (în care este liniar), este indicat să definească *starea de curbură* a spațiului, = tensorul acesta, fiind singurul *tensor de curbură* ce se poate construi din g_{sk}.

Este clar că dacă toți g_{sk} sunt constanți, tensorul R.-CHR este nul. Vom demonstra, mai târziu, teorema reciprocă (§ 254), și, prin aceasta, vom obține o privire mai profundă în înțelesul acestei proprietăți esențiale.

251. Proprietățile tensorului lui Riemann-Christoffel.

1. Din formula (26) rezultă, fără dificultate,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = - R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma} ;$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} = 0 .$$

Observăm că aceste proprietăţi de „antisimetrie" şi de „simetrie cilindrică" sunt o consecinţă a faptului că tensorul lui R.-CHR. este obţinut prin formula (25), dintr'un *rotaţional* : expresie de natura unui *rotor* (anume, membrul întâi al citatei formule).

2. Prin coborîrea indicelui, ceeace se efectuiază înmulţind cu $g_{\alpha\lambda}$ şi sumând pe λ , deducem *tensorul complet covariant*

$$R_{\alpha\beta\varphi\delta} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}{}_{\beta\varphi\delta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \left[\begin{matrix} \beta\,\delta \\ \alpha \end{matrix} \right] + g_{\alpha\lambda} \left\{ \begin{matrix} \beta\,\delta \\ \kappa \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \kappa\,\gamma \\ \lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta\,\delta \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\gamma}}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^{\delta}} \left[\begin{matrix} \beta\,\gamma \\ \alpha \end{matrix} \right] - g_{\alpha\lambda} \left\{ \begin{matrix} \beta\,\gamma \\ \kappa \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \kappa\,\delta \\ \lambda \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta\,\gamma \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\delta}}$$

sau,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \left[\begin{matrix} \beta\,\delta \\ \alpha \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}} \left[\begin{matrix} \beta\,\lambda \\ \alpha \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} \beta\,\delta \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} \alpha\,\gamma \\ \lambda \end{matrix} \right] + \left\{ \begin{matrix} \beta\,\gamma \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\,\delta \\ \lambda \end{matrix} \right\} .$$

Scriind desvoltat primii doi termeni, obţinem

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}\, \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\, \partial x^{\beta}} \right) -$$

Ceilalţi termeni neschimbaţi.

sau,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}\, \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\, \partial x^{\beta}} \right) -$$

(28)

$$- g^{\lambda k} \left[\begin{matrix} \beta\,\delta \\ k \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \alpha\,\gamma \\ \lambda \end{matrix} \right] + g^{\lambda k} \left[\begin{matrix} \beta\,\gamma \\ k \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \alpha\,\delta \\ \lambda \end{matrix} \right] .$$

Pus sub această formă, proprietăţile acestui tensor pot fi uşor verificate :

(29)

1. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = - R_{\alpha\beta\delta\gamma}$;
2. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = - R_{\beta\alpha\gamma\delta}$;
3. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = + R_{\gamma\delta\alpha\beta}$
4. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Numărul componentelor independente este $\frac{1}{12}\, n^2 (n^2 - 1)$.

252. Tensorul contractat al lui Ricci-Einstein. Contractând tensorul lui RIEMANN-CHRISTOFFEL, dat de formulua (26), prin raport cu indicii α şi δ, obţinem un tensor nou de ordinul al doilea:

$$R_{\beta\gamma} = R^{\lambda}{}_{\beta\gamma\lambda} .$$

Explicit, acest tensor se scrie (punând în evidenţă indicii de sumare):

$$R_{\beta\gamma} = \sum_{\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \begin{Bmatrix} \beta\ \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \begin{Bmatrix} \beta\ \gamma \\ \lambda \end{Bmatrix} \right] + \sum_{\lambda,\, k} \left[\begin{Bmatrix} \beta\ \lambda \\ k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k\ \gamma \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta\ \gamma \\ k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k\ \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} \right],$$

sau,

$$(30) \qquad R_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\gamma}} (\log \sqrt{|g|}) - \begin{Bmatrix} \beta\ \gamma \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{k}} (\log \sqrt{|g|}) - \\ - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \begin{Bmatrix} \beta\ \gamma \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta\ \lambda \\ k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k\ \gamma \\ \lambda \end{Bmatrix} ;$$

numit *tensorul de curbură* al lui RICCI-EINSTEIN. El este de importanţă capitală în teoria relativistică a gravităţii, fiind *singurul* tensor care se poate obţine din $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ prin contracţie. In adevăr, făcând $\alpha = \gamma$, obţinem acelaş tensor contractat, $-R^{\gamma}{}_{\beta\gamma\delta}$ fiind simetric în γ şi δ; apoi, dacă facem $\alpha = \beta$, obţinem un tensor identic nul, căci

$$R^{\alpha}{}_{\alpha\gamma\delta} = g^{\alpha k} R_{\alpha\beta\gamma k} = 0 ,$$

deoarece ultimul tensor e antisimetric în α şi k.

Este uşor de verificat că

$$R_{\beta\gamma} = R_{\gamma\beta} .$$

253. Invariantul de curbură. Prin ridicarea unui indice, deducem, din (30),

$$(31) \qquad R^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\alpha\gamma} R_{\beta\gamma} .$$

Prin contractare, se obţine *invariantul de curbură*

$$(32) \qquad R = R^{\beta}{}_{\beta} = g^{\beta\gamma} R_{\beta\gamma} ,$$

$$R = \sum_{\beta\gamma\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left\{ \begin{matrix} \beta\ \lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{matrix} \beta\ \gamma \\ \lambda \end{matrix} \right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_k \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda\ \beta \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k\ \gamma \\ \lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta\ \gamma \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k\ \lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} \right) \right] .$$

Tensorul lui RICCI-EINSTEIN şi invariantul de curbură sunt fundamentali pentru formularea legii mecanicii relativistice în teoria relativităţii generale.

254. Identităţile lui Bianchi. 1. Dacă ne referim la un sistem de cordonate geodezic (pentru care simbolii lui CHRISTOFFEL sunt nuli) într'un punct P, se verifică imediat identitatea

$$D_\varepsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} + D_\gamma R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} + D_\delta R_{\alpha\beta\varepsilon\gamma} = 0 , \tag{33}$$

întrucât, într'un sistem geodezic, derivatele covariante se reduc (local) la derivatele ordinare. Relaţia precedentă este, repetăm, adevărată în punctul P, pentru un sistem de coordonate geodezic. Dar această ecuaţie *tensorială,* odată verificată într'un sistem de coordonate, va fi adevărată pentru oricare alt sistem de coordonate: membrul întâi îşi va păstra caracterul de tensor, de cinci ori covariant, în orice sistem de coordonate.

Putem scrie, prin ridicarea indicilor, pentru (33),

$$D_\varepsilon R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + D_\gamma R^{\alpha\beta}{}_{\delta\varepsilon} + D_\delta R^{\alpha\beta}{}_{\varepsilon\gamma} = 0 .$$

Efectuând contracţia $\alpha = \delta$, rezultă

$$D_\varepsilon R^{\beta}{}_{\gamma} - D_\gamma R^{\beta}{}_{\varepsilon} + D_\alpha R^{\alpha\beta}{}_{\varepsilon\gamma} = 0 .$$

Contractând apoi pe $\beta = \gamma$, urmează

$$D_\varepsilon R - D_\beta R^{\beta}{}_{\varepsilon} - D_\alpha R^{\alpha}{}_{\varepsilon} = 0 ;$$

ceeace se mai poate scrie

$$\frac{1}{2} D_\varepsilon R - D_\alpha R^{\alpha}{}_{\varepsilon} = 0 ;$$

sau, în definitiv,

$$D_\alpha \left(R^{\alpha}{}_{\varepsilon} - \frac{1}{2} g^{\alpha}{}_{\varepsilon} R \right) = 0 . \tag{34}$$

Această formulă exprimă legea fundamentală a Mecanicii în teoria relativităţii generale: *divergenţa tensorului* $R^{\beta}{}_{\alpha} - {}^1\!/_2\, g^{\beta}{}_{\alpha} R$

este nulă. Această lege va permite să exprimăm condiția de *conservare a tensorului impuls-energie* în Universul relativistic. (1) (V. § 284 și 285).

255. Interpretare geometrică a tensorului de curbură Riemann-Christoffel : *deplasarea unui vector la distanță finită ; cazul de integrabilitate.*

1. *Deplasarea unui vector.* După formula (11) § 246, condiția deplasării paralele a unui vector t^s se scrie

$$(36) \qquad Dt^s = dt^s + \Gamma^s_{mn}\, t^n\, dx_m = 0 \; ; \text{ cu } \Gamma^s_{mn} = \begin{Bmatrix} m\ n \\ s \end{Bmatrix} ;$$

așadar,

$$(37) \qquad dt^s = - \Gamma^s_{mn}\, t^n\, dx^m = f^s_m\, dx^m \, .$$

Să continuăm deplasarea mai departe, astfel încât vectorul să fie transportat dealungul unui contur închis, determinat de o curbă *(C)*. In acest scop, să efectuăm integrala lui dt^s dealungul curbei *(C)*. După teorema lui STOKES, avem

$$\oint_C f^s_m\, dx^m = \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial f^s_n}{\partial x^m} - \frac{\partial f^s_m}{\partial x^n} \right) d\sigma^{mn} \, ,$$

unde *(S)* este o suprafață regulată, arbitrară, sprijinită pe curba *(C)*.

Dacă rotorul

$$(38) \qquad r^s_{mn} = \frac{\partial f^s_n}{\partial x^m} - \frac{\partial f^s_m}{\partial x^n}$$

este nul, deplasarea este *integrabilă.* Aceasta înseamnă că sistemul de ecuații diferențiale, dedus din ecuațiile (36).

$$(39) \qquad \frac{dt^s}{dx^m} + \begin{Bmatrix} m\ n \\ s \end{Bmatrix} t^n = 0$$

este complet integrabil, și permite, deci, determinarea univocă a funcțiilor t^s, după ce s'a dat valoarea lor numerică într'un punct inițial oarecare. Se știe că, în adevăr, condițiile pentru ca sistemul diferențial precedent să fie complet integrabil este ca derivatele

1. Este clar că tensorii definiți mai sus își găsesc aplicare în teoria relativității generale, — după cum am amintit în diferite rânduri, — numai după ce aceste definiții vor fi extinse și precizate în spațiile riemanniene ; ceeace vom face în capitolul următor.

secunde, luate în ordine inversă, să fie identice; ceeace rezultă din anularea primului membru al relației (25).

In caz contrar avem, prin definiție,

$$r^s{}_{mn} = t^k \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^s{}_{km} - \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma^s{}_{kn} \right) + \Gamma^s{}_{km} \frac{\partial t^k}{\partial x^n} - \Gamma^s{}_{kn} \frac{\partial t^k}{\partial x^m} ;$$

sau, prin schimbarea ordinii unor indici curenți și având în vedere relația (36),

$$r^s{}_{mn} = \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^s{}_{km} - \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma^s{}_{kn} - \Gamma^s{}_{pm} \Gamma^p{}_{kn} + \Gamma^s{}_{pn} \Gamma^p{}_{km} \right) t^k .$$

Comparând relația precedentă cu relația (26), deducem

$$r^s{}_{mn} = t^k . R^s{}_{kmn} .$$

După parcurgerea unui circuit complet pe curba închisă (C), tensorul t^k revine în punctul de plecare inițial după ce a suportat variația, diferită de zero,

$$\delta t^\delta = - \frac{1}{2} \int_S R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} t^\alpha d\sigma^{\beta\gamma} . \tag{40}$$

Așadar, deplasarea unui vector pe un circuit închis ne redă vectorul inițial. Deplasarea este integrabilă, — adică, regăsim vectorul inițial, — numai dacă tensorul lui RIEMANN-CHRISTOFFEL este nul.

Pentru componentele covariante, variația suferită prin deplasare pe un circuit închis, este

$$\delta t_\alpha = + \frac{1}{2} \int_S R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} t_\delta d\sigma^{\beta\gamma} . \tag{40'}$$

Faptul că valoarea finală a unui vector, transportat dealungul unui circuit închis, cu care revine în punctul de plecare, depinde de drumul străbătut, — după cum am constatat mai sus, — ne conduce la justificarea și precizarea afirmației făcute, după care succesiunea derivărilor nu este permutabilă; așadar, în general,

$$D_\beta (D_\gamma t_\alpha) - D_\gamma (D_\beta t_\alpha) \neq 0 .$$

și anume, după cum am demonstrat,

$$\begin{aligned} D_\beta (D_\gamma t_\alpha) - D_\gamma (D_\beta t_\alpha) &= t_\delta R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} ; \\ D_\beta (D_\gamma t^\alpha) - D_\gamma (D_\beta t^\alpha) &= - t^\delta R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} . \end{aligned} \tag{41}$$

secunde, luate în ordine inversă, să fie identice; ceeace rezultă din anularea primului membru al relației (25).

In caz contrar avem, prin definiție,

$$r^s{}_{mn} = t^k \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^s{}_{km} - \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma^s{}_{kn} \right) + \Gamma^s{}_{km} \frac{\partial t^k}{\partial x^n} - \Gamma^s{}_{kn} \frac{\partial t^k}{\partial x^m} ;$$

sau, prin schimbarea ordinii unor indici curenți și având în vedere relația (36),

$$r^s{}_{mn} = \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^s{}_{km} - \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma^s{}_{kn} - \Gamma^s{}_{pm} \Gamma^p{}_{kn} + \Gamma^s{}_{pn} \Gamma^p{}_{km} \right) t^k .$$

Comparând relația precedentă cu relația (26), deducem

$$r^s{}_{mn} = t^k . R^s{}_{kmn} .$$

După parcurgerea unui circuit complet pe curba închisă (C), tensorul t^k revine în punctul de plecare inițial după ce a suportat variația, diferită de zero,

$$\delta t^\delta = - \frac{1}{2} \int_s R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} t^\alpha \, d\sigma^{\beta\gamma} . \tag{40}$$

Așadar, deplasarea unui vector pe un circuit închis ne redă vectorul inițial. Deplasarea este integrabilă, — adică, regăsim vectorul inițial, — numai dacă tensorul lui RIEMANN-CHRISTOFFEL este nul.

Pentru componentele covariante, variația suferită prin deplasare pe un circuit închis, este

$$\delta t_\alpha = + \frac{1}{2} \int_s R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} t_\delta \, d\sigma^{\beta\gamma} . \tag{40'}$$

Faptul că valoarea finală a unui vector, transportat dealungul unui circuit închis, cu care revine în punctul de plecare, depinde de drumul străbătut, — după cum am constatat mai sus, — ne conduce la justificarea și precizarea afirmației făcute, după care succesiunea derivărilor nu este permutabilă; așadar, în general,

$$D_\beta (D_\gamma t_\alpha) - D_\gamma (D_\beta t_\alpha) \neq 0 .$$

și anume, după cum am demonstrat,

$$\begin{aligned} D_\beta (D_\gamma t_\alpha) - D_\gamma (D_\beta t_\alpha) &= t_\delta R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} ; \\ D_\beta (D_\gamma t^\alpha) - D_\gamma (D_\beta t^\alpha) &= - t^\delta R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} . \end{aligned} \tag{41}$$

2. *Deplasarea unui tensor* se deduce cu uşurinţă din rezultatul găsit mai sus pentru componentele vectoriale. In adevăr putem exprima componentele tensoriale prin produse de componente vectoriale; de exemplu:

$$t^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = a^{\alpha}\, b_{\beta}\, c_{\gamma}\,.$$

Aplicând rezultatele precedente membrului al doilea al relaţiei de mai sus, obţinem

$$(42)\qquad \delta\, t^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\int_{s} \left(- R^{\alpha}{}_{\varepsilon\mu\nu}\, t^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma} + R^{\varepsilon}{}_{\beta\mu\nu}\, t^{\alpha}{}_{\varepsilon\gamma} + R^{\varepsilon}{}_{\gamma\mu\nu}\, t^{\alpha}{}_{\beta\varepsilon} \right) d\sigma^{\mu\nu}\,.$$

256. Curbura spaţiului. Să rezumăm concluziile ce putem trage din proprietăţile esenţiale ale tensorului lui RIEMANN-CHRISTOFFEL:

1. Deplasarea la distanţă finită a tensorilor este în strânsă legătură cu existenţa tensorului lui R.-CHR.

2. Acest tensor este antisimetric în ultimii doi indici inferiori: intervertirea deplasărilor dx^m şi dx^n (v. Formula (36)), înseamnează inversarea sensului de circulaţie pe curba închisă (C), dealungul căreia se face deplasarea.

3. Relaţiile de simetrie cilindrică (§ 249)

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} = 0\,,$$

se datoresc simetriei simbolilor lui CHRISTOFFEL şi se obţin prin permutările circulare ale indicilor inferiori.

Aceste proprietăţi ale tensorului lui RIEMANN-CHRISTOFFEL pot să fie interpretate drept proprietăţi de-ale *spaţiului* însuşi în care este definit tensorul. Exemplul următor lămureşte această afirmaţie [1]).

Fie un spaţiu cu două dimensiuni, de *curbură nenulă:* suprafaţa unei sfere. Liniile geodezice ale acestui „spaţiu curb" sunt, precum se ştie şi se poate verifica uşor, cercurile mari ale sferei; în adevăr, vectorul tângent la un cerc mare (vectorul viteză al unui mobil ce s'ar mişca liber pe un cerc mare), se deplasează rămânând mereu paralel cu el însuşi: face unghiul zero cu traiectoria (cercul mare).

Prin urmare, în general, deplasarea paralelă pe o geodezică

1) După exemplul dat de L. BRILLOUIN; p. 91.

a suprafeței sferice, se definește prin condiția: vectorul să facă un unghi constant cu cercul mare dealungul căruia este deplasat.

Să pornim, așadar, din punctul A_0 de pe ecuator, cu vectorul $\bar{a} = \overrightarrow{A_0 T}$, tangent la cercul mare E (ecuatorul), în sensul pozitiv, ales de noi, până ajungem în punctul A_1 pe meridianul (C_1), care face unghiul θ cu meridianul (C_0) al punctului A_0. In punctul A_1 vectorul va face unghiul $\frac{\pi}{2}$ cu meridianul (C_1). Deplasând mai departe, vectorul, pe meridianul (C_1), spre polul nord P (în sensul ales ca pozitiv), vectorul $\bar{a}$ va rămâne mereu perpendicular pe (C_1), până în P. In acest punct vectorul $\bar{a}$ face unghiul $\frac{\pi}{2} - \theta$ cu meridianul (C_0). Continuăm deplasarea pe (C_0) sub condiția ca vectorul să facă mereu unghiul $\frac{\pi}{2} - \theta$ cu (C_0), până ajungem în punctul A_0 de plecare.

Este clar că în poziția finală $\overrightarrow{A_0 T_f}$, vectorul va face unghiul θ cu poziția sa inițială $\overrightarrow{A_0 T_i}$.

Plasându-ne, pentru simplificare, în *spațiul tridimensional* și căutând să interpretăm rezultatele precedente, suntem conduși să tragem concluzia: variația vectorului, din poziția inițială până în poziția finală, este datorită *curburii* suprafeței sferice, — curbură, care poate fi evidențiată față de spațiul tridimensional în care este plasat spațiul bidimensional considerat. Dar, cum numita variație este în strânsă legătură cu expresia tensorului lui RIEMANN-CHRISTOFFEL, urmează că acest tensor este menit să caracterizeze starea de curbură a spațiului considerat.

Pe de altă parte, invariantul de curbură R (§ 234) este extensiunea „Curburii lui Gauss“ (§ 83), și exprimă, în fiecare punct, *curbura totală* (compară § 274).

In cazul unui *spațiu euclidian*, condiția de integrabilitate se scrie

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \equiv 0 .$$

Am stabilit, prin aceasta, *teorema*: „într'un spațiu euclidian, în care am ales axe generale de coordonate (pentru motive oa-

recare), tensorul de curbură al lui R.-CHR. este nul". (Condiția este necesară).

Reciproca este adevărată: „dacă tensorul lui R.-CHR. este identic nul, spațiul este euclidian". (Condiția este suficientă).

Aceasta însemnează că, dacă tensorul R.-CHR. este identic nul, putem efectua o transformare de variabile care să aducă forma metrică fundamentală la o formă cu coeficienți constanți.

In adevăr, dacă condițiile de integrabilitate sunt satisfăcute, după ecuațiile (39) vom putea determina, în spațiul, pe care, pentru generalitate îl luăm N-dimensional, un număr de N vectori $t(\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \ldots N$) legați de un punct din spațiu, astfel încât, ei să se reducă la N vectori arbitrari, liniar independenți, într'un punct arbitrar, ales ca origină.

Dacă există un sistem geodezic x^{*s}, curbele de coordonate ale acestui sistem sunt drepte, care alcătuesc, în orice punct din spațiu, un unghi poliedral cu N muchi, — pe care le putem identifica cu cei N vectori precedent determinați. Pentru aceasta este suficient să punem

$$\frac{\partial x^r}{\partial x^{*s}} = t^r(s) .$$

Obținem, astfel, un nou sistem de ecuații diferențiale, complet integrabil. In adevăr, avem

$$(43) \quad \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{*s}\ \partial x^{*k}} = \frac{\partial t^r(s)}{\partial x^m}\ \frac{\partial x^m}{\partial x^{*k}} = -\begin{Bmatrix} n\ m \\ r \end{Bmatrix} t^n(s)\ t^m(k) .$$

De unde, din cauza simetriei,

$$\frac{\partial^2 x^r}{dx^{*s}\ \partial x^{*k}} = \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{*k}\ \partial x^{*s}} .$$

Sistemul precedent permite să determinăm univoc o schimbare de variabile

$$x^r = f^r(x^{*1}, x^{*2}, \ldots x^{*n}) ,$$

unde x^r se reduc la cantități date de mai înainte, pentru valori inițiale ale variabilelor x^{*s}; determinantul funcțional al transformării fiind diferit de zero.

In acest nou sistem de variabile, toți g^*_{sk} sunt constanți. In adevăr, formulele lui CHRISTOFFEL

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{*s}\ \partial x^{*k}} + \left\{ \begin{matrix} m\ n \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^m}{\partial x^{*s}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{*k}} = \left\{ \begin{matrix} s\ k \\ p \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial x^r}{\partial x^{*p}} ,$$

se reduc, dacă ţinem seamă de ecuaţiile (43), la

$$\left\{ \begin{matrix} s\ k \\ p \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial x^r}{\partial x^{*p}} = 0 .$$

Aşa dar, simbolii lui CHRISTOFFEL sunt identic nuli; deci derivatele parţiale $\frac{\partial g^*_{sk}}{\partial x^{*r}}$ sunt nule, şi, prin urmare, tensorul metric fundamental g^*_{sk} este constant.

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{*s}\ \partial x^{*k}} + \left\{ \begin{matrix} m\ n \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^m}{\partial x^{*s}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{*k}} = \left\{ \begin{matrix} s\ k \\ p \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial x^r}{\partial x^{*p}} ,$$

se reduc, dacă ţinem seamă de ecuaţiile (43), la

$$\left\{ \begin{matrix} s\ k \\ p \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial x^r}{\partial x^{*p}} = 0 .$$

Aşa dar, simbolii lui CHRISTOFFEL sunt identic nuli; deci derivatele parţiale $\frac{\partial g^*_{sk}}{\partial x^{*r}}$ sunt nule, şi, prin urmare, tensorul metric fundamental g^*_{sk} este constant.

CAP. VI

Tensori în spațiile lui Riemann. (1)

257. Considerații generale. In cap. V am desvoltat analiza tensorială într'un spațiu eucludian cu n dimensiuni, admițând, pentru generalitate, că mărimile care au fost definite se refereau la un sistem de coordonate general (curbiliniu).

In § 241 am precizat faptul important, care trebue reținut și pentru ceeace urmează, că într'o multiplicitate n-dimensională, în care ne raportăm la sisteme de coordonate generale, tensorii nu pot fi comparați decât „local", — într'o regiune infinit vecină unui punct al multiplicității.

In aceste condiții, toate relațiile tensoriale stabilite în capitolele precedente (până la restricții, pe care le vom specifica la timp) sunt valabile și în spații neeuclidiene, — după cum vom preciza și justifica pe larg în cele ce urmează.

Vom considera, în primul rând, un spațiu riemannian : „într'un spațiu riemannian, forma patratică omogenă, nereductibilă

$$ds^2 = g_{rk}\, dx^r\, dx^k, \tag{1}$$

are coeficienți simetrici $g_{rk} = g_{kr}$ (ceeace nu restrânge generalitatea) funcții continue, cu derivate continue, de coordonatele punctului (x^r) al multiplicității, în care am ales sistemul de coordonate general la care ne referim".

---

(1) v. HERMANN WEYL, *Raum. Zeit. Materie.* 1921.
W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie*, I, II. 1923.
L. BIANCHI, *Lezzioni di geometria differenziale*, I, II, 1927.
L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, 1926.
MAX V LAUE, *Relatioitätstheorie*, II, 1923.
P. APPELL, *Mécanique rationnelle*, v. V, 1933.
J. BECQUEREL, *Principe de la relatioité*, 1922.

Scanned with OKEN Scanner

Studiul tensorilor într'un spaţiu riemannian, poate fi atacat prin două metode. Una se datoreşte, în general, lui T. LEVI-CIVITA: se consideră spaţiul riemannian drept o multiplicitate introdusă într'un spaţiu euclidian cu un număr mai mare de dimensiuni. Prin aceasta, studiul revine la acela al *varietăţilor neliniare* dintr'un spaţiu euclidian. Acest punct de vedere se găseşte exemplificat prin consideraţiile dela § 254 asupra spaţiului curb sferic (cu două dimensiuni) introdus în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni.

A doua metodă, se datoreşte, în deosebi, lui H. WEYL: într'o regiune infinit mică din vecinătatea unui punct al unui spaţiu riemannian, spaţiul poate fi considerat ca euclidian. „Propagarea" acestui spaţiu infinitesimal (liniar) spre o regiune vecină este posibilă prin proprietatea de continuitate a coeficienţilor g_{rk}, şi se defineşte prin natura *conexiunii* ce se stabileşte între două domenii infinitesimal vecine. Această concepţie „locală", adecvată şi conformă spiritului Fizicii câmpurilor, se ilustrează prin noţiunea curentă din Fizică: „propagarea din aproape în aproape" a fenomenelor fizice (v. *Electromagnetismul*).

In cele ce urmează vom introduce, mai întâi, concepţia lui WEYL, deoarece ea oferă posibilităţi de înţelegere mai profundă a legăturii dintre noţiunea geometrică a spaţiului riemannian şi sensul fifzic care trebue atribuit fenomenelor naturale localizate în astfel de spaţii, precum şi a fenomenelor care sunt o „emanaţie a metricei spaţiului" (v. Partea IV, *Teoria relativităţii generalizate*). In al doilea rând, vom face coordonarea cu conceptul lui LEVI-CIVITA în scopul clarificării formalismului algebric al calculului tensorial.

258. Noţiunea de spaţiu riemannian. O multiplicitate n-dimensională este caracterizată prin faptul că un element al ei poate fi determinat când se cunosc valorile a n „coordonate, drept funcţii continue de poziţie, în interiorul multiplicităţii".

Nu este însă necesar ca *întreaga* multiplicitate, cu toate elementele ei, să fie reprezentate univoc şi reciproc prin sistemul de valori ale coordonatelor, ci este suficient ca această proprietate să fie satisfăcută doar în vecinătatea infinit de mică a unui punct dat al multiplicităţii, — aşa cum se întâmplă în geometria pe o sferă, de exemplu.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru studiul analitic al unei multiplicități, pe care o presupunem continuă, este necesar să se stabilească *invarianții* multiplicității față de transformări generale de coordonate, continue. Exemple pentru acest procedeu am întâlnit în *Geometria suprafețelor*, pentru care GAUSS și alții, au pus în evidență proprietăți care nu depind de așezarea particulară pe care o ocupă suprafața în spațiu; ea consistă numai în relațiile ce se pot stabili prin măsurători efectuate pe suprafața însăși". O astfel de proprietate este formulată prin *theorema egregium*, pe care am demonstrat'o la § 87: „curbura suprafeței este determinată numai de coeficienții formei patratice fundamentale și de derivatele lor prime și secunde".

Noțiunea de spațiu riemannian se definește astfel: „un spațiu riemannian cu n dimensiuni este o multiplicitate n-dimensională, posedând o metrică determinată de forma patratică [1]) omogenă (1)".

Forma patratică (1), care exprimă patratul lungimii elementului diferențial, poate fi scrisă numai dacă se admite că pentru două puncte infinit vecine deale multiplicității, *teorema lui* PYTHAGORA este riguros adevărată: ea exprimă patratul distanței infinitesimale dintre cele două puncte. Pentru puncte la distanță finită nu avem nimic analog.

Cele două legi fundamentale la care trebue să satisfacă forma (1), pentru a determina toate mărimile multiplicității riemanniene, (adică, nu numai lungimile, ci și volumele, precum și unghiurile) sunt, după WEYL:

1. Dacă $g = |g_{rk}|$ este determinantul, diferit de zero, al coeficienților, expresia

$$\int \sqrt{|g|}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n , \tag{2}$$

integrala fiind extinsă la un domeniu închis al variabilelelor x^r, este un invariant al multiplicității, și exprimă volumul porțiunii din spațiu închisă de domeniul considerat.

---

1) In spațiile lui RIEMANN (sferic, eliptic) forma (1) e *pozitiv* definită; cum noi vom avea adeseori nevoe să ne referim la cazul particular al spațiului pseudoeuclidian al relativității restrânse, lăsăm formei (1) posibilitatea de a fi „nedefinită".

2. Dacă $Q(d, \delta)$ este forma biliniară (simetrică) corespunzătoare formei patratice (1), două elemente liniare determinate prin variațiile d și δ, fac între ele un unghi θ dat de relația

$$\cos\theta = \frac{Q(d, \delta)}{Q(d, d)\, Q(\delta, \delta)}. \tag{3}$$

O multiplicitate m-dimensională ($1 \leqq m \leqq n$) așezată într'un spațiu definit mai sus, este susceptibilă de o reprezentare parametrică

$$x^r = x^r(u_1, u_2, \ldots u_m) \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

astfel încât forma diferențială fundamentală a acestei multiplicități m-dimensionale se obține înlocuind în (1) diferențialele dx^r prin

$$dx^r = \frac{\partial x^r}{\partial u_k}\, du_k. \tag{5}$$

Această nouă multiplicitate m-dimensională, devine, la rândul ei, un spațiu riemannian.

Câteva exemple de spații riemanniene simple am întâlnit, fără a specifica aceasta, când am stabilit cele câteva proprietăți de geometrie a suprafețelor, unde am scris și expresiile corespunzătoare ale formei patratice fundamentale ds^2 pentru aceste spații curbe.

Geometria riemanniană admite că *se pot compara, între ele, lungimile a două elemente liniare situate în două puncte la distanță finită, ale multiplicității.* WEYL observă că această proprietate inclusă în conceptul riemannian, este prea largă pentru o geometrie infinitesimală „pură". In limbajul unei astfel de geometrii, nu se poate vorbi decât de posibilitatea „transportului unui etalon al lungimilor" dela un punct la altul *infinit vecin.*

Reducând noțiunea statică de „metrică" a unui spațiu, la noțiunea dinamică de „transport", WEYL a observat că se poate defini un câmp tensorial într'o multipticitate oarecare, fără a fi nevoe de introducerea prealabilă a unei metrici. Așa, se poate construi o teorie a tensorilor într'o *geometrie afină* sau *geometrie liniară*, în care, bine înțeles, nu se mai poate vorbi de „lungimea" unui element liniar (ci, doar, de *raportul* lungimilor a două elemente liniare localizate în același punct al multiplicității), și nici de unghiuri sau volume.

Astfel de multiplicități afine (liniare) pot fi, prin urmare,

localizate în fiecare punct al unei multiplicităţi oarecare, *fără însă a putea face a priori, să se corespundă între ele două multiplicităţi afine localizate în două puncte la distanţă finită.*

In aceste condiţii, spunem că ne găsim în stadiul de *continuu amorf.*

259. Continuu amorf. Noţiunea generală de tensor. Fie o multiplicitate oarecare cu n dimensiuni. Un punct P se exprimă printr'un sistem de n valori date celor n coordonate $x^1, x^2, \ldots x^n$, faţă de un anumit sistem de coordonate. Fie un al doilea sistem de coordonate $x^{*1}, x^{*2}, \ldots x^{*n}$. Legătura dintre aceste două sisteme de coordonate este stabilită de relaţii generale, de forma

$$x^r = f_r\,(x^{*1}, \ldots x^{*n}) \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{6}$$

unde funcţiile f_r sunt continue, posedând derivate continue

$$x^r{}_{*k} = \frac{\partial f_r}{\partial x^{*k}} ,$$

al căror determinant funcţional este presupus diferit de zero, pentru ca transformarea să fie reciprocă.

In aceste condiţii, un *element liniar* în P se transformă după legea cunoscută

$$dx^{*r} = x^{*r}{}_s\, dx^s ; \qquad dx^r = x^r{}_{*s}\, dx^s , \tag{7}$$

dacă neglijăm infiniţii mici de ordin superior în diferenţialele variabilelor.

Substituind infiniţilor mici dx^r cantităţi finite (proporţionale) u^r obţinem componentele unui vector în P, care se bucură, în vecinătatea punctului P, de toate proprietăţile vectorilor în spaţiile liniare.

In general, putem defini, *într'un punct P*, un vector sau un tensor drept „o formă liniară de mai multe serii de variabile, care depinde de sistemul de coordonate la care raportăm vecinătatea lui P". In această regiune infinitesimală, vectorii şi tensorii, astfel definiţi, se bucură de toate proprietăţile stabilite până acum pentru spaţiile liniare. (Cap. V).

Continuul amorf este alcătuit, deci, dintr'o infinitate de multiplicităţi afine, fără contingenţe reciproce, atâta vreme cât nu s'a

stabilit o lege de legătură, sau de „deplasare“ a acestor multiplicităţi afine, în interiorul continuului.

260. Multiplicitate cu conexiune afină. Deplasare paralelă. Pentru a depăşi stadiul de „amorfism“, este evident, necesar să se stabilească o lege de circulaţie dela un punct la altul, pentru multiplicitatea afină localizată. WEYL introduce, în acest scop, noţiunea de *conexiune afină*, care exprimă, de fapt, o lege de *propagare* (a proprietăţilor geometrice) dintr'un punct determinat $P\ (x^1, x^2, \ldots x^n)$ până la un punct $P'\ (x^1+dx^1, \ldots x^n+dx^n)$, *infinit vecin.*

Spunem că punctele P şi P' „se găsesc în conexiune afină“, dacă ştim în ce vector se transformă un vector localizat în P când îl transportăm, printr'o *deplasare paralelă*, în P'. Să definim această noţiune (compară cu § 246).

Operaţia de deplasare paralelă trebue să fie *continuă* şi *comutativă.*

Fie $u^r\ (P)$ componentele contravariante ale unui vector localizat în P, şi $u^r\ (P')$ ceeace devine acest vector după „deplasare paralelă“ în P'. Corespondenţa fiind afină, componentele lui $u^r\ (P')$ nu pot depinde decât liniar de componentele lui $u^r(P)$. Aşadar, propagarea se va efectua după o lege, care poate fi pusă sub forma

$$u^r\ (P') = u^r\ (P) - G^r_s\ (P, P')\ u^s\ (P)\ , \tag{8}$$

unde $G\ (P, P')$ este o funcţie de coordonatele ambelor puncte P şi P', care trebue să satisfacă celor două condiţii preconizate:

1. *Condiţia de continuitate.* Dacă P' se confundă cu P, cei doi vectori trebue să se confunde; aşadar,

$$G^r_s\ (P, P) \equiv 0\ .$$

Desvoltarea acestei funcţii în vecinătatea lui P trebue să fie de forma

$$G^r_s\ (P, P') = \Gamma^r_{sk}\ (P)\ dx^k + \ldots$$

unde Γ^r_{sk} sunt nişte funcţii continue de coordonatele punctului P. Oprind desvoltarea la termeni de primul ordin, expresia (8) devine

$$u^r\ (P') = u^r\ (P) - \Gamma^r_{sk}\ (P)\ .\ u^s\ (P)\ .\ dx^k\ . \tag{9}$$

2. *Condiția de comutativitate.* Să aplicăm operația (9) vectorului infinitesimal $\overrightarrow{PQ}$ de componente δx^r. Deplasat paralel în P', acest vector va avea componentele (după 9)

$$\delta x^r - \Gamma^r_{sk}\, \delta x^s\, dx^k .$$

Extremitatea sa Q va ajunge în punctul Q' de coordonate

$$x^r + dx^r + \delta x^r - \Gamma^r_{sk}\, \delta x^s\, dx^k .$$

Dacă deplasăm acum paralel vectorul $\overrightarrow{PP'}$ de componente dx^r din P în Q, extremitatea sa Q'_1 va avea coordonatele

$$x^r + \delta x^r + dx^r - \Gamma^r_{ks}\, dx^k\, \delta x^s .$$

Dacă facem ipoteza că punctele Q' și Q'_1 se confundă, deci dacă admitem *legea paralelogramului*, rezultă relațiile de simetrie

$$\Gamma^r_{sk} = \Gamma^r_{ks} . \tag{10}$$

Observăm, însă, că aceste condiții de simetrie nu sunt necesare, după cum a arătat E. CARTAN (v. § 246). Acest autor, făcând abstracție de condiția simetriei, admisă de LEVI-CIVITA, a reușit să cunstruiască niște spații mai generale, numite *spații cu torsiune*, luând drept coordonate „relative" ale punctului P' față de P, diferențialele dx^r (sau combinații liniare și omogene). CARTAN definește drept *tensor al torsiunii* câtimea, diferită de zero,

$$\frac{1}{2}\,(\Gamma^r_{ks} - \Gamma^r_{sk}) = T^r_{ks} .$$

Câtimile Γ^r_{ks} sunt numite și *componentele conexiunii afine*; simetria lor este echivalentă cu ipoteza existenței, în fiecare punct, a unui sistem de *coordonate geodezic*. Raportată la un astfel de sistem de coordonate, deplasarea paralelă lasă vectorii nealterați până la infiniți mici de ordinul al doilea; deci, pentru un sistem geodezic, trebue să avem $\Gamma^{*r}_{sk} = 0$; relația (9) se reduce la

$$u^{*r}\,(P') = u^{*r}\,(P) .$$

Trecând dela sistemul geodezic la un alt sistem oarecare de coordonate $(x^{*r} \longrightarrow x^r)$, avem, după legile de transformare (7)

$$u^{*r}\,(P) = x^{*r}_{\ s}\,(P)\, u^s\,(P) ;$$

$$u^{*r}\,(P') = x^{*r}_{\ s}\,(P')\, u^s\,(P') = \left\{x^{*r}_{\ s}\,(P) + x^{*r}_{\ sk}\,(P)\, dx_k + \ldots\right\} u^s\,(P') .$$

Rezultă

$$x^{*r}{}_s \cdot u^s(P') = x^{*r}{}_s\, u^s(P) - x^{*r}{}_{sk} \cdot u^s(P)\, dx^k .$$

Inmulțind amb'i membri cu $x^m{}_{*r}$ și contractând (sumăm pe r) rezultă

$$u^m(P') = u^m(P) - x^{*r}{}_{sk}\, x^m{}_{*r}\, u^s(P)\, dx^k .$$

Comparând această relație cu relația (9), urmează

$$\Gamma^m{}_{sk} = x^{*r}{}_{sk}\, x^m{}_{*r} , \tag{11}$$

relație, care evidențiază proprietatea de simetrie (10) în indicii (s, k) precum și echivalența acestei proprietăți cu existența unui sistem de coordonate geodezic.

Am stabilit în § 246, Nr. 1 (Cap. V), că expresia (11) se poate pune sub forma :

$$\Gamma^m{}_{sk} = - x^m{}_{*rp}\, x^{*r}{}_s\, x^{*p}{}_k . \tag{12}$$

Trebue reținut : câtimile Γ nu sunt componente tensoriale. In adevăr, expresiile lor „stau călare" pe *două* sisteme de coordonate (accentuate și neaccentuate) și nu satisfac legilor de transformare ale tensorilor. Este ușor de stabilit regulele de transformare ale câtimilor Γ, când trecem de la un sistem de coordonate (x^r) la alt sistem (x^{*r}). După legile de transformare a componentelor contravariante ale unui vector, avem, în P și P',

$$u^r(P) = x^r{}_{*s}\, u^{*s}(P) ;$$

$$u^r(P') = x^r{}_{*s}(P')\, u^{*s}(P') = \left\{ x^r{}_{*s}(P) + x^r{}_{*sk}\, dx^{*k} + \ldots \right\} u^{*s}(P') .$$

Inlocuind aceste valori în relația fundamentală (9), obținem

$$x^r{}_{*s}(P)\, u^{*s}(P') + x^r{}_{*sk}\, u^{*s}(P')\, dx^{*k} =$$

$$= x^r{}_{*s}(P)\, u^{*s}(P) - \Gamma^r{}_{pq}(P)\, x^p{}_{*s}(P)\, x^q{}_{*k}(P)\, u^{*s}(P)\, dx^{*k} .$$

Inmulțind ambii membrii ai egalității precedente cu $x_r{}^{*m}$ și contractând pe r, obținem până la infiniți mici de primul ordin prin raport cu diferențialele coordonatelor,

$$u^{*m}(P') = u^{*m}(P) - \left\{ \Gamma^r{}_{pq}\, x^p{}_{*s}\, x^q{}_{*k}\, x_r{}^{*m} + x^r{}_{*sk}\, x_r{}^{*m} \right\} u^{*s}\, dx^{*k}$$

relație, care înlocuește expresia (9) în noul sistem de coordonate. Este clar că suntem conduși să punem

$$\Gamma^{*m}{}_{sk} = \Gamma^r{}_{pq}\, x^p{}_{*s}\, x^q{}_{*k}\, x_r{}^{*m} + x^s{}_{*sk}\, x_r{}^{*m} . \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Legea de transformare (13) este identică formulelor de transformare a *simbolilor lui* CHRISTOFFEL de speța a doua (§ 240). Legea (13) pune în evidență că mărimile Γ nu sunt componente tensoriale (decât pentru transformări liniare). Observăm că nu se pot exprima mărimile Γ prin tensorul g_{rk}, deoarece nu am introdus încă metrica definită prin forma (1). Câtimile Γ sunt niște funcții de coordonate, continue și derivabile, cu derivate continue.

261. Deplasarea paralelă a unui vector covariant se definește pe baza proprietății cunoscută :

deplasând paralel simultan un vector contravariant și un vector covariant, produsul lor scalar rămâne invariant

$$0 = d\,(u^r v_r) = du^r.\ v_r + u^r.\ dv_r = (dv_r - \Gamma^s_{rk}\ v_r\ du^k)\ u^r$$

Rezultă, așadar, întrucât relația precedentă trebue să fie adevărată oricare ar fi vectorul u^r, că

$$dv_r = \Gamma^s_{rk}\ v_s\ dx^k ; \tag{14}$$

formulă, cunoscută din § 246, și care exprimă anularea derivatei covariante a componentelor covariante ale unui vector.

262. Linii geodezice. (Comp. § 239). Un câmp de vectori u^r se zice *staționar* în P, dacă vectorii dintr'un punct infinit vecin P', provin din câmpul vectorial din P prin deplasare paralelă ; ceeace are loc totdeauna într'o multiplicitate afină. Un câmp staționar este, prin urmare, definit de ecuațiile

$$du^r + \Gamma^r_{sk}\ u^s\ dx^k = 0\ . \tag{15}$$

In imagina dinamică a spațiului, ne putem închipui că punctele vecine P' provin din punctul P printr'o deplasare infinitesimală, astfel încât P, în deplasarea lui, antrenează și un vector u^r localizat în acest punct, ca origină, prin deplasare paralelă, până în P'. In această imagină, putem considera coordonatele x^r ale lui P drept funcții de un parametru (de ex. timpul) în reprezentare parametrică *proprie*. Considerând vectorul u^r funcție de timp t, el va fi staționar în fiecare moment dat, dacă sunt satisfăcute ecuațiile

$$\frac{du^r}{dt} + \Gamma^r_{sk}\ u^s\ \frac{dx^k}{dt} = 0\ . \tag{16}$$

Primul membru al ecuației precedente exprimă variația vectorului u^r din punctul $P(t)$ până în punctul $P'(t+dt)$, în intervalul de timp dt. Să alegem vectorul

$$u^r = \frac{d\,x^r}{dt},$$

care exprimă viteza punctului P dacă acesta s'ar deplasa ca un mobil pe traiectoria (16). In aceste condiții, ecuația (16) devine

$$\frac{d^2\,x^r}{dt^2} + \Gamma^r_{sk}\,\frac{dx^s}{dt} = 0,$$

ceeace exprimă că variația vectorului „viteză", deci „accelerația" punctului pe traiectoria (17) este mereu nulă. Ori, curbele pentru care este satisfăcută această proprietate, sunt *curbe geodezice* în multiplicitatea afină considerată.

263. Curbura unei multiplicități afine. In § 255 am demonstrat că într'un spațiu euclidian, condițiile necesare și suficiente ale unei deplasări paralele prin „translație", sunt date de sistemul de ecuații diferențiale, complet integrabil

$$\frac{\partial\,u^s}{\partial x^m} + \left\{ \begin{matrix} m\,n \\ s \end{matrix} \right\} u^n = 0, \tag{18}$$

care permite determinarea univocă a funcțiilor u^s (componentele contravariante ale unui vector), în orice punct P' al multiplicității euclidiene, dacă se dă valorile lor în punctul inițial $P(x^m)$.

In acest caz, este permis a se vorbi despre *acelaș* vector în cele două puncte P și P'; putându-se trece dela unul la celălalt printr'o deplasare paralelă de-alungul unei curbe *oarecare*, care unește cele două puncte. Valorile în P și P' nu depind de curba aleasă, — ceeace ne conduce să afirmăm că o astfel de „deplasare paralelă" este o „translație".

In acest sens, putem spune că o multiplicitate liniară este susceptibilă de o *translație de ansamblu.*

După § 255, ecuațiile (18) exprimă condițiile de integrabilitate a deplasării paralele a unui vector dealungul unui circuit, la distanță finită. Prin urmare: *„integrabilitatea deplasării paralele a unui vector, este proprietatea prin care se pot distinge spațiile „liniare" în ansamblul multiplicităților cu conexiune afină.*

Tot în § 255 am observat că, reciproc, pentru o multiplicitate neliniară, deplasarea paralelă a unui vector nu este integrabilă; adică, valoarea finală depinde de curba aleasă, de-alungul căreia se efectuiază deplasarea; astfel încât, pe un circuit închis, nu ajungem în punctul de plecare cu aceiaşi valoare, sau direcţie iniţială.

In § 256, printr'un exemplu lămuritor, am constatat că, pornind dintr'un punct P cu un vector, de-alungul unui circuit închis, când revenim în punctul de plecare P, vectorul în poziţia sa finală face un unghi (diferit de zero) cu poziţia sa iniţială. Acest unghi caracterizează, într'o oarecare măsură, neliniaritatea multiplicităţii considerate, în care această proprietate are loc: avem deaface cu un *spaţiu curb.*

Formulele (40) şi (40') dela § 255, care nu presupun decât ecuaţiile paralelismului, ne dau deplasarea paralelă a unui vector pe un circuit închis (însemnând cu S o suprafaţă arbitrară, sprijinită pe curba închisă considerată)

$$(19) \qquad \delta u^k = -\frac{1}{2}\int_S R^k{}_{rns}\, u^r\, d\sigma^{ns},$$

pentru componentele contravariante; şi

$$(19') \qquad \delta u_k = \frac{1}{2}\int_S R^r{}_{kns}\, u_r\, d\sigma^{ns},$$

pentru componentele covariante. Tensorul care figurează în formulele precedente este analog tensorului lui RIEMANN-CHRISTOFFEL (§ 249)

$$(20) \qquad R^k{}_{rns} = \frac{\partial \Gamma^k{}_{rs}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^k{}_{rn}}{\partial x^s} + \Gamma^\alpha{}_{rs}\,\Gamma^k{}_{\alpha n} - \Gamma^\alpha{}_{rn}\,\Gamma^k{}_{\alpha s};$$

unde simbolii $\Gamma^k{}_{rs}$ sunt cei introduşi la § 261.

Observaţie. Într'o multiplicitate afină, operaţiile de „ridicare" şi „coborîre" a indicilor, nu pot fi efectuate, întrucât nu a fost încă introdus tensorul fundamental g_{rk}. Deaceia simbolii $\Gamma^k{}_{rs}$ nu pot fi explicitaţi cum s'a făcut în CAP. V. Pentru acelaş motiv, formulele (19) şi (19') sunt ireductibile.

264. Multiplicitate metrică. Spaţiu metric. Fie un punct P al unei multiplicităţi afine, date. Să considerăm, în acest punct

ca origină, mai multe elemente liniare, *orientate diferit*, pentru măsurarea cărora, în ceeace priveşte *lungimile lor*, să presupunem că putem alege *aceiaşi* unitate de măsură: un *etalon orientabil* în toate direcţiile, ataşat punctului considerat P. Vom putea, evident, în asemenea ipoteză, compara lungimile tuturor elementelor liniare, de orientări diferite, în P.

Spunem că multiplicitatea posedă o determinare metrică în punctul $P\ (x^r)$, dacă dx^r fiind componentele unui vector infinitesimal localizat în P, „lungimea" acestui vector va fi dată, *prin definiţie*, de forma patratică omogenă (1), în care coeficienţii simetrici g_{rk} sunt funcţii bine determinate de coordonatele x^r, continue, ele şi derivatele lor, având determinantul $g = |g_{rk}|$, *diferit de zero*. Forma (1) este invariantă pentru orice transformare de variabile; acest fapt are loc numai în multiplicitatea particulară, numită *euclidiană*.

Pentru ca o multiplicitate să constitue un *spaţiu metric* nu este deajuns ca să posedă, în fiecare punct al ei, o determinare metrică. Structura unui spaţiu metric necesită stabilirea regulii care să permită a defini *conexiunea metrică* între două puncte vecine aparţinând multiplicităţii; prin urmare, o conexiune relativă la măsurarea lungimilor segmentelor a două elemente liniare localizate în două puncte vecine.

Intr'un spaţiu euclidian, această „conexiune" se face printr'o „translaţie". Putem, atunci, vorbi de acelaş vector transportat în orice punct al spaţiului; deci, de vectori „echipolenţi".

Analizarea profundă a noţiunii de conexiune metrică se datoreşte lui WEYL, şi vom reveni asupra ei în paragraful următor.

Pentru un *spaţiu riemannian*, *care este un spaţiu metric*, postulăm: în toate punctele multiplicităţii, unitatea de măsură a lungimii să fie aceiaşi; prin urmare, *metrul este transportabil*. Prin aceasta, este determinată ceeace numim „conexiune metrică într'un spaţiu riemannian". Proprietăţile tensorului metric fundamental g_{rk} sunt stabilite în Cap. IV. Vom verifica mai târziu (§ 265) că invarianţa formei (1) este o consecinţă a „transportabilităţii metrului".

Toate proprietăţile stabilite şi rezultatele găsite în Cap. V se extind şi în spaţiile riemanniene, unde câtimile Γ^k_{rs} sunt *simbolii lui* CHRISTOFFEL *de speţa a doua*, daţi de relaţiile (22) § 240. Reamintim că aceşti simboli nu sunt tensori. Aceasta este

Scanned with OKEN Scanner

important; în adevăr, într'un spaţiu euclidian, putem alege un sistem de coordonate, convenabil, astfel încât forma patratică fundamentală să se reducă la o formă cu coeficienţi constanţi. In acest sistem de coordonate se anulează toţi simbolii Γ. Dar, pentru un sistem de coordonate general, în acelaş spaţiu euclidian, tensorul g_{rk} nu mai este constant, iar simbolii Γ vor fi, prin urmare, diferiţi de zero. Ori, aceasta nu ar fi cu putinţă dacă simbolii lui CHRISTOFFEL ar fi tensori; căci, un tensor nul într'un sistem de coordonate, trebue să fie nul în ori care alt sistem de coordonate.

In § 255 am definit „deplasarea paralelă" a unui vector. Este clar că într'un spaţiu riemannian, deci n e l i n i a r, deplasarea paralelă nu este integrabilă. Prin aceasta, după rezultatele dela § 256, tensorul lui RIEMANN-CHRISTOFFEL este diferit de zero, el definind, prin relaţiile (19) şi (19') însăşi deplasarea paralelă.

Acestea fiind stabilite, reamintim că forma fundamentală (1) atrage după sine posibilitatea de a defini volumele prin invariantul integral (2) şi unghiul a două direcţii prin formula (3).

265. Transportul metrului. Invarianţa etalonului. *(Eichinvarianz; Invariance de jauge; Gauge invariance).* Admitem că în fiecare punct al spaţiului metric există un *etalon de lungime orientabil*, pe care-l putem, deci, aplica în *toate direcţiile* care pornesc din punctul P. Acest etalon, definit în P, este ataşat punctului P. Libertatea alegerii etalonului ne spune că două lungimi orientate diferit, în acelaş punct, sunt comparabile numai în ceeace priveşte *raportul* lor.

Intr'un punct P', vecin lui P, vom avea în general, un alt etalon. Pentru motive de continuitate, admitem că etalonul din P' este ceeace a devenit etalonul din P printr'o deplasare „congruentă",—adică, deplasare relativă la „lungimea" segmentului transportat din P în P'.

Prin extinderea noţiunii de „deplasare paralelă" din spaţiile afine, care defineşte o corespondenţă relativă la *direcţie*, vom numi „deplasare *congruentă*" corespondenţa relativă şi la *lungimile* vectorilor din P şi P', obţinuţi prin deplasare paralelă.

Facem ipoteza că metrul observatorului din P' să nu difere decât printr'o cantitate infinitesimală de metrul observatorului din

P, dacă primul a fost obținut din al doilea prin deplasare congruentă.

Fie dx^k deplasarea foarte mică PP'; fie l lungimea unui segment localizat în P și măsurat cu un etalon legat de punctul P; fie $l + \delta l$ ceeace devine această lungime dacă deplasăm segmentul, congruent, în P' și îl măsurăm cu etalonul legat de punctul P'. Condiția de continuitate admisă, ne indică o relație de proporționalitate între variația δl și deplasările dx^k; anume,

$$(21) \qquad dl = -1 \cdot d\varphi = -\frac{1}{2} l \varphi_k \, dx^k,$$

unde funcțiile lui WEYL φ_k, numite *componentele conexiunei metrice*, sunt funcții continue, cu derivate continue, de coordonatele punctului P și nu depind de segmentul deplasat; ele determină un vector covariant, care definește *transportul etalonului.*

Să schimbăm etalonul *în punctul* P, astfel încât patratul lungim, l^2 să devină $L^2 = \lambda l^2$, prin introducerea parametrului $\lambda(P)$, numit „*coeficient*“ *de etalonaj*“, și care să fie o funcție *pozitivă*, continuă și cu derivate continue, de poziție.

Fie ϕ_k ceeace devine (*în* P) funcția φ_k prin schimbarea etalonului, astfel încât, prin deplasare conguentă, după (21), să avem

$$(22) \qquad dL = -L\, d\phi = -\frac{1}{2} L \, \phi_k \, dx^k .$$

Ca proprietate esențială a „principiului etalonării“, să admitem că în P', schimbarea etalonului produce acelaș efect ca și în P; ceeace revine a admite că în P' segmentul $L(P)' = L + \delta L$ se deduce din segmentul $l(P') = l + \delta l$, tot așa precum s'a dedus segmentul L din l, în P:

$$L^2(P') = \lambda(P')\, l^2(P'),$$

de unde, desvoltând funcția $\lambda(P')$ în serie, până la infiniți mici neglijabili,

$$L(P') = \sqrt{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^k} dx^k\right) l(P');$$

ceeace se scrie

$$L + dL = \sqrt{\lambda} l \left(1 + \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^k} dx^k\right)(1 - d\varphi);$$

sau, după (21) şi (22),

$$L\,(1 - d\phi) = \sqrt{\lambda}\, l \left(1 + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}\, dx^k\right)(1 - d\varphi)\,;$$

de unde rezultă legea de transformare a funcţiilor lui WEYL, pentru schimbarea etalonului

$$d\phi = d\varphi - \frac{1}{2}\, d\,(\log \lambda)\,; \tag{23}$$

sau,

$$\phi_k = \varphi_k - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial\, \lambda}{\partial x_k}\,. \tag{24}$$

Este clar că. în urma ipotezei fundamentale asupra schimbării patratului lungimii unui segment, şi având în vedere că lungimile diferit orientate în acelaş punct, nu pot fi măsurate decât până la un factor constant, — forma patratică fundamentală este definită numai până la un factor constant *e*, numit *„factor" de etalonaj:*

$$ds^2 = e\, g_{rk}\, dx^r\, dx^k = g^*_{rk}\, dx^r\, dx^k\,;$$

ea devine, prin schimbarea etalonului (se introduce coeficientul de etalonaj λ):

$$(ds^2)' = \lambda\, g^*_{rk}\, dx^r\, dx^k\,. \tag{25}$$

Să considerăm, acum, o deplasare congruentă a unui segment pe circuitul închis al unui paralelogram infinitesimal $(dx^r, \delta x^k)$, şi să exprimăm variaţia totală

$$\Delta l = (\delta d - d\delta)\,,$$

a segmentului considerat. Vom avea, succesiv,

$$\delta\, dl = -\,\delta\, l\, d\varphi - l\,\delta\,(d\varphi) = l\,\delta\varphi\, d\varphi - l\,\delta\,(d\varphi)\,;$$

$$\Delta\, l = -\,l\,(\delta\, d - d\,\delta)\,\varphi \equiv -\,l\,\Delta\,\varphi\,;$$

$$-\,\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2}\, f_{rk}\, dx^r\, dx^k\,, \tag{26}$$

unde am pus

$$f_{rk} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r}\,. \tag{27}$$

WEYL numeşte tensorul de ordinul al doilea antisimetric de componente f_{rk}, tensorul de *curbură segmentară* a spaţiului metric, în punctul considerat P.

Dacă $f_{rk} = 0$, după (26) rezultă $\Delta l = 0$; ceea ce însemnează: condiţia necesară şi suficientă pentru ca un segment să poată fi deplasat, dela un punct la altul vecin, independent de drumul ales, este $f_{rk} = 0$.

Numim această proprietate *invarianţa etalonului*. Este clar că, dacă e satisfăcută condiţia

$$f_{rk} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r} = 0, \tag{28}$$

avem de a face cu un *spaţiu riemannian*, în care putem menţine lungimea unui vector prin deplasare paralelă. In adevăr, în acest caz din (28), deducem, după (27), că $d\varphi$ este o diferenţială totală exactă. Alegând un etalonaj determinat în P (deci coeficientul λ) acest etalonaj se transportă univoc în orice punct P'. Prin aceasta forma liniară $d\varphi$ poate fi făcută nulă peste tot (etalonaj normal. In adevăr, e suficient să luăm în (24) $d\varphi = d(\log \lambda)$. Deci, pentru etalonajul normal, metrica spaţiului rămâne determinată de forma ds^2, până la un factor constant, pozitiv; factor care poate fi determinat prin alegerea unităţii de segment.

Dacă f_{rk} este diferit de zero, funcţiile φ_k *sunt definite în egalitatea* (27) *numai până la o diferenţială totală exactă*. Această împrejurare îşi găseşte o interpretare interesantă în aplicaţiile teoriei precedente la problemele de relativitate.

In rezumat, o muitiplicitate metrică, în sensul lui WEYL, este caracterizată, relativ la un sistem de „referinţă" (= sistem de coordonate + etalonaj), prin două forme diferenţiale fundamentale: una patratică $ds^2 = g_{rk}\, dx^r\, dx^k$ şi una liniară $d\varphi = \frac{1}{2}\varphi_k\, dx^k$ invariante la transformări de variabile; dar variante după legile

$$g_{rk} \longrightarrow \lambda g_{rk};\quad \varphi_k \longrightarrow \varphi_k - \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda\,\partial}{\partial x^k}, \tag{29}$$

faţă de schimbarea etalonului.

Deocamdată, în cele ce urmează, *rămânem în cadrul unui spaţiu riemannian* (relaţia 28 este satisfăcută identic), iar deplasarea paralelă a unui vector, pe un circuit închis, păstrează lun-

gimea, dar operează o deviație a poziției finale față de cea inițială, deviație care definește *curbura* spațiului riemannian în punctul considerat.

Prin urmare, în rezumat, *într'un spațiu riemannian, deplasarea paralelă nu este integrabilă, dar metrul este orientabil în fiecare punct și transportabil la distanță.*

Este evident că operația tensorială de „ridicare" și „coborîre" a indicilor, este permisă, într'un spațiu riemannian.

Acum putem verifica proprietatea enunțată: forma patratică fundamentală este un invariant față de o deplasare paralelă. In adevăr, în virtutea invarianței etalonajului, lungimile nu se schimbă prin deplasare paralelă.

Mai mult, în virtutea invarianței etalonajului, derivatele covariante ale tensorului g_{rk} sunt nule. In adevăr, prin definiția deplasării paralele, derivatele covariante ale componentelor unui vector sunt nule; iar, în virtutea invarianței etalonajului, lungimea rămâne neschimbată. Așadar, din

$$0 = D\,|\,u\,|^2 = D\,(g_{rk}\,u^r u^k) \tag{30}$$

rezultă

$$D(g_{rk}) = 0\,. \tag{31}$$

266. Proprietăți. 1. Din (30) rezultă, însemnând cu $|\,u\,|^2$ patratul lungimii unui vector, că

$$|\,u\,|^2 = \text{const. în deplasare paralelă};$$

Deasemeni, $\bar{u}$ și $\bar{v}$ fiind doi vectori, produsul lor scalar

$$(\bar{u}\,.\,\bar{v}) = g_{rk}u^r v^k = \text{const. în deplasare paralelă};$$

Unghiul a doi vectori $\bar{u}$ și $\bar{v}$ se bucură de proprietatea:

$$\cos(\bar{u}\,,\,\bar{v}) = \frac{\bar{u}\,.\,\bar{v}}{\sqrt{|\,u\,|^2\,|\,v\,|^2}} = \text{const. în deplasare paralelă.}$$

2. Am definit o *linie geodezică* prin condiția ca tangenta în fiecare punct al ei să satisfacă la legea deplasării paralele; așadar, deplasarea dealungul unei linii geodezice a unui vector, conservă constantă atât lungimea vectorului, cât și unghiul făcut de vector cu tangenta la geodezică, în fiecare punct al ei.

3. *Definiția geodezicei ca linie de lungime minimă,* (v. § 339), în spațiul riemannian: dintre toate curbele care leagă două

puncte A și B, cea mai scurtă (sau mai lungă) este curba geodezică. Într'un spațiu euclidian, se vorbea de linia cea mai *scurtă* (dreapta); într'un spațiu riemannian, geodezicele se definesc drept linii „extremale" ale următorului principiu variațional. Fie

$$S = \int_A^B ds$$

lungimea unei curbe C, care leagă două puncte A și B; dintre aceste curbe, aceia este o curbă geodezică pentru care

$$\delta S = \int_A^B d(\delta s) = 0 .$$

Să exprimăm curba C în reprezentare parametrică, cu ajutorul unui parametru t; atunci,

$$dx^k = u^k\, dt ; \qquad |u|^2 = g_{rk}\, u^r u^k ;$$

$$S = \int_A^B \sqrt{g_{rk}\, u^r u^k}\, dt .$$

Variația lui S va fi dată de

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta (g_{rk}\, u^r u^k)}{\sqrt{g_{rk}\, u^r u^k}}\, dt .$$

Să alegem drept curbă C o geodezică; lungimea $|u|$ este, după proprietatea 2, invariabilă dealungul geodezicei; iar,

$$du^r = - \Gamma^r_{mn}\, u^m\, dx^n ;$$

Putem scrie așadar,

$$|u| . \delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \left\{ \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^n}\, dx^n\, u^r u^k + g_{rk}\, u^r\, du^k \right\} dt .$$

$$= \frac{1}{2} \int_A^B \left\{ \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^n}\, u^r u^k - g_{rk}\, \Gamma^r_{mn}\, u^m u^k - g_{rk}\, \Gamma^k_{mn}\, u^m u^r \right\} dx^n\, dt .$$

Dar,

$$g_{rk}\, \Gamma^r_{mn} = \Gamma_{k,\, mn} ; \qquad g_{rk}\, \Gamma^k_{mn} = \Gamma_{rmn} ;$$

unde mărimile din membrul al doilea sunt simbolii lui CHRISTOFFEL de prima speță.

Avem, în definitiv,

$$|u| \cdot \delta \dot{S} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial g_{tk}}{\partial x^n} - (\Gamma_{k,rn} + \Gamma_{r,kn}) \right\} u^r u^k \, dx^n \, dt ,$$

după ce am schimbat în termenul al doilea şi al treilea indicele de sumare m prin r resp. k. După relaţiile cunoscute (§ 240)

$$\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^n} = \Gamma_{k,rn} + \Gamma_{r,kn} ,$$

între simbolii de speţa doua, rezultă că integrala este identic nulă ; aşadar, pentru o geodezică

$$\delta S = 0 .$$

267. Calculul variaţiei totale a unui vector, prin deplasare paralelă pe un contur închis, foarte mic, într'un spaţiu riemannian.

Să considerăm într'un spaţiu riemannian R un punct P_0, atribuindu-i, pentru simplificare, coordonatele zero. In acest punct, fie doi vactori tangenţi $\bar{\epsilon}$ şi $\bar{\eta}$, de componente contravariante (ϵ^r , η^k), în R. Aceşti doi vectori definesc în P_0 un element biliniar Π conţinut în varietatea liniară tangentă în P_0.

Să aplicăm unui punct $P(x^s)$, din R, o deplasare din P_0 până într'un punct vecin P_1, dealungul unui arc de curbă, foarte mic, situat pe o suprafaţă tangentă în P_0 la Π şi conţinută în R. In primă aproximaţie, putem admite că arcul de curbă considerat este aşezat chiar pe elementul Π. Vom considera, apoi, o curbă închisă pornind din P_0, în P_1 şi revenind în P_0, pe suprafaţa specificată mai sus.

Asociem punctului curent $P(x^s)$ un vector de componente contravariante u^k. Intr'o deplasare paralelă, vectorul u^k suferă variaţia

$$du^k = - \Gamma^k_{mn} u^m \, dx^n . \tag{32}$$

Pentru o deplasare finită P_0P_1, deducem ecuaţiile integrale

$$u^k_1 - u^k_0 = - \int_{P_0}^{P_1} \Gamma^k_{mn} u^m \, dx^n ,$$

care permit calcularea valorilor lui u^k în P_1 dacă se cunosc valorile în P_0. Prin metoda aproximaţiilor succesive, se obţine, într'un punct curent $P(x^s)$, de pe arcul considerat, ales astfel încât puterile superioare ale lui x^s să fie neglijabile,

$$\Gamma^k_{mn} = (\Gamma^k_{mn})_o + \left(\frac{\partial \Gamma^k_{mn}}{\partial x_s}\right)_o x^s + \ldots$$

$$u^k = u^k_o + \left(\frac{\partial u^k}{dx^s}\right)_o x^s + \ldots = u^k_o - (\Gamma^k_{rs})_o u^r_o x^s + \ldots$$

De unde,

$$u^k_1 - u^k_o = -(\Gamma^k_{mn})_o u^m_o \int_{P_o}^{P_1} dx^n -$$

$$- \left\{\frac{\partial \Gamma^k_{mn}}{\partial x^s} - \Gamma^r_{ms}\Gamma^k_{rn}\right\}_o u^m_o \int x^s dx^n + \ldots$$

Neglijând infiniții mici de ordinul al treilea și suprimând, pentru ușurința scrisului, indicele zero, se obține, prin integrare pe circuitul închis C, *variația totală* (primul termen se anulează)

$$\Delta u^k = -\left\{\frac{\partial \Gamma^k_{mn}}{\partial x^s} - \Gamma^r_{ms}\Gamma^k_{rn}\right\} u^m \oint x^s dx^n . \tag{33}$$

Observăm că prin permutarea indicilor s și n

$$\oint x^s dx^n = -\oint x^n dx^s . \tag{34}$$

Efectuând această permutare în ecuația precedentă și ținând seamă de expresia tensorului de curbură (§ 250), rezultă pentru (33), având în vedere relația (34)

$$\Delta u^k = -\frac{1}{4} R^k_{msn} u^m \oint (x^s dx^n - x^n dx^s) . \tag{35}$$

Fie produsul vectorial

$$\sigma^{sn} = \epsilon^s \eta^n - \epsilon^n \eta^s ,$$

care are ca modul, elementul de suprafață determinat de vectorii $\bar{\epsilon}$, $\bar{\eta}$ pe elementul Π. Integralele curbilinii din membrul al doilea al expresiei (35) sunt proporționale cu aria interioară δS a conturului închis C și sunt date în mărime și sens, de

$$\frac{1}{2} \oint (x^s dx^n - x^n dx^s) = \frac{\sigma^{sn}}{A} \delta S , \tag{36}$$

unde

$$A = \frac{1}{2} g_{sr} g_{kp} \sigma^{sk} \sigma^{rp} . \tag{37}$$

Cu aceste expresii, relația (35) devine

$$(38) \qquad \Delta u^k = -\frac{1}{2}\delta S \,.\, R^k{}_{msn}\, u^m \frac{\sigma^{sn}}{A} \,,$$

Să formăm produsul vectorului Δu^k printr'un vector oarecare v_k ; avem

$$(39) \qquad g_{rk}\, v^r \Delta u^k = -\frac{1}{2}\,\delta S \,.\, R^k{}_{msn}\, u^m\, v^r \frac{\sigma^{sn}}{A} \,,$$

sau,

$$(40) \qquad g_{rk}\, v^r \Delta u^k = \frac{1}{4}\,\delta S \,.\, R_{rmsn} \frac{(u^r\, v^m - u^m\, v^r)\,\sigma^{sn}}{A}$$

unde am ţinut seamă de simetria tensorului g_{rk} şi de antisimetria componentelor σ^{sn} de produs vectorial.

Inlocuind în (40) vectorul v_k prin u_k, membrul al doilea devine identic nul. Deci, vectorul u^k este perpendicular pe vectorul Δu^k.

268. Curbura unui spaţiu riemannian. In § 263 am vorbit despre curbura într'un spaţiu afin. Toate proprietăţile enunţate se aplică la spaţiul riemannian (care e un spaţiu afin). Observăm, în plus, că relaţia de antisimetrie a tensorului de curbură complet covariant

$$R_{rkmn} = -\,R_{krmn}$$

este în strânsă legătură cu proprietatea invarianţei etalonului, care caracterizează, precum ştim, natura spaţiului riemannian. In adevăr, relaţia (38) ne dă, prin coborîrea indicelui,

$$\delta u_k = -\frac{1}{2A}\delta S \,.\, R_{krmn}\, u^r\, \sigma^{mn}$$

Pe de altă parte, invarianţa etalonului afirmă că variaţia lungimii este nulă :

$$\delta\,|u|^2 = u^k\, \delta u_k = 0 \,.$$

Să formăm, produsul scalar care figurează în ecuaţia precedentă ; rezultă

$$u^k\, \delta u_k = -\frac{1}{2A}\,\delta S \,.\, R_{krmn}\, u^k\, u^r\, \sigma^{mn} =$$

$$= -\frac{1}{4A}\,\delta S \left\{ R_{kr}R_{mn} + {}_{rkmn} \right\} u^k\, u^r\, \sigma^{mn} \,,$$

care, în virtutea relației de antisimetrie, este nulă. Prin urmare, proprietatea de invarianță a etalonului este în legătură cu antisimetria tensorului de curbură (în primii doi indici).

269. Curbura riemanniană într'o direcție dată. Fie un element biliniar Π din R într'un punct P. Fie un vector conținut în acest element, de ex. chiar vectorul $\bar{\epsilon}$. După deplasare paralelă pe un circuit închis C, tangent la Π, acest vector va suferi variația $\delta\epsilon^k$, dată de relația (38). In general, noul vector $\epsilon^k + \delta\epsilon^k$, va eși din elementul Π. Să-l proiectăm ortogonal pe Π. Fie $\delta\alpha$ unghiul făcut de poziția inițială $(\bar{\epsilon})$ cu proiecția poziției sale finale $(\bar{\epsilon} + \delta\bar{\epsilon})$ pe elementul Π.

Numim *curbură riemanniană după direcția* Π, în P, raportul $\delta\alpha : \delta S$, unde δS este aria determinată de curba închisă C, care tinde la P pe o suprafață limitată de C, conținută în R și tangentă la Π.

Proiecția vectorului $\bar{\epsilon} + \delta\bar{\epsilon}$ pe elementul Π se va putea scrie (prin descompunere după direcțiile $\bar{\epsilon}$ și $\bar{\eta}$) în Π:

$$\bar{\epsilon} + \lambda\bar{\epsilon} + \mu\bar{\eta} \tag{41}$$

unde câtimile λ și μ sunt niște cantități foarte mici, satisfăcând condiției ca diferența

$$(\bar{\epsilon} + \delta\bar{\epsilon}) - (\bar{\epsilon} + \lambda\bar{\epsilon} + \mu\bar{\eta}) \tag{42}$$

să fie un vector ortogonal elementului Π.

Proiecția lui $\bar{\epsilon} + \delta\bar{\epsilon}$ pe $\bar{\epsilon}$ se va confunda cu $\bar{\epsilon}$ (până la infiniți mici neglijabili) pentru că vectorul își păstrează lungimea; deci, din (41) rezultă (dacă φ este unghiul făcut de vectorii $\bar{\epsilon}$ și $\bar{\eta}$), înmulțind cu $\bar{\epsilon}$ și punând condiția de ortogonalitate:

$$\lambda + \mu \cos\varphi = 0. \tag{43}$$

Condiția de ortogonalitate, ne mai dă, dacă înmulțim expresia (42) scalar cu $\bar{\eta}$ și observăm relația (40),

$$\lambda \cos\varphi + \mu = \delta S \cdot R_{rmsn} \frac{\sigma^{rm}\,\sigma^{sn}}{4A} \tag{44}$$

Pe de altă parte, scriind relația trigonometrică a sinusurilor în triunghiul determinat de extremitățile vectorilor $\bar{\epsilon}$ și $\bar{\epsilon} + \lambda\bar{\epsilon} + \mu\bar{\eta}$ cu punctul P, obținem $d(\delta\alpha) = \mu \sin\varphi : (1 + \lambda)$; așa dar,

(45) $$\delta\alpha = \mu \sin \varphi + \dots$$

Din relaţiile (43), (44) şi (45), deducem pentru curbura riemanniană după direcţia Π:

(46) $$\frac{\delta\alpha}{\delta S} = R_{rmsn} \frac{\sigma^{rm}\,\sigma^{sn}}{(g_{rs}\,g_{mn} - g_{rn}\,g_{ms})\,\sigma^{rm}\,\sigma^{sn}} .$$

In Geometria diferenţială se demonstrează că dacă se cunoaşte curbura riemanniană de direcţie într'un punct, pentru toate secţiunile plane $(\bar{\epsilon}, \bar{\eta})$, se cunosc toţi tensorii R_{rmsn}.

Curbura medie a lui RICCI. Dacă avem un singur vector $\bar{\epsilon}$, expresia

$$\rho(\epsilon) = - R_{ks}\,\epsilon^k\,\epsilon^s ,$$

ne dă curbura medie a lui RICCI, după direcţia $\bar{\epsilon}$. Simbolul R_{ks} este tensorul contractat al lui RICCI-EINSTEIN. (§ 251).

270. Transportul unui pseudotensor de-alungul unui circuit închis.

O densitate scalară Ω se zice „transportată paralel", dacă derivata sa covariantă (§ 249) este nulă

$$\frac{\partial\,\Omega}{\partial x^k} - \Omega\,\Gamma_{kn}{}^n = 0 ,$$

deci,

$$d(\log\Omega) = \Gamma_{kn}{}^n\,dx^k .$$

Efectuând deplasarea paralelă de-alungul unui circuit închis, alcătuit din paralelogramul infinitesimal dx^k, δx^s. obţinem prin formula lui STOKES,

$$\delta(\log\Omega) = \frac{1}{2}\int R_{ks}\,d\sigma^{kr} ,$$

unde

$$R_{kr} = \frac{\partial\,\Gamma_{kn}{}^n}{\partial x^r} - \frac{\partial\,\Gamma_{rn}{}^n}{\partial x^k}$$

Ori, având în vedere expresia tensorului de curbură contractat R_{kr} care ştim că este un tensor simetric (§ 252), rezultă

$$\delta(\log\Omega) = \frac{1}{2}\oint (R_{kr} - R_{rk})\,d\sigma^{kr} = 0 .$$

Prin urmare, toate *densităţile* (şi la fel, toate *capacităţile*) scalare sunt invariante pentru o deplasare paralelă.

Observăm că, după § 248, cîtimea $\sqrt{|g|}$ este o densitate scalară, ea este deci, invariantă pentru o deplasare paralelă. Această proprietate joacă un rol important în teoria relativităţii generale.

271. Coordonatele „normale ale lui Riemann. Tensorul de curbură al lui RIEMANN-CHRISTOFFEL caracterizează deviaţia spaţiului riemannian R de la o varietate liniară E de aceiaşi dimensiune, într'un punct al lui R. RIEMANN alege, în fiecare punct, un sistem de coordonate special, care se apropie în gradul cel mai mare de un sistem cartesian în punctul considerat şi care permite evidenţierea clară a rolului jucat de tensorul de curbură în devierea lui R de un E, în punctul ales.

Fie un punct P în R, de coordonate x^k şi un vector unitar u^r în R; avem

$$g_{kr}\, u^r\, u^k = 1 .$$

Să ducem o geodezică în P, tangentă direcţiei $\bar{u}$, conţinută în R. Pe această geodezică să alegem un punct P^*, şi fie $s = PP^*$ lungimea arcului de geodezică.

Numim *coordonate „normale" riemanniene* ale punctului P^*, cîtimile

$$x^{*k} = s\, u^k . \tag{47}$$

Să scriem că punctul P^* se află pe geodezică, observând că avem evident

$$\frac{dx^{*k}}{ds} = u^k ; \quad \frac{d^r x^{*k}}{ds^r} = 0 \ldots (r = 2, 3, \ldots) . \tag{48}$$

Vom substitui valorile (47) şi (48) în ecuaţia geodezicei

$$\frac{d^2 x^{*k}}{ds^2} + \Gamma^{*k}_{mn} \frac{dx^{*m}}{ds} \frac{dx^{*n}}{ds} = 0 ;$$

rămâne, pentru simbolii de speţa a doua, condiţiile

$$\Gamma^{*k}_{mn}\, u^m\, u^n = 0 ; \tag{49}$$

şi, în consecinţă,

$$\Gamma^{*}_{k,\,mn}\, u^m\, u^n = 0 , \tag{50}$$

pentru simbolii de speţa întâia.

In particular, pentru punctul P, relațiile precedente trebue să fie satisfăcute ori care ar fi direcția $\bar{u}$. Așadar, în P,

$$(51) \qquad (\Gamma^{*k}_{mn})_P = 0 \; ; \; (\Gamma^{*}_{k,mn})_P = 0 \, .$$

De asemeni, derivatele de primul ordin ale tensorului fundamental g^{*}_{rk} sunt nule în P; ceeace rezultă din relațiile (51). Prin urmare, sistemul riemannian este un sistem geodezic în P. Vom vedea mai jos, însă, că el nu este un sistem geodezic „oarecare" (relațiile 56).

Să derivăm ecuația (49) în raport cu s; vom obține

$$\frac{\partial \Gamma^{*}_{k,mn}}{\partial x^{*r}} u^m u^n u^r = 0 \, ;$$

scriind că în P coeficientul lui $u^m u^n u^r$ este nul, rezultă

$$(52) \qquad \frac{\partial \Gamma^{*}_{k,mn}}{\partial x^{*r}} + \frac{\partial \Gamma^{*}_{k,nr}}{\partial x^{*m}} + \frac{\partial \Gamma^{*}_{k,rm}}{\partial x^{*n}} = 0 \, .$$

Tensorul de curbură complet covariant, va avea, în P, valoarea

$$(53) \qquad (R^{*}_{kmnr})_P = \left(\frac{\partial \Gamma^{*}_{k,mr}}{\partial x^{*n}} - \frac{\partial \Gamma^{*}_{k,mn}}{\partial x^{*n}} \right)_P \, ,$$

căci toți Γ sunt nuli în P.

Din (52) și (53), deducem

$$(54) \qquad \left(\frac{\partial \Gamma^{*}_{k,mn}}{\partial x^{*r}} \right)_P = \frac{1}{3} (R^{*}_{kmrn} + R^{*}_{knmr}).$$

Având în vedere relația cunoscută (§ 240)

$$\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} = \Gamma_{k,mn} + \Gamma_{m,kn} \, ,$$

obținem prin derivare, dacă ținem seamă de (54),

$$(55) \qquad \left(\frac{\partial^2 g^{*}_{km}}{\partial x^{*n} \partial x^{*r}} \right)_P = \frac{1}{2} (R^{*}_{knmr} + R^{*}_{mnkr})_P \, .$$

Având în vedere relațiile de simetrie ale tensorului de curbură (§ 251), deducem că între derivatele secunde ale tensorului metric fundamental există relația de legătură (în P):

$$(56) \qquad \left(\frac{\partial^2 g^{*}_{km}}{\partial x^{*n} \partial x^{*r}} + \frac{\partial^2 g^{*}_{kn}}{\partial x^{*r} \partial x^{*m}} + \frac{\partial^2 g^{*}_{kr}}{\partial x^{*m} \partial x^{*n}} \right)_P = 0 \, .$$

Scanned with OKEN Scanner

Această relație ne spune, în adevăr, că sistemul riemannian nu este un sistem geodezic *oarecare*.

Să desvoltăm g^*_{km}, în vecinătatea punctului P, în serie TAYLOR până la termeni de ordinul al doilea. Obținem, în vecinătatea lui P, ținând seamă de valoarea (55),

$$(57)\quad g^*_{km} = (g^*_{km})_P + \frac{1}{6}(R^*_{knmr} + R^*_{mnkr})_P\, \delta x^{*n}\, \delta x^{*r}.$$

Observăm că putem obține un spațiu euclidian numai dacă tensorul de curbură se anulează. Termenul al doilea din (57) ne arată tocmai deviația spațiului R de la spațiul euclidian $(g^*_{kr})_P = \delta^r_k$.

Dacă tensorul de curbură este nul, relația (57) arată că g^*_{kr} poate să fie pus sub forma euclidiană într'un domeniu finit, în jurul punctului P. Din aproape în aproape, concludem că această proprietate se extinde în tot spațiul: el este euclidian.

272. Forma de curbură. Să înmulțim ecuația (57) cu $dx^{*k}\, dx^{*m}$; obținem

$$(58)\quad ds^2 = g^*_{km}\, dx^{*k}\, dx^{*m} = (g^*_{km})_o\, dx^{*k}\, dx^{*m} + \frac{1}{2} a_{kmnr}\, \delta x^n\, \delta x^{*r}\, dx^{*k}\, dx^{*m},$$

unde am pus

$$(59)\quad a_{kmnr} = \frac{1}{3}(R^*_{kmnr} + R^*_{mnkr})_P = \left(\frac{\partial^2 g^*_{km}}{\partial x^{*n}\, \partial x^{*r}}\right)_P,$$

după (55). Pentru câtimile (59) avem proprietățile de simeirie: [1])

$$(60)\quad \begin{cases} a_{1234} = a_{1243} = a_{2134}; & \text{datorite simetriei lui } g^*_{km} \text{ și inversării ordinii de derivare în (59);} \\ a_{1234} = a_{3412}; & \text{conform definiției (59), din cauza simetriei tensorului de curbură.} \end{cases}$$

Să facem notația

$$(61)\quad d\sigma^2 = -\frac{3}{2} a_{kmnr}\, \delta x^{*n}\, \delta x^{*r}\, dx^{*k}\, dx^{*m}.$$

Se verifică ușor că, având în vedere relațiile de simetrie (60),

1) Notez cu cifre ordinea de succesiune a indicilor k, m, n, r.

$$(62)\quad -\frac{3}{2}\,a_{kmnr} = \frac{1}{2}(a_{krnm} + a_{rkmn}) - \frac{1}{2}(a_{kmrn} + a_{rnkm}).$$

Pe de altă parte, din (59) și (60), deducem

$$(63)\quad R^*_{nkmr} = \frac{1}{2}(a_{krmn} + a_{rnkm}) - \frac{1}{2}(a_{krnm} + a_{nmkr}).$$

Prin urmare, din (62) și (63), rezultă

$$(64)\quad R^*_{nkmr} = -R^*_{nkrm} = -\frac{3}{2}\,a_{kmnr}.$$

Cu această valoare, expresia (61) se scrie

$$(65)\quad d\sigma^2 = R^*_{nkrm}\,\delta x^{*n}\,dx^{*k}\,\delta x^{*r}\,dx^{*m},$$

sau încă, punând pentru produsul vectorial al vectorilor $\delta x^{*n}\,dx^{*k}$,

$$(66)\quad \Delta_{nk} = \delta x^{*n}\,dx^{*k} - \delta x^{*k}\,dx^{*n},$$

care este un tensor antisimetric, definind elementul de suprafață determinat de vectorii numiți, în punctul P, putem scrie, pentru (65)

$$(67)\quad d\sigma^2 = \frac{1}{4}\,R^*_{nkrm}\,\Delta_{nk}\,\Delta_{rm};$$

formă patratică omogenă, care este un *invariant* al multiplicității.

RIEMANN numește această mărime *forma de curbură* a spațiului R în punctul P. Ea determină, în punctul P, deviația metricei riemanniene de la metrica varietății liniare tangentă în P la R. In adevăr, relația (58) se scrie

$$ds^2 = (ds^2)_0 - \frac{1}{3}\,d\sigma^2;$$

sau,

$$(68)\quad ds^2 = (ds^2)_0 - \frac{1}{12}\,R^*_{nkrm}\,\Delta_{nk}\,\Delta_{rm}.$$

Din această expresie reese încă odată, clar, rolul tensorului de curbură complet covariant, în distingerea stării de curbură a spațiului riemannian, într'un punct dat.

RIEMANN definește drept curbură în P după *direcția* elementului biliniar $\delta x^{*n}\,dx^{*k}$, expresia

$$(69)\quad \frac{d\sigma^2}{A} = R^*_{nkrm}\,\frac{\Delta_{nk}\,\Delta_{rm}}{(g_{nr}\,g_{km} - g_{kr}\,g_{nm})\,\Delta_{nk}\,\Delta_{rm}},$$

unde A este arta elementului biliniar (relația 37). Pusă sub această formă, câtimea $d\sigma^2 : A$ este independentă de mărimea însăși a elementului liniar, ci depinde numai de raportul componentelor celor doi vectori infinitesimali cari definesc elementul biliniar considerat.

In § 269 am definit curbura riemanniană prin expresia (46). Este ușor de verificat că aceste două definiții sunt echivalente, dacă se compară expresiile (69) și (46).

In cazul a două dimensiuni,

$$\frac{d\sigma^2}{A} = \frac{1}{g} R_{1212} = -\frac{1}{2} R .$$

In § 274 vom demonstra că

$$-\frac{1}{2} R = K ,$$

unde K este curbura totală a lui GAUSS pentru o suprafață. Așadar, în două dimensiuni, forma de curbură riemanniană se confundă cu curbura totală. După cum am văzut, aceasta trebue înțeles în sensul că o suprafață (bidimensională) poate fi considerată drept o varietate riemanniană introdusă într'un spațiu euclidian (cu trei dimensiuni). Evident, această proprietate este adevărată și pentru un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni, după cum se demonstrează în Geometria diferențială ; mai târziu, vom stabili proprietatea pentru o varietate quadridimensională (§ 314).

273. Spațiul riemannian R_m ca o varietate neliniară într'un E_n euclidian (T. LEVI-CIVITA), unde $m < n$.

1. Să considerăm după metoda lui LEVI-CIVITA, un spațiu riemannian cu m dimensiuni, determinat prin forma patratică fundamentală (1)

$$ds^2 = g_{rk}\, dx^r\, dx^k \tag{70}$$

față de un sistem de coordonate oarecare x^k și să căutăm un spațiu euclidian E cu $n > m$ dimensiuni, în care alegem un sistem de coordonate cartesian ξ^α.

In acest paragraf, spre a evita confuziile, vom distinge cele două spații prin notațiile : în R vom întrebuința litere romane, în E litere grecești.

Trebue să stabilim deci, formula de transformare

$$\xi^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \ldots x^m), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n), \tag{71}$$

astfel încât forma patratică

$$d\sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (d\,\xi^\alpha)^2 \tag{72}$$

să se deducă din (70) prin substituţiile (71). Aceasta ne conduce la

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} = g_{rk}, \tag{73}$$

deci, un sistem de $\frac{1}{2}\, m\,(m+1)$ ecuaţii cu derivate parţiale între cel mult n necunoscute ξ^α; a căror rezolvare nu este posibilă decât dacă

$$n \geq \frac{1}{2} m\,(m+1).$$

Să derivăm relaţia (73) în raport cu x^s; obţinem

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^r\, \partial x^s} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^k\, \partial x^s} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^r} = \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^s}.$$

Prin permutări circulare, se obţin două formule analoage. Cu ajutorul expresiilor astfel obţinute construim simbolii lui CRISTOFFEL de prima speţă:

$$\left[\begin{matrix} r\,k \\ s \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^s}\right) = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^r\, \partial x^k} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^s}. \tag{74}$$

2. *Varietate liniară* V_m *tangentă spaţiului* R *într'un punct al său.* Fie un punct P într'un spaţiu R având în acest spaţiu coordonatele x^k, iar în E coordonatele ξ^α. Un punct infinit vecin P' în R va avea coordonatele $x^k + dx^k$, res. $\xi^\alpha + d\,\xi^\alpha$. In spaţiul E, cantităţile $d\xi^\alpha$ definesc un vector infinitesimal $\bar{u}$. Covenim să spunem că acest vector posedă componentele dx^k în R. Din (71) rezultă

$$d\,\xi^\alpha = \frac{\partial\, \xi_\alpha}{\partial\, x^k}\, dx^k. \tag{75}$$

Să substituim câtimilor infinitesimale dx^k, $d\,\xi^\alpha$ nişte mărimi proporţionale, finite, u^k, v^α. Cantităţile v^α vor defini în spaţiul

euclidian E un vector $\overrightarrow{PQ}$ *tangent în* P *la spațiul* R; iar u^k vor fi componentele acestui vector, față de R. Avem

$$v^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} u^k \,. \tag{76}$$

Făcând pe ξ^α să varieze arbitrar și dându-le toate valorile posibile, extremitatea Q a vectorului $\overrightarrow{PQ}$ descrie în E un subspațiu euclidian cu m dimensiuni. Numim acest subspațiu: *varietate liniară* V_m *tangentă la* R *în punctul* P.

3. *Lungimea* vectorului $\overrightarrow{PQ}$ este, în E,

$$l^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (v^\alpha)^2$$

iar în R,

$$= g_{rk}\, l^2\, u^r\, u^k \,.$$

4. *Unghiul* a doi vectori $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PQ'}$ tangenți în P la R, este dat de

$$l\, l' \cos\varphi = v^\alpha\, v'^\alpha \,;$$

iar în R, de

$$l\, l' \cos\varphi = g_{rk}\, u^r\, u'^k \,.$$

5. *Varietate liniară normală* V'_{n-m} la spațiul R într'un punct al său. Fie în P un vector $\overrightarrow{PT}$ de componente μ^α conținut în E. Dacă e ortogonal cu toți vectorii $\overrightarrow{PQ}$, de componentc v^α (în R) și de componente u^k (în E), spunem că este un *vector normal spațiului* R. Condiția de ortogonalitate între vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PT}$ se scrie

$$\mu^\alpha\, v^\alpha = 0 \,; \tag{77}$$

sau, după relația (76)

$$\eta^\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} u^k = 0 \,;$$

condiție, care trebue să fie satisfăcută pentru toți vectorii u^k. Așadar, avem

$$\eta^\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial {}^k x} = 0 ; \tag{78}$$

ceeace constitue un sistem de m ecuații cu derivate parțiale, liniare între cele n cantități.

Avem, deci o infinitate de vectori normali în P la R. Extremitățile lor descriu un subspațiu euclidian cu $n-m$ dimensiuni, numit „varietate liniară *normală*" spațiului riemannian într'un punct al său.

6. Fie $\overrightarrow{PS}$ un vector oarecare în R, de componente η^α. Numim *proiecția acestui vector pe varietatea liniară* V_m (tangentă în P la R) vectorul $\overrightarrow{PQ}$ tangent în P la R, astfel încât vectorul diferență $\overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ}$ să fie normal în P la R.

Fie ν^α și u^k componentele lui $\overrightarrow{PQ}$ în E res. R. Condiția de ortogonalitate a vectorului $\overrightarrow{PT}$ se scrie, după (78),

$$(\eta^\alpha - \nu^\alpha) \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} = 0 ;$$

sau, încă, după (76),

$$\eta^\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} u^r = g_{rk}\, u^r .$$

De unde, prin înmulțire cu g_{sk} și contracție

$$u^r = g^{rk} \eta^\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} ; \tag{79}$$

care sunt componentele proiecției $\overrightarrow{PQ}$ a vecrorului $\overrightarrow{PS}$, în R.

7. *Curbe* în spațiul riemannian. In general, dacă variabilele x^k sunt funcții de p ($< n$) parametri independenți t_s, mulțimea pozițiilor ocupate de punctul $P(x^k)$, când parametrii iau toate valorile posibile, constitue o varietate p-dimensională în R. Pentru $p = 1$, obținem *curbe*. Lungimea unui arc de curbă între două puncte $P_1(t_1)$ și $P_2(t_2)$ este dată de expresia

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{rk} \frac{dx^r}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt$$

al cărei semn este determinat de orientarea circuitului pe curbă.

Varietatea p-dimensională face parte, evident, şi din spaţiul E, unde poate fi studiată independent de considerarea spaţiului R, prin introducerea formei patratice relativă la varietate. Exemple am întâlnit în cazul curbelor aşezate pe o suprafaţă.

Este clar că toate proprietăţile stabilite pentru mărimile şi invarianţii caracteristici ai spaţiului riemannian pot fi redobândite prin această metodă a lui LEVI-CIVITA. De exemplu, pentru a defini „deplasarea paralelă" vom transporta din P în P cu ajutorul unei *translaţii*, în E, mulţimea vectorilor cari formează o varietate liniară tangentă în P; apoi, îi vom proiecta ortogonal pe varietate liniară tangentă în P'. Vectorii celor două varietăţi, cari sunt aduşi în coincidenţă, prin operaţia de mai sus, se numesc vectori corespondenţi prin deplasare paralelă. Analitic, această definiţie, duce la expresia stabilită pentru o deplasare paralelă; de unde rezultă, în mod normal, definiţia curbelor geodezice şi a curburii spaţiale, — în conformitate cu rezultatele deja găsite.

274. Aplicaţii la teoria suprafeţelor. Am amintit în mai multe rânduri că un exemplu tipic de multiplicitate riemanniană (bidimensională) cufundetă într'un spaţiu euclidian (cu trei dimensiuni) ni-l oferă o suprafaţă.

Elementele geometriei pe o suprafaţă au fost desvoltate în Partea I Cap. IV. Acum suntem în măsură să completăm, cu titlu de aplicaţie a calculului tensorial într'un spaţiu riemannian, cunoştinţele expuse relative la teoria suprafeţelor şi, în acelaş timp, să stabilim câteva relaţii noui, care să contribue la luminarea conceptului de spaţiu riemannian. Prin aceasta se aprofundează şi se precizează sensul folosirii acestor spaţii în aplicaţiile din teoriile fizice, menite să formuleze teoretic fenomenele experimentale.

1. Relaţie între „invariantul de curbură R" şi „curbura totală" K a lui GAUSS. Fie un punct regulat P al unei suprafeţe bidimensionale. In conformitate cu § 83 să alegem un sistem de coordonate cartesian în E_3, cu origina în P (pentru simplificare); planul x, y fiind tangent în P la suprafaţă. Ecuaţia (99) § 83, ne

dă până la termeni neglijaţi, în vecinătatea punctului P, ecuaţia suprafeţei

$$z = r\,x^2 + 2s\,xy + t\,y^2 ;$$

unde

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} ; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} ; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} .$$

Sa admitem că ne găsim în cazul când punctul P este un punct eliptic al suprafeţei: $rt - s^2 > 0$. Vom putea alege, atunci, axele de coordonate astfel încât ecuaţia suprafeţei în P să poată fi pusă sub forma

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} ; \tag{80}$$

unde a şi b sunt semiaxele principale ale indicatoarei lui DUPIN, în P.

In § 83 am stabilit că, în orice punct regulat al suprafeţei, curbura totală K şi curbura medie H, sunt date de relaţiile

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} ; \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} ; \tag{81}$$

unde R_1 şi R_2 sunt razele de curbură principale în P.

După formuiele (93) şi (94) § 83, având în vedere ecuaţia (80), deducem pentru tensorul metric al spaţiului riemannian materializat prin suprafaţa considerată, în vecinătatea punctului P:

$$g_{11} = g\,g^{22} = 1 + \frac{x^2}{a^2} ; \; g_{22} = g\,g^{11} = 1 + \frac{y^2}{b^2} ; \tag{82}$$

$$g_{12} = -\,g\,g^{12} = \frac{x\,y}{a\,b} ; \; \sqrt{|g|} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} ;$$

$$G_{11} = \frac{1}{a} ; \; G_{22} = \frac{1}{b} ; \; G_{12} = G_{21} = 0 .$$

In punctul P $(x = y = z = 0)$, avem

$$g_{11} = g^{22} = 1 ; \; g_{22} = {}^{11} = 1 ; \; g_{12} = g^{12} = 0 ; \tag{83}$$

$$g = +1 ; \; G_{11} = \frac{1}{a} ; \; G_{22} = \frac{1}{b} ; \; G_{12} = 0 .$$

Introducând aceste ultime valori în relaţiile (102 şi 103, § 83) avem, în punctul P:

(84) $$K = \frac{1}{a\,b}\ ;\ H = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\ ;$$

de unde, prin comparare cu (81), rezultă $R_1 = a\ ;\ R_2 = b$. Deci, a şi b sunt razele de curbură ale secţiunilor principale în P.

Să calculăm, acum, peatru acelaş punct P al suprafeţei considerate, concepută ca un spaţiu riemannian, invariantul de curbură:

(85) $$R = g^{kr} R_{kr} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}\ ,$$

căci celelalte componente ale tensorului de curbură sunt nule în P, după (82). Avem (§ 252)

(86) $$R_{kr} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{\begin{matrix}\beta\ s\\ s\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^s}\left\{\begin{matrix}k\ r\\ s\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\beta\ s\\ n\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}n\ r\\ s\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}k\ r\\ n\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}n\ s\\ s\end{matrix}\right\}$$

unde parantezele exprimă simbolii lui CHRISTOFFEL de speţa a doua

$$\left\{\begin{matrix}k\ r\\ s\end{matrix}\right\} = g^{s\alpha}\left[\begin{matrix}k\ r\\ \alpha\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\,g^{s\alpha}\left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{r\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^\alpha}\right).$$

Pentru cazul de faţă (punând $x = x^1\ ;\ y = x^2$), ţinând seamă de valorile (82), avem, în vecinătatea lui P,

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{x^2}{a^2}\ ;\ \left\{\begin{matrix}1\,2\\ 1\end{matrix}\right\} = 0\ ;\ \left\{\begin{matrix}2\,2\\ 1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{x}{ab}\ ;\ \left\{\begin{matrix}1\,1\\ 2\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{y}{ab}\ ;\ \left\{\begin{matrix}1\,2\\ 2\end{matrix}\right\} = 0\ ;\ \left\{\begin{matrix}2\,2\\ 2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{y^2}{b^2}\ .$$

Observăm că în punctul P, toţi simbolii se anulează; aşadar, în expresia (86) ultimii doi termeni dispar. Cu aceste valori avem în punctul P,

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1\,2\\ 2\end{matrix}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 2\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 2\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{ab}\ ,$$

$$R_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left\{\begin{matrix}2\,1\\ 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2\,2\\ 2\end{matrix}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{matrix}2\,2\\ 1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\begin{matrix}2\,2\\ 2\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\begin{matrix}2\,2\\ 1\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{ab}\ .$$

Aşadar, din (85) rezultă

$$R = -\frac{2}{ab}$$

şi comparând cu (85), urmează relaţia foarte importantă

$$(87) \qquad R = -2K = -2\frac{1}{R_1 R_2} .$$

Teoremă: Invariantul de curbură, într'un punct al unui spaţiu riemannian, reprezentat printr'o suprafaţă, coincide, până la un factor numeric (— 2) cu curbura totală a suprafeţei, în punctul considerat.

Această teoremă pare destul de bizară: în adevăr, invariantul de curbură se determină, precum ştim, numai prin măsurători efectuate *pe suprafaţă*, deci, numai cu elemente aparţinând suprafeţei; pe când curbura gaussiană ne informează asupra *formei* suprafeţei *privită în spaţiul euclidian* care o conţine.

2. *Deplasare paralelă pe o suprafaţă.* Pentru o suprafaţă cu două dimensiuni, este uşor de calculat unghiul făcut de poziţia finală cu poziţia iniţială a unui vector transportat prin deplasare paralelă pe o curbă închisă (diferită de o geodezică) aşezată pe suprafaţă.

Să considerăm un punct regulat al suprafeţei P şi doi vectori infinitesimali, în P, dx^r, δx^r. Să deplasăm paralel un vector u^k dealungul conturului paralelogramului format de $(dx^r, \delta x^r)$, până revenim în punctul de P. Fie $u^k + \delta u^k$ vectorul final, obţinut prin deplasarea paralelă a lui u^k pe conturul paralelogramului considerat.

După formula (75, § 79), aria determinată de vectorii u^k şi $u^k + \delta u^k$ este

$$(88) \qquad \begin{aligned} d\sigma &= \pm \sqrt{|g|} \left\{ u^k (u^r \Delta u^r) - u^r (u^k + \Delta u^k) \right\} \\ &= \pm \sqrt{|g|} (u^k \Delta u^r - u^r \Delta u^k) . \end{aligned}$$

Dar, această arie se mai poate scrie, dacă φ este unghiul făcut de vectorii consideraţi,

$$(89) \qquad d\sigma = |\bar{u}| \cdot |\bar{u} + \Delta\bar{u}| \sin\varphi \simeq |u|^2 d\varphi ,$$

căci unghiul φ este foarte mic (şi-l însemnăm cu $d\varphi$). Din (88) şi (89) deducem

$$d\varphi = \pm \frac{\sqrt{|g|}}{|\bar{u}|^2} (u^k \Delta u^r - u^r \Delta u^k) ;$$

iar în cazul de faţă (două dimensiuni):

(90) $$d\varphi = \pm \sqrt{|g|} \cdot \frac{1}{|\bar{u}|^2} (u^1 \Delta u^2 - u^2 \Delta u^1) .$$

Observăm, apoi că,

(91) $$|\bar{u}|^2 = g_{11} (u^1)^2 + 2 g_{12} u^1 u^2 + g_{22} (u^2)^2 ;$$

și după § 268,

(92) $$\Delta u^k = - \frac{1}{2} R^k{}_{rsn} u^r \Delta_{sn} ;$$

unde $R^k{}_{rsn}$ este tensorul de curbură vectorială, iar

$$\Delta_{s\sigma} = dx^s \delta x^n = dx^n \delta x^s ;$$

astfel încât aria închisă de paralelogramul format de vectorii dx^s δx^n este

(93) $$d\sigma = + \sqrt{|g|} \Delta_{sn} .$$

In cazul de față a două dimensiuni, ecuația (92) devine

(94) $$\Delta u^1 = - \frac{1}{2} (R^2{}_{112} u^1 \Delta_{12} + R^1{}_{212} u^2 \Delta_{12}) ;$$

$$\Delta u^2 = - \frac{1}{2} (R^2{}_{112} u^1 \Delta_{12} + R^2{}_{212} u^2 \Delta_{12}) .$$

Observăm, pe de altă parte, că (v. § 251, 252, 253) :

$$R^2{}_{112} = R_{11} = R_{11} R ; \quad R^1{}_{212} = - R_{22} = - g_{22} R ;$$

$$R^2{}_{212} = - R^1{}_{112} = R_{12} = R_{21} = g_{12} R ;$$

prin introducerea tensorului contractat R_{kr} și a invariantului de curbură R.

Inlocuind aceste valori în (94) și rezultatul în (90) și având în vedere relațiile (91) și (93), obținem

$$d\varphi = \mp \frac{1}{2} R \sqrt{|g|} \Delta_{12} = \mp \frac{1}{2} R \, d\sigma ;$$

sau, după relația fundamentală (87),

(95) $$d\varphi = \mp \frac{1}{2} R \, d\sigma = \pm K \, d\sigma .$$

Determinarea semnului, în formula precedentă, depinde de sensul de circulație pe conturul numitului paralelogram. Alegem

(90) $$d\varphi = \pm \sqrt{|g|} \cdot \frac{1}{|\bar{u}|^2} (u^1 \Delta u^2 - u^2 \Delta u^1) .$$

Observăm, apoi că,

(91) $$|\bar{u}|^2 = g_{11} (u^1)^2 + 2 g_{12} u^1 u^2 + g_{22} (u^2)^2 ;$$

şi după § 268,

(92) $$\Delta u^k = - \frac{1}{2} R^k{}_{rsn} u^r \Delta_{sn} ;$$

unde $R^k{}_{rsn}$ este tensorul de curbură vectorială, iar

$$\Delta_{s\sigma} = dx^s \delta x^n = dx^n \delta x^s ;$$

astfel încât aria închisă de paralelogramul format de vectorii dx^s δx^n este

(93) $$d\sigma = \pm \sqrt{|g|} \Delta_{sn} .$$

In cazul de faţă a două dimensiuni, ecuaţia (92) devine

(94) $$\Delta u^1 = - \frac{1}{2} (R^2{}_{112} u^1 \Delta_{12} + R^1{}_{212} u^2 \Delta_{12}) ;$$

$$\Delta u^2 = - \frac{1}{2} (R^2{}_{112} u^1 \Delta_{12} + R^2{}_{212} u^2 \Delta_{12}) .$$

Observăm, pe de altă parte, că (v. § 251, 252, 253) :

$$R^2{}_{112} = R_{11} = R_{11} R ; \quad R^1{}_{212} = - R_{22} = - g_{22} R ;$$

$$R^2{}_{212} = - R^1{}_{112} = R_{12} = R_{21} = g_{12} R ;$$

prin introducerea tensorului contractat R_{kr} şi a invariantului de curbură R.

Inlocuind aceste valori în (94) şi rezultatul în (90) şi având în vedere relaţiile (91) şi (93), obţinem

$$d\varphi = \mp \frac{1}{2} R \sqrt{|g|} \Delta_{12} = \mp \frac{1}{2} R \, d\sigma ;$$

sau, după relaţia fundamentală (87),

(95) $$d\varphi = \mp \frac{1}{2} R \, d\sigma = \pm K \, d\sigma .$$

Determinarea semnului, în formula precedentă, depinde de sensul de circulaţie pe conturul numitului paralelogram. Alegem

ca sens pozitiv sensul care face pe dò pozitiv : vectorul u^1 suferă o creştere pozitivă du^1 când e transportat pe direcţia dx^1.

Pentru a fixa ideile, alegem curbure gaussiană pozitivă $K > 0$.

Atunci, după (95), R va fi negativ şi vom lua semnul superior. După ce am fixat astfei semnul, să considerăm o porţiune de suprafaţă (fără singularităţi) pe care $K > 0$; descompunând-o după procedeul cunoscut (ca în demonstraţia teoremei lui STOKES) în paralelograme elementcre, sumeie pe direcţiile de sens contrar ale laturilor contingente se distrug ; astfel încât

$$\varphi = \int K \, d\sigma , \tag{96}$$

unde integrala se extinde la o suprafaţă arbitrară mărginită de curba închisă considerată (dealungnl căreia am efectuat deplasarea paralelă).

Aplicaţie. Luăm drept curbă închisă un paralel aşezat pe o sferă de rază r, cornspunzător unghiului θ (constant) la polul nord.

După (96) rezultă

$$\varphi = \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 4\pi \sin^2 \frac{\theta}{2} ;$$

sensul pozitiv fiind determinat de circulaţia pe paralel efectuată astfel încât pentru un observator aşezat cu capul spre polul nord şi privind calota sferică nordică, circulaţia să se facă dela dreapta spre stânga.

Pentru ecuator, $\varphi = 2\pi$: vectorul revine în poziţia sa iniţială ; în adevăr, aşa trebue să fie, căci ecuatorul este o geodezică a sferei.

Prin aceste consideraţii, putem regăsi *teorema lui* GAUSS din Trigonometria sferică : suma unghiurilor unui triunghi sferic (format din arce de cerc mare, adică linii geodezice) diferă de π prin „excesul sferic".

Fie un astfel de triunghi sferic ABC având unghiurile la vârf, α, β, γ. Vectorul $\bar{a}$ să facă în poziţia sa iniţială din A, unghiul φ_1 cu latura AB. Deplasăm acest vector „paralel" din A în B. In acest punct, vectorul face ca latura BC unghiul $\psi = \pi - \beta + \varphi_1$. Să continuăm deplasarea paralelă (menţinerea unghiului ψ), din B până în C. In acest punct, vectorul va face

cu latura CA unghiul $\chi = \pi - \gamma + \psi = 2\pi - \beta - \gamma + \psi_1$. Continuăm deplasarea paralelă din C în A (păstrând unghiul χ constant). In punctul A, vectorul va face cu latura AB unghiul $\varphi_2 = \pi - \alpha - \beta - \gamma + \varphi_1$. Prin urmare, până la un multiplu de 2π, avem

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi .$$

Aşadar, *excesul sferic*, după (96) este dat de

$$(97) \qquad \alpha + \beta + \gamma - \pi = \int K \, d\sigma ,$$

relaţie, care exprimă cunoscuta teoremă a lui GAUSS, enunţată mai sus.

3. *Suprafeţe de curbură constantă.* După relaţia (87) şi § 84 (relaţia (102)), avem

$$(98) \qquad -\frac{1}{2} R = K = \frac{G_{11} G_{22} - g^2_{12}}{g_{11} g_{22} - g^2_{12}} = \frac{rt - s^2}{g^2} .$$

Punând în această expresie valorile (93) şi (94) de la § 83, avem

$$(99) \qquad K = \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right\} : \left\{ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} .$$

Să discutăm aceste rezultate în cazul unei *suprafeţe de revoluţie.*

$$z = f(r) ,$$

unde $r^2 = x^2 + y^2$. Pentru o astfel de suprafaţă, obţinem din (99) printr'un calcul elementar

$$(100) \qquad K = \frac{1}{r} \frac{d^2 z}{dr^2} \frac{dz}{dr} : \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right\} .$$

Să presupunem curbura totală constantă $K =$ constant. In acest caz, ecuaţia diferenţială (100) se poate integra o dată; avem

$$(101) \qquad \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{1}{c - Kr^2} - 1 .$$

Vom distinge diferite cazuri:

α) Admitem $K > 0$. Pentru ca $dz : dr$ să nu fie imaginar

trebue ca și $c > 0$. Pentru valoarea maximă $r = \sqrt{\frac{c}{K}}$, se anulează derivata $dr : dz$. Invers, derivata $dz : dr$ se anulează pentru $r = \sqrt{\frac{c-1}{K}}$, deci, numai când $c > 1$. Pentru $c = 1$, avem o sferă de rază $1 : \sqrt{K}$.

β). $K = -k^2 < 0$. Trebue ca $c < 1$ pentru ca derivata $dz : dr$ să nu fie imaginară. Pentru toate punctele $r = \sqrt{\frac{1-c}{K}}$, avem $dz : dr = 0$; suprafața prezintă în aceste puncte muchi, care nu ating axa de rotație.

β_1) $K = -k^2$ cu $0 < c < 1$. Derivata $dr : dz$ nu se anulează nicăeri.

Pentru $r = 0$, derivata $dz : dr$ este reală; deci suprafața prezintă muchi.

β_2) $K = -k^2$ cu $c < 0$. Pentru valoarea maximă $r =$ se anulează derivata $dr : dz$.

β_3) $K = -k^2$, cu $c = 1$, obținem ecuația „tractricei", integrând ecuația diferențială (101):

$$z = \pm \frac{1}{k} \left\{ \sqrt{1 - k^2 v^2} + \frac{1}{2} \log \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 r^2}}{1 + \sqrt{1 + k^2 r^2}} \right\}.$$

Suprafețele care posedă o curbură constantă pozitivă se numesc *suprafețe sferice.*

4. Coordonate geodezice. Să alegem pe suprafața considerată, într'un punct regulat P, un sistem de coordonate generale (curbilinii) ortogonale, $u =$ const., $v =$ const., astfel încât familia de curbe $v =$ const. să fie geodezice, iar curbele $u =$ const. să *nu* fie geodezice.

Din cauza octogonalității ($g_{12} = 0$) și din proprietatea stabilită la § 78, elementul liniar se va exprima prin forma patratică pozitiv definită:

$$(102) \qquad ds^2 = g_{11}(u)\, du^2 + g_{22}(u, v)\, dv^2 ,$$

unde $g_{11}(u)$, este funcție numai de u (ceeace rezultă din § 78, din cauză că $v =$ const. sunt curbe geodezice).

Să facem substituțiile (care conduc la o reprezentare similară introducerii coordonatelor polare):

$$\theta = \int g_{11}(u)\, du\,; \quad \varphi = v,$$

Expresia (102) devine

$$ds^2 = d\theta^2 + f^2(\theta, \varphi)\, dv^2. \tag{103}$$

Din această formă rezultă

$$g_{11} = 1\,;\ g_{22} = f^2\,;\ g_{12} = g^{12} = ;\ g^{11} = 1\,;\ g^{22} = 1 : f^2\,.$$

Cu aceste expresii putem calcula simbolii lui CHRISTOFFEL (cari nu se anulează):

$$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -f\frac{\partial f}{\partial\theta}\,;\ \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,;\ \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta}\,.$$

De asemeni, tensorul de curbură contractat:

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}^2 = \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\,;$$

$$R_{22} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}21\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = f\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\,;$$

astfel încât, pentru invariantul de curbură rezultă

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\,\theta^2}\,.$$

Prin urmare, după relația fundamentală (87), avem pentru curbura totală gaussiană

$$K = -\frac{1}{2}R = -\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\,\theta^2}\,. \tag{104}$$

Observăm că, după (103), întreaga geometrie pe suprafața considerată este determinată de fuucția $f(\theta, \varphi)$; iar ecuația (104) ne spune, în consecință, că această geometrie pe suprafață este determinată de funcția $K(\theta, \varphi)$.

5. Suprafețe sferice. Să considerăm o suprafață de curbură constantă pozitivă:

$$K = k^2.$$

Prin această fixare a valorii lui K, întreaga geometrie este, după cum am observat, determinată, pe suprafața considerată. In adevăr, ecuația (104) ne permite, prin integrare, să deducem funcția f (A, φ). Găsim

$$f(\theta, \varphi) = \alpha(\varphi) \sin(k\theta) + \beta(\varphi).$$

Pentru determinarea funcțiilor α și β (numai de φ), observăm că pentru $\theta = 0$, ecuațiile *geodezicelor* se reduc la

$$\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \varphi^2 = 0,$$

oricare ar fi φ. Prin urmare,

$$\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_{\theta = 0} = - \left(f \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\theta = 0} = 0.$$

Soluția $(\partial f : \partial\theta) = 0$, ne conduce la $\alpha(\varphi) = 0$, ceeace nu este acceptabil. Soluția $f(O, \varphi) = 0$ ne conduce la determinarea lui $\beta(\varphi) = 0$. Pentru α putem alege valoare 1, căci aceasta revine la o simplă schimbare formală a variabilei φ. Așadar,

$$f(\theta, \varphi) = \sin(k\theta).$$

Să punem în (103):

$$k\theta = \Theta \; ; \; k\varphi = \Phi \; ;$$

obținem

$$(105) \qquad ds^2 = \frac{1}{k^2} (d\Theta^2 + \sin^2\Theta \, d\Phi^2) \; ;$$

formă, care redă pe ds^2 pentru o *sferă* de rază $1 : k$. Prin urmare: *geometria pe suprafețe de curbură constantă pozitivă este geometria pe o sferă.* Am numit astfel de suprafețe „suprafețe sferice".

6. *Spații sferice* (RIEMANN). *Spații eliptice* (NEWCOMB). a) Să considerăm o sferă de rază $1 : k$, pe care o numim „sferă fundamentală". Să ducem prin unul din polii săi P_o planul tangent π la sferă. Fie M un punct al sferei, determinat de unghiul azimutal Φ și de unghiul polar Θ, — în emisfera corespunzătoare polului P_o. Considerăm un sistem cartesian de coordonate π, cu origina în P_o. Să proiectăm stereografic punctul M al sferei, în punctul M_o pe planul tangent π, — *luând ca punct de privire polul P opus lui* P_o. Coordonatele astfel obținute (x, y) pentru M_o (din π), vor fi interpretate drept coordonatele punctului M al sferei concepută ca un spațiu riemannian bidimensional. Să determinăm metrica acestui spațiu. Avem, însemnând cu

$$r^2 = x^2 + y^2 ,$$

$$x = r \cos \phi \; ; \; y = r \sin \phi \; ; \; r = \frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} .$$

Printr'un calcul simplu, se deduce

$$(106) \quad ds^2 = \frac{1}{k^2} (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta \, d\phi^2) = (1 + k^2 r^2)^{-2} (dx^2 + dy^2) .$$

Spaţiul riemannian (bidimensional, în cazul de faţă) care posedă o metrică dată prin expresia precedentă se numeşte *spaţiu sferic*. Unui punct (x, y) din spaţiul riemannian, îi corespunde un singur punct de pe sfera fundamentală. Vom generaliza această noţiune la Nr. 8. b) Să efectuăm, acum, proiecţia pe acelaş plan tangent π, luând ca *punct de privire centrul sferei fundamentale*. Punem

$$r^2 = x^2 + y^2 ;$$

$$x = r \cos \phi \; ; \; y = r \sin \phi \; ; \; r = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \Theta ;$$

avem, pentru expresia elementului diferenţial

$$(107) \quad ds^2 = \frac{1}{k^2} (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta \, d\phi^2) =$$

$$= (1 + k^2 r^2)^{-2} (dx^2 + dy^2 + k^2 (x dy - y dx)^2) .$$

Spaţiile riemanniene cu metrica (107) se numesc *spaţii eliptice*. Unui punct din spaţiul riemannian, astfel definit, îi corespund *două* puncte, diametral opuse, pe sfera fundamentală. Se spune că spaţiul riemannian nu este omeomorf cu sfera însăşi.

7. *Suprafeţe pseudo-sferice. Spaţii iperbolice* (BOLYAI-LOBATSCHEFSKIJ).

Numim suprafeţe pseudosferice, suprafeţele care posedă o curbură constantă negativă :

$$K = - k^2 .$$

Ecuaţiei diferenţiale (104) îi corespunde ecuaţia

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} - k^2 f = 0 ,$$

care se integrează prin sinusul iperbolic

$$f = \sin h\,(k\theta)\,.$$

Forma metrică fundamentală este dată, în acest caz, de

$$ds^2 = \frac{1}{k^2}\,(d\Theta^2 + \sin h^2\Theta\, d\phi^2)\,.$$

Punând

$$x = \frac{1}{k}\,\mathrm{tgh}\,\Theta\cos\phi\,;\quad y = \frac{1}{k}\,\mathrm{tgh}\,\Theta\sin\phi\,,$$

se obține, pentru spațiul riemannian corespunzător,

$$(108)\qquad ds^2 = (1 - k^2 r^2)^{-2}\,(dx^2 + dy^2 - k^2\,(xdy - ydx)^2)\,.$$

O metodă ingenioasă și adecvată studiului geometriilor iperbolice se datorește lui CAYLEY (v. de ex. L. BIANCHI, l. c. v. II, p. 495). Metrica proiectivă cayleyană se definește cu ajutorul raportului anarmonic.

8. *Spații riemanniene de curbură constantă.* Teoremă: *condițiile necesare și suficiente pentru ca un spațiu riemannian* R_n *definit prin*

$$ds^2 = g_{kr}\,dx^k\,dx^r$$

să poseadă o curbură constantă K_o, *sunt*

$$(109)\qquad R_{krst} = K_o\,(g_{ks}\,g_{rt} - g_{kr}\,g_{st})\,.$$

Să încercăm a satisface relației precedente cu

$$(110)\qquad ds^2 = \frac{1}{U}\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2\,,$$

unde $U(x_1, x_2, \ldots x_n)$ este o funcție de punct, pe care trebue s'o determinăm. In acest scop, să observăm, mai general, că dacă metrica unui R_n este dată de forma

$$(111)\qquad ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(h_i\,dx_i)^2\,,$$

simbolii lui CHRISTOFFEL de speța a doua sunt

$$(112)\qquad \begin{Bmatrix} r\,s \\ k \end{Bmatrix} = 0\,;\quad \begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log h_s}{\partial x^s}\,;$$

$$\begin{Bmatrix} s\,s \\ k \end{Bmatrix} = -\frac{h_s}{h^2_k}\frac{\partial h_s}{\partial x^k}\,;\quad \begin{Bmatrix} s\,s \\ s \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log h_s}{\partial x^r}\,;$$

iar tensorul covariant al lui RIEMANN-CHRISTOFFEL, devine

$$R_{krst} = 0 ;$$

$$(113) \qquad R_{krrt} = h_r \left\{ \frac{\partial^2 h_r}{\partial x^k \partial x^t} - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial x^r} \frac{\partial h_r}{\partial x^k} - \frac{1}{h_r} \frac{\partial h_t}{\partial x^k} \frac{\partial h_r}{\partial x^t} \right\} ;$$

$$R_{krrk} = h_k h_r \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{h^k} \frac{\partial h_r}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{1}{h_r} \frac{\partial h_k}{\partial x^r} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_i \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial h_k}{\partial x^i} \frac{\partial h_r}{\partial x^i} - \frac{1}{h_k^2} \frac{\partial h_k}{\partial x^k} \frac{\partial h_r}{\partial x^k} - \frac{1}{h_r^2} \frac{\partial h_k}{\partial x^r} \frac{\partial h_r}{\partial x^r} \right\} .$$

Aplicând aceste formule la forma (110), obținem, ținând seamă de (109),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^k \partial x^r} = 0 ;$$

$$(114) \qquad U \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^{k2}} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^{r_2}} \right) = K_o + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x^i} \right)^2 .$$

Prima ecuație este satisfăcută de

$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i (x_i) ,$$

unde $X_i (x_i)$ este funcție numai de x_i. Aceste funcții trebue să satisfacă ecuațiilor (prima ecuație 114)

$$\frac{d^2 X_1}{dx^{12}} = \ldots = \frac{d^2 X_n}{dx^{n2}} .$$

Integrând, avem

$$X_i = a x_i^2 + 2 b_i x_i + c_i .$$

Introducând aceste valori în a doua ecuație diferențială (114), rezultă

$$4a (\Sigma x_i^2 + 2 \Sigma b_i x_i + \Sigma c_i) = K_o + 4 \Sigma (a x_i + b_i)^2 ,$$

care ne dă

$$K_o = 4a \Sigma c_i - 4 \Sigma b_i^2 .$$

Să alegem $\Sigma c_i = 1$, $b_i = 0$; rezultă

$$U = 1 + \frac{K_o}{4} \Sigma x_i^2 .$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $K_o = 4k^2$, punând $\Sigma x_i^2 = r^2$, avem

$$U = 1 + k^2 r^2 ,$$

astfel încât,

$$ds^2 = (1 + k^2 r^2) \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 ,$$

care este o generalizare a formulei (106), pentru un spațiu sferic cu n dimensiuni.

In mod analog, punând

$$K_o = - k^2 ,$$

se obține, pentru *spațiile iperbolice*, metrica

$$ds^2 = (1 - k^2 r^2)^{-2} \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 ,$$

care generalizează expresia (108).

Alegând convenabil forma (111), putem deduce pentru formele care generalizează pe (107) și (108), expresiile

$$(115) \quad ds^2 = (1 + k^2 r^2)^{-2} \left\{ \Sigma (dx^i)^2 + k^2 \Sigma (x^i dx^j - x^j dx^i)^2 \right\} ;$$

$$(116) \quad ds^2 = (1 - k^2 r^2)^{-2} \left\{ \Sigma (dx^i)^2 - k^2 \Sigma (x^i dx^j - x^j dx^i)^2 \right\} .$$

9. *Teorema lui* F. SCHUR: „*dacă în fiecare punct al unui spațiu riemannian* R_n *curbura riemanniană este aceiași pentru toate direcțiile, ea rămâne aceiași și pentru toate punctele*".

In adevăr, curbura riemanniană este independentă de direcție dacă, după (46),

$$R_{kmsn} = K(P) (g_{ks} g_{mn} - g_{kn} g_{ms}) ,$$

unde $K(P)$ ar putea să fie o funcție de punct.

Prin ridicarea indicelui, avem

$$R^k{}_{msn} = K(P) (g^k{}_s g_{mn} - g^k{}_n g_{ms}) ;$$

făcând $k = n$ și contractând,

$$R^k{}_{msk} = R_{ms} = - (n - 1) K(P) g_{ms} ;$$

sau, ridicând indicele m,

$$R^m{}_s = - (n - 1) K(P) g^m{}_s ,$$

și, printr'o nouă contracție,

$$R = R^m{}_m = - n (n - 1) K (P) .$$

Prin urmare,

$$R^m{}_s - g^m{}_s R = (n - 1) (n - 2) g^m{}_s K (P) .$$

Dar, după § 254, formula (34), divergența tensorului din primul membru al ecuației precedente este nulă ; așadar,

$$\frac{\partial K (P)}{\partial x^s} \equiv 0 ,$$

excluzând cazurile $n = 1 , 2$; ceeace demonstrează teorema enunțată.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VII.

Spațiile lui H. Weyl și A. S. Eddington.

A. Spațiile lui Weyl.

275. Metrica etalonată. In § 265 am definit noțiunea de metrică etalonată introdusă de WEYL. O multiplicitate afină cu N dimensiuni, care posedă și o astfel de metrică, constitue un spațiu W_N.

Cum, în această metrică, lungimile sunt definite, în fiecare punct, numai până la un factor constant (prin raportul lor), în locul formei patratice „brută"

$$g_{rk}\, dx^r\, dx^k ,$$

am considerat forma patratică

$$(1) \qquad ds^2 = g^*_{rk}\, dx^r\, dx^k ,$$

unde

$$g^*_{rk} = e\, g_{rk} ,$$

e fiind „factorul de etalonare".

Printr'o schimbare a etalonajului, factorul de etalonaj devine λe; deci, pentru o schimbare a etalonajului avem

$$(2) \qquad g^*_{rk} \longrightarrow \lambda\, g^*_{rk}; \quad \varphi_k \longrightarrow \varphi_k - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^m} ;$$

și în consecință

$$(3) \qquad g^{*rk} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} g^{*rk} ; \quad g \equiv |\, g_{rk}\,| \longrightarrow \lambda^N g .$$

Funcțiile lui WEYL φ_k se introduc prin relația (§ 265)

$$(4) \qquad dl = -\frac{1}{2} l .\, \varphi_k\, dx^k ,$$

menite să exprime variaţia lungimii unui segment, prin deplasare congruentă. Forma patratică (1) precum şi forma liniară (definită cu aproximaţie de o diferenţială totală exactă)

$$d\varphi = -\frac{1}{2}\varphi_k \, dx^k ,$$

sunt invariante la transformări de coordonate. Cătimile dx^k sunt *numere pure.*

Invarianţa la etalonaj (Eichinvarianz) se formulează astfel: în toate mărimile şi în toate relaţiile care exprimă raporturi metrice, tensorul g_{rk} şi vectorul φ_m trebue să intre astfel încât să existe invarianţă: 1. pentru schimbările de variabile; 2. pentru substituţiile (2).

Cu ajutorul tensorului de ordinul al doilea complet covariant (a cărui determinare este univocă):

$$f_{rk} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r} , \tag{5}$$

numit tensor de *curbură segmentară*, putem exprima variaţia lungimii unui segment, când acesta suferă o deplasare congruentă dealungul unui circuit închis, foarte mic.

Fie, ca şi în cazul riemannian, un element bidimensional plan Π determinat de vectorii $(\bar{\epsilon}, \bar{\eta})$, tangent într'un punct P_0 la o multiplicitate WEYL. Să considerăm un mic arc de curbă $P_0 P_1$ aşezat pe o suprafaţă aparţinând multiplicităţii şi tangentă în P_0 la elementul Π. Din formula (4) deducem, pentru deplasarea congruentă pe arcul $P_0 P_1$, din aproape în aproape,

$$\delta l = l_1 - l_0 = -\frac{1}{2}\int_{P_0}^{P_1} l \varphi_r \, dx^r , \tag{6}$$

unde $l(P)$ şi $\varphi_r(P)$ sunt funcţii de poziţie (un punct curent P de pe arcul de curbă $P_0 P_1$). Avem, prin desvoltare în serie TAYLOR, pentru punctul curent P, în vecinătatea punctului P_0, care presupunem că are coordonatele nule,

$$l = l_0 + \left(\frac{\partial l}{\partial x^k}\right)_0 x^k + \cdots = l_0 - \frac{1}{2} l_0 (\varphi_k)_0 x^k + \cdots$$

$$\varphi_r = (\varphi_r)_0 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r}\right) x^k + \cdots .$$

Rezultă, prin substituție în (6), (cf. § 268)

$$\delta l = -\frac{1}{8}(l\varphi_r)_o \int_{P_o}^{P_1} dx^r - \frac{1}{2} l_o \left\{ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\varphi_r \varphi_k \right\}_o \int_{P_o}^{P_1} x^k dx^r + \dots$$

Să ne menținem în regiunea infinit vecină lui P_o, astfel încât puterile superioare ale câtimilor x^k să fie neglijabile. Permutând în relația precedentă indicii r și k, introducând tensorul de curbură segmentară (5) și integrând dealungul unui circuit închis, obținem variația totală

$$\Delta l = \frac{1}{8} l f_{rk} \oint (x^r dx^k - x^k dx^r) ,$$

unde am suprimat indicele zero, pentru ușurința scrisului. Însemnând integrala din membrul al doilea cu S^{rk}, putem scrie, în definitiv, pentru variația totală

$$\Delta l = \frac{1}{8} l f_{rk} S^{rk} . \tag{7}$$

Această formulă, care dă variația totală a lungimii unui segment prin deplasare congruentă dealungul unui circuit închis, într'un spațiu W_N, este analoagă relației (38) de la § 268, care în metrica riemanniană, ne dădea variația de poziție a unui vector prin deplasare paralelă pe un circuit închis.

276. Spațiul lui WEYL este, prin urmare, o multiplicitate afină conexată cu o metrică etalonată. Deplasarea paralelă într'un spațiu afin, căruia i se suprapune o metrică etalonată, realizează simultan, deplasarea congruentă, și reciproc, este natural ca o deplasare congruentă să antreneze o deplasare paralelă.

Fie, într'un punct $P(x^k)$ un vector u^k. Prin deplasare paralelă în punctul vecin $P'(x^k + dx^k)$ componentele sale contravariante suferă variația cunoscută

$$du^k = - {}^*\Gamma^k_{mn} u^m dx^n , \tag{8}$$

unde steaua (*) marchează că în simbolul respectiv am considerat mărimile g^*_{rk}, din (1).

Lungimea vectorului $\bar{u}$ va fi dată de

$$|u|^2 = g^*_{rk} u^r u^k . \tag{9}$$

Prin diferențiere, se obține

$$2\,|u|\,d\,|u| = 2\,g^*_{rs}\,u^s\,du^r + u^r\,u^s\,dg^*_{rs}\,.$$

Făcând substituțiile (3), (8) și (9) în relația precedentă, rezultă

$$-\,g^*_{rs}\,u^r\,u^s\,\varphi_n\,dx^n = -\,2\,g^*_{rm}\,u^r\,{}^*\Gamma^m_{sn}\,u^s\,dx^n + u^r\,u^s\,\frac{\partial g^*_{rs}}{\partial x^n}\,dx^n$$

$$= \left\{ -\,(g^*_{rm}\,{}^*\Gamma^m_{sn} + g^*_{sm}\,{}^*\Gamma^m_{rn}) + \frac{\partial g^*_{rs}}{\partial x^n} \right\} u^r\,u^s\,dx^n\,;$$

relație, adevărată pentru orice vector arbitrar $\bar{u}$. Așadar,

$$(10) \qquad g^*_{rm}\,{}^*\Gamma^m_{sn} + g^*_{sm}\,{}^*\Gamma^m_{rn} = \frac{\partial g^*_{rs}}{\partial x^n} + g^*_{rs}\,\varphi_n\,.$$

Permutând circular indicii m și n, obținem încă două relații de forma (10); le adunăm și din rezultat scădem pe (10); obținem relațiile fundamentale următoare, de definiție pentru mărimi analoage simbolilor lui CHRISTOFFEL de speța întâia:

$$(11) \qquad {}^*\Gamma_{n,\,sr} = g^*_{mn}\,{}^*\Gamma^m_{sr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^*_{sn}}{\partial x^r} + \frac{\partial g^*_{rn}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{sr}}{\partial x^n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(g^*_{sn}\,\varphi_r + g^*_{rn}\,\varphi_s - g^*_{rs}\,\varphi_n)\,,$$

sau încă, pentru simbolii de speța a doua:

$$(12) \qquad {}^*\Gamma^k_{sr} = \frac{1}{2}\,g^{*kn}\left(\frac{\partial g^*_{sn}}{\partial x^r} + \frac{\partial g^*_{rn}}{\partial x^s} - \frac{\partial g^*_{sr}}{\partial x^n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(g^{*k}{}_s\,\varphi_r + g^{*k}{}_r\,\varphi_s - g^{*kn}\,\varphi_n)\,.$$

Aceste expresii fuzionează componentele conexiunii afine cu componentele conexiunii metrice. Este evident că simbolii precedenți *nu sunt componente tensoriale.* Vom numi expresiile (11) și (12) „simbolii lui CHRISTOFFEL generalizați". Ei se bucură de proprietatea de simetrie în indicii inferiori.

Observăm că pentru o schimbare a etalonului, după relațiile (2), rezultă, prin simple reduceri evidente, din (11),

$$(13) \qquad ({}^*\Gamma_{n,\,sr})' = \lambda\,{}^*\Gamma_{n,\,sr}\,,$$

unde am însemnat cu accent ceeace devine mărimea respectivă după substituirea valorilor (2).

Cum, geometria unui spațiu se reduce, în definitiv, la cău-

tarea invarianților multiplicității respective, este evident, că în spațiile lui WEYL, va trebui să căutăm nu numai invarianții față de transformările de variabile, ci și pe aceia care sunt totodată invarianți față de schimbarea etalonului.

In acest scop, este necesară generalizarea noțiunii de tensor: numim tensor într'un W_N, un sistem de funcții de poziție care posedă toate proprietățile componentelor contravariante, mixte și covariante ale tensorilor într'un spațiu riemannian, — dar care suferă o multiplicare cu factorul λ^p (unde λ este coeficientul de etalonaj, iar p este un număr întreg pozitiv, negativ sau nul, numit „greutatea" tensorului) când se schimbă etalonajul după relațiile (2).

Mărimile care nu se schimbă prin schimbarea etalonajului, vor fi numite *invariante la etalonaj*; mărimile care, prin schimbarea etalonului, se înmulțesc cu o putere λ^p (unde p este un număr pozitiv sau negativ, diferit de zero), vor fi numite *coinvariante;* mărimile invariante atât pentru transformări de variabile cât și la schimbarea etalonului, vor fi numite *invarianți absoluți.*

Ca exemplu, observăm, după relația (13), că simbolii generalizați de speța întâia sunt coinvarianți.

Pentru desvoltarea calculului tensorial într'un W_N este necesar să definim, mai întâi, *operația de „ridicare" și „coborîre" a indicilor:* prin definiție, într'un W_N, putem trece de la componentele contravariante (resp. covariante) ale unui vector, la componentele covariante (resp. contravariante) ale aceluiaș vector, prin aplicarea operației de coborîre (resp. ridicare) a indicilor:

$$u^r = g^{*kr}\, u_k\,; \quad u_k = g^*_{kr}\, u^r\,.$$

Odată definită această operație, rezultă imediat că simbolii lui CHRISTOFFEL generalizați de speța întâia și a doua se deduc unii din alții prin numita operație, așa cum s'a anticipat formal în expresiile (11) și (12). Observăm apoi, că simbolii de speța a doua sunt mărimi invariante la schimbarea etalonului, — fără a fi însă invarianți absoluți. In adevăr, înmulțind relația (13) cu

$$(g^{*kn})' = \frac{1}{\lambda}\, g^{*kn},$$

obținem

$$({}^*\Gamma^k_{sr})' = {}^*\Gamma^k_{sr}\,.$$

Acestea fiind stabilite, suntem în măsură să construim ten-

sorul de curbură vectorială, al lui RIEMAN-CRISTOFFEL generalizat (§ 250), cu ajutorul expresiilor (12):

$$(14) \qquad {}^{*}R^{k}{}_{rns} = \frac{\partial {}^{*}\Gamma^{k}{}_{rs}}{\partial x_n} - \frac{\partial {}^{*}\Gamma^{k}{}_{rn}}{\partial x^s} + {}^{*}\Gamma^{m}{}_{rs}\,{}^{*}\Gamma^{k}{}_{mn} - {}^{*}\Gamma^{m}{}_{rn}\,{}^{*}\Gamma^{k}{}_{ms},$$

cu proprietățile evidente de antisimetrie și simetrie ciclică:

$${}^{*}R^{k}{}_{rns} = - {}^{*}R^{k}{}_{rsn};$$

$${}^{*}R^{k}{}_{rns} + {}^{*}R^{k}{}_{nsr} + {}^{*}R^{k}{}_{srn} = 0.$$

Acest tensor este invariant la etalonaj, întrucât simbolii generalizați, din care este compus, se bucură de această proprietate. Forma explicită a tensorului de curbură vectorială se obține, înlocuind în (14) expresiile (12) și grupând convenabil termenii. Insemnând cu

$$\varphi_{mn} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x^n} - \left\{ \begin{matrix} m\ n \\ \alpha \end{matrix} \right\} \varphi_\alpha; \quad \varphi^{m}{}_{n} = \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^n} + \left\{ \begin{matrix} m\ \alpha \\ n \end{matrix} \right\} \varphi^\alpha;$$

$$\varphi^m = g^{*rm}\,\varphi_r;$$

obținem

$$(15) \qquad {}^{*}R^{k}{}_{rns} = R^{k}{}_{rns} + g^{*k}{}_{r}\,f_{ns} + ({}^{*}g^{k}{}_{n}\,\varphi_{rs} - g^{*k}{}_{s}\,\varphi_{rn}) +$$
$$+ (g^{*}{}_{rs}\,\varphi^{k}{}_{n} - g^{*}{}_{rn}\,\varphi^{k}{}_{s}) + (g^{*k}{}_{n}\,\varphi_r - g^{*k}{}_{s}\,\varphi_n) +$$
$$+ (g^{*k}{}_{s}\,g^{*}{}_{rn} - g^{*k}{}_{n}\,g^{*}{}_{rs})\,\varphi_\alpha\,\varphi^\alpha + (g^{*}{}_{rs}\,\varphi_n - g^{*}{}_{rn}\,\varphi_s)\,\varphi^k.$$

Prin coborîrea indicelui, deducem tensorul coinvariant

$${}^{*}R_{mrns} = g^{*}{}_{mk}\,{}^{*}R^{k}{}_{rns};$$

cu proprietățile de antisimetrie și simetrie ciclică

$${}^{*}R_{mrns} = - {}^{*}R_{mrsn};$$

$${}^{*}R_{mrns} + {}^{*}R_{mnsr} + {}^{*}R_{msrn} = 0.$$

Este clar că, după formula (15), tensorul ${}^{*}R_{mrns}$ nu mai este în general, antisimetric în primii doi indici (m, r) cum este cazul cu tensorul riemannian obicinuit, din cauza termenilor suplimentari cari conțin funcțiile φ_m.

Din (15) putem forma *tensorul simetric prin raport cu primii doi indici:*

$$(16) \qquad f_{mrns} = \frac{1}{2}\,({}^{*}R_{mrns} + {}^{*}R_{rmns});$$

și *tensorul antisimetric prin raport cu primii doi indici:*

$$(17) \qquad F_{mrns} = \frac{1}{2}\,(^*R_{mrns} - {}^*R_{rmns}) \,.$$

Acest ultim tensor, însă, nu satisface proprietății de simetrie ciclică, în general, din cauză că $^*R_{mrns}$ au este, în general, antisimetric în primii doi indici.

Din (16) și (17) rezultă

$$(18) \qquad {}^*R_{mrns} = F_{mrns} + f_{mrns} \,.$$

Tensorul generalizat al lui RICCI-EINSTEIN se deduce din (14) prin contracție

$$^*R_{ns} = {}^*R^r{}_{rns} \,,$$

mărime invariantă la schimbarea etalonului. Din (15), obținem prin contracție ($r = k$):

$$(19) \quad {}^*R_{ns} = R_{ns} - 2f_{ns} - (\varphi_{ns} + \varphi_{sn}) - g^*{}_{ns}\,\varphi^m{}_m - 2\varphi_n\,\varphi_s + \\ + 2g^*{}_{ns}\,\varphi_m\,\varphi^m \,.$$

Inmulțind apoi cu g^{*kn} și contractând, rezultă coinvariantul (de greutate — 2):

$$(20) \qquad {}^*R = {}^*R_{ns}\,{}^*R^{ns} = R - 6\,(\varphi^m{}_m - \varphi_m\,\varphi^m) \,.$$

272. Relație între tensorul de curbură vectorială și tensorul de curbură segmentară.

Integrând ecuația (8) dealungul unui circuit închis și procedând întocmai ca la § 268, deducem, pentru variația componentelor contravariante ale unui vector, prin deplasare paralelă,

$$(21) \qquad \Delta u^k = -\frac{1}{4}\,{}^*R^k{}_{rns}\,u^r\,S^{ns} \,,$$

Să exprimăm variația totală a lungimii vectorului $\bar{u}$, pornind de la forma patratică

$$(22) \qquad l^2 = |u|^2 = g^*{}_{mk}\,u^m u^k \,.$$

Avem

$$(23) \qquad l\,.\,\Delta l = g^*{}_{mk}\,u^m\,\Delta u^k \,.$$

întrucât variația totală dealungul unui circuit închis foarte mic a unei funcții scalare f, uniformă, este nulă:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x^r} \oint dx^r \equiv 0 \,.$$

In (22) avem $f = g^*_{mk}$. Inlocuind (21) in (23), deducem

$$l \cdot \Delta l = -\frac{1}{4} g^*_{mk} {}^*R^k_{rns} u^m u^r S^{ns},$$

sau,

$$l \cdot \Delta l = -\frac{1}{4} {}^*R_{mrns} u^m u^r S^{ns}.$$

Ţinând seamă de relaţiile (18), expresia precedentă devine

$$l \cdot \Delta l = -\frac{1}{4} (F_{mrns} + f_{mrns}) u^m u^r S^{ns}. \tag{24}$$

Observăm, apoi, că

$$F_{mrns} u^m u^r S^{ns} = 0, \tag{25}$$

din cauza antisimetriei tensorului F_{mrns} în primii doi indici. Relaţia precedentă exprimă perpendicularitatea vectorilor u^m şi Δu^m. Ea se mai poate scrie

$$F^k_{rns} u_k u^r S^{ns} = 0. \tag{26}$$

Din relaţia precedentă urmează

$$F^r_{rns} = F_{ns} = 0. \tag{27}$$

Revenind la relaţia (24) şi ţinând seamă de egalitatea (25), obţinem

$$l \cdot \Delta l = -\frac{1}{4} f_{mrns} u^m u^r S^{ns}. \tag{28}$$

Pe de altă parte, ecuaţia (7) ne dă

$$l \cdot \Delta l = \frac{1}{8} g^*_{mr} f_{ns} u^m u^r S^{ns},$$

unde f_{ns} este tensorul de curbură segmentară. Comparând cele două relaţii precedente, deducem

$$f_{mrns} = -\frac{1}{2} g^*_{mr} f_{ns}. \tag{29}$$

Prin ridicarea indicelui m, obţinem

$$f^m_{rns} = -\frac{1}{2} \delta^m_r f_{ns}. \tag{30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensorul astfel obținut este remarcabil: el își datorește structura exclusiv tensorului de curbură segmentară, care își are originea în efectul de variație a „lungimii" unui segment, prin deplasare congruentă. Numim $f^{m}{}_{rns}$ *tensor al curburii segmentare.*

278. Curbura de direcție a unui spațiu WEYL. Relația (18) se scrie, prin ridicarea indicelui și având în vedere relația (30):

$$F^{k}{}_{rns} = {}^{*}R^{k}{}_{rns} + \frac{1}{2}\,\delta^{k}{}_{r}\,f_{ns}\,. \tag{31}$$

WEYL numește tensorul $F^{k}{}_{rns}$ *tensor al curburii de direcție.*

Justificarea acestei denumiri rezultă din considerațiile următoare. Să înlocuim în relația (21) care dă variația totală $\Delta\, u^{k}$, tensorul $R^{k}{}_{rns}$ prin valoarea sa scoasă din (31); se obțin doi termeni: unul provenind din $F^{k}{}_{rns}$, care corespunde, ca și în cazul riemannian, numai variației în direcție a vectorului (fără schimbarea lungimii sale); celălalt, provenind din f_{ns} corespunzător exclusiv variației lungimii (fără devierea direcției).

Aceste proprietăți se pun în evidență precum urmează. Din relația (20) § 265, rezultă pentru variația totală a patratului lungimii unui vector

$$\Delta\, l^{2} = -\, l^{2}\,\Delta\,\varphi\,, \tag{32}$$

iar din expresia (22), deducem

$$\Delta\, l^{2} = -\,2\,(u_{k}\,.\,\Delta u^{k})\,.$$

Cele două relații precedente ne dau

$$u_{k}\,.\,\Delta\, u^{k} = -\,\frac{1}{2}\,(u_{k}\,.\,u^{k})\,\Delta\varphi\,,$$

ceeace se poate exprima prin ecuația vectorială

$$\bar{u}\,.\,\Delta\,\bar{u} = \left(\bar{u}\,.\,-\,\frac{1}{2}\,\bar{u}\,\Delta\varphi\right)\,. \tag{33}$$

Prin urmare, produsul scalar dintre vectorul $\bar{u}$ (de componente covariante u_{k}) și vectorul $\Delta\,\bar{u}$ (de componente contravariante $\Delta\, u^{k}$) este egal cu produsul scalar dintre același vector $\bar{u}$ prin vectorul $-\,\frac{1}{2}\,\bar{u}\,\Delta\varphi$. Aceasta înseamnează (§ 29) că vectorul

$\Delta \bar{u}$ diferă de vectorul $-\frac{1}{2}\bar{u}\,\Delta\varphi$, cel mult, printr'un vector $\Delta \bar{u}^*$ perpendicular pe $\bar{u}$:

$$\Delta \bar{u} = \Delta \bar{u}^* - \frac{1}{2}\bar{u}\,\Delta\varphi . \tag{34}$$

Fie un sistem de vectori unitari $\bar{s}_k$. Proiectând ecuația vectorială precedentă pe direcția $\bar{s}_k$, obținem

$$\Delta \bar{u} = \bar{s}_k . \Delta u^k ; \quad \Delta \bar{u}^* = \bar{s}_k . \Delta u^{*k} ; \quad \bar{u} = \bar{s}_k u^k = \bar{s}_k \delta^k_r u^r .$$

In prima din expresiile precedente înlocuim pe Δu^k prin valoarea (21); apoi, prin analogie, punem

$$\Delta u^{*k} = -\frac{1}{4}\Phi^k_{rns} u^r S^{ns} .$$

Observăm că relația (20 § 265), ne dă

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{4} f_{ns} S^{ns} . \tag{35}$$

Inlocuim aceste valori în ecuația (34); rezultă o relație care trebue să fie adevărată oricare ar fi vectorul $\bar{u}$. Se obține, în definitiv,

$$^*R^k_{rns} = \Phi^k_{rns} - \frac{1}{2}\delta^k_r f_{ns} .$$

Comparând această ultimă relație cu (31), rezultă identitatea tensorilor Φ^k_{rns} și F^k_{rns}. Prin urmare, tensorul F^k_{rns} rezultat din formula care dă variația $\Delta \bar{u}^*$, vector perpendicular pe $\bar{u}$, definește curbura de direcție, independentă de etalonaj. Perpendicularitatea vectorilor Δu^{*r} și u_k se exprimă prin condiția

$$F^k_{rns} u^r u_k S^{ns} = 0 ,$$

identică expresiei (25), ceeace era de așteptat.

279. Etalonaj geodezic. Coordonate geodezice într'un spațiu WEYL.

In general, într'un W, nu este posibil să dispunem de coeficientul de etalonaj astfel încât funcțiile φ_k să se anuleze în *toate* punctele spațiului. Totuși formula (2) ne arată că putem, odată

ales coeficientul de etalonaj λ, să anulăm pe φ_k *într'un anumit punct*. Dacă luăm, de pildă, în punctul P funcţia

$$\varphi_k = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \lambda}{\partial x^k},$$

vom avea în P' (şi numai în acest punct) $\varphi'_k = 0$.

Numim etalonajul care satisface acestei condiţii, *etalonaj geodezic în punctul considerat.*

Deasemeni, nu putem dispune de un sistem de coordonate, într'un W, aşa fel încât să anulăm toate componentele conexiunii afine în toate punctele spaţiului. Formulele (7) § 259, ne arată însă că putem face acest lucru într'un anumit punct. Sistemul de coordonate care permite anularea componentelor Γ^k_{rs}, în punctul considerat, se numeşte *sistem geodezic în acel punct.*

Din aceste consideraţii rezultă că, dacă într'un punct determinat alegem un etalonaj geodezic şi în acelaş timp un sistem de coordonate geodezic, vom avea în acel punct

$$\varphi_k = 0\,;\quad \frac{\partial\, g^*_{rk}}{\partial x^s} = 0\,.$$

280. Derivate tensoriale, în sensul lui WEYL. Variaţia patratului lungimii unui vector se scrie, după formula (4),

$$\delta l^2 = -\, l^2 \varphi_r\, dx^r,$$

relaţie adevărată pentru o funcţie scalară oarecare f:

$$\delta f = -\, f \varphi_r\, dx^r\,; \tag{36}$$

sau încă,

$$\frac{\partial f}{\partial x^r} + f\,\varphi_r = 0\,.$$

Ori, această variaţie, prin analogie cu deplasarea paralelă a unui vector, exprimă faptul că derivata covariantă este nulă. Suntem astfel conduşi să identificăm primul membru cu derivata covariantă a funcţiei scalare date

$$^*D_r\, f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^r} + f\,\varphi_r\,. \tag{37}$$

Pentru scalari de greutate p înlocuim φ_r prin $p\varphi_r$ în ultima relaţie.

Să considerăm scalarul dat prin produsul scalar dintre doi vectori; avem, după (36),

$$\delta (v_k u^k) = - (v_k u^k) \varphi_r \delta x^r$$

sau,

$$\delta v_k = {}^*\Gamma^m_{kr} v_m \delta x^r - v_k \varphi_r \delta x^r ,$$

şi deci,

$$\frac{\partial v_k}{\partial x^r} - {}^*\Gamma^m_{kr} v_m + v_k \varphi_r = 0 .$$

Primul membru exprimă derivata covariantă a componentelor v_k:

$$(38) \qquad {}^*D_r (v_k) \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x^r} - {}^*\Gamma^m_{kr} v_m + v_k \varphi_r .$$

In mod analog,

$$(39) \qquad {}^*D_r (u^k) \equiv \frac{\partial u^k}{\partial x^r} + {}^*\Gamma^k_{mr} u^m + u^m \varphi_r .$$

De asemeni,

$$(40) \qquad {}^*D_r (t_{rk}) \equiv \frac{\partial t_{rk}}{\partial x^r} - {}^*\Gamma^m_{rs} t_{mk} - {}^*\Gamma^m_{kr} t_{mr} + t_{rk} \varphi_s .$$

Pentru tensori de greutate p, vom înlocui în relaţiile precedente pe φ_r prin $p\varphi_r$.

Aplicând ultima formulă tensorului metric g^*_{rk} şi substituind valorile (12), găsim

$${}^*D_r (g^*_{rk}) = 0 .$$

In mod analog, se obţine

$${}^*D_r (g^{*k}_r) = 0 \; ; \; {}^*D_r (g^{*rk}) = 0 .$$

Prin urmare, teorema lui RICCI este adevărată şi în spaţiile lui WEYL: *tensorul metric fundamental este staţionar în toate punctele multiplicităţii.*

281. Densităţi invariante într'un W_4 (quadridimensional). Nu se pot găsi relaţii între g^*_{rk} şi φ_r, care să fie funcţii de poziţie în acelaş timp invariante la transformări de variabile şi invariante la etalonaj, deci, invarianţi absoluţi.

Observăm însă că într'o multiplicitate quadridimensională W_4, avem, pentru schimbarea etalonului,

$$(41)\qquad (g^{*}{}_{rk})' = \lambda g^{*}{}_{rk}\ ;\quad (g^{*rk})' = \frac{1}{\lambda}\, g^{*rk}\ ;\quad g' = \lambda^4 g\ .$$

Prin urmare, $\sqrt{|g|}$ are greutatea 2. Dacă se înmulțește această valoare cu un tensor coinvariant de greutate — 2, vom obține *o densitate tensorială* invariantă la etalonaj (știm că este invariantă și la transformări de variabile).

Astfel de densități tensoriale, invariante la etalonaj, deci invarianți absoluți, sunt

$$(42)\qquad {}^{*}R_{mn}\, {}^{*}R^{mn}\sqrt{|g|}\ ;\ f_{mn} f^{mn}\sqrt{|g|}\ ;\ ({}^{*}R)^2\sqrt{|g|}\ ;\ {}^{*}R^{k}{}_{rns}\, {}^{*}R_{k}{}^{rns}\sqrt{|g|}\ .$$

In adevăr, ${}^{*}R_{mn}$ este de greutate zero ; atunci ${}^{*}R^{mn}$ este de greutate — 2 ; etc.

WEYL apreciază numărul invarianților absoluți în spațiul cu patru dimensiuni la cel mult șase. Pentru două dimensiuni, există un singur invariant absolut : ${}^{*}R\sqrt{|g|}$.

Intr'un spațiu cu un număr *impar* de dimensiuni nu se pot construi invarianți absoluți. Aceasta rezultă din faptul că, dacă numărul dimensiunilor este $2n + 1$, mărimea $\sqrt{|g|}$ va avea greutatea $n + \frac{1}{2}$; nu se poate găsi un coinvariant de greutate $-n - \frac{1}{2}$, care să ajute la formarea unui invariant absolut, greutatea fiind un număr întreg.

Dacă Ω este o densitate tensorială, invariantă la etalonaj, atunci

$$\int \Omega\, d\tau\ ,$$

extinsă asupra unui domeniu dat, este un invariant absolut. In adevăr, dx^r sunt numere pure.

Pe lângă invarianții absoluți definiți mai sus cu ajutorul densităților tensoriale, — cari sunt invarianți caracteristici pentru spațiul respectiv, în fiecare punct al său, — putem construi și un invariant absolut particular (prin aceia că este legat de o anumită deplasare u^k) :

$$(43)\qquad {}^{*}R_{mn}\, u^m\, u^n\ .$$

De sigur, s'ar mai putea construi astfel de invarianți absoluți particulari, însă prea complicați ca să prezinte însemnătate.

282. Etalonare naturală. Componentele conexiunii metrice, în sensul lui WEYL, φ_k, introduse prin relația de etalonare (4), nu sunt univoc determinate, ci, cel mult, până la niște funcții φ^*_k alese așa fel încât forma liniară $\varphi^*_k\, dx^k$ să fie o diferențială totală exactă. Această nedeterminare stă, desigur, în legătură cu libertatea de alegere a sistemului de etaionaj, care până acum nu a fost fixat.

O determinare univocă a funcțiilor φ_k necesită alegerea unui anumit sistem de etalonaj, pe care WEYL îl numește *etalonaj natural*. După WEYL, ecuația care definește etalonajul natural este (în spațiul cu patru dimensiuni).

$$^*R = 4\lambda\,, \tag{44}$$

unde λ este o constantă universală. Într'un W_N vom pune

$$^*R = N\lambda\,.$$

Alegerea ecuației (44) drept ecuație de etalonaj natural, nu este întâmplătoare. În adevăr, să presupunem că pentru un etalonaj inițial oarecare, mărimea $^*R$ nu ar fi constantă. Această mărime este însă un coinvariant de greutate — 2. Putem schimba etalonajul astfel încât $^*R$ să devină o constantă. Aceasta e posibil dacă luăm în expresia intervalului elementar „brut", în loc de factorul e, pe $e\,^*R^{1/2}$ drept factor de etalonaj.

Cu valoarea (44), ecuația (20) devine

$$R - 4\lambda = 6\,(\varphi^m{}_m - \varphi_m\,\varphi^m)\,.$$

Pentru un spațiu riemannian de curbură totală constantă $K_0 = 4\lambda$ avem așadar

$$\varphi^m{}_m = \varphi^m\,\varphi_m\,. \tag{45}$$

Această ecuație permite determinarea funcțiilor φ_k univoc. Ea ne va servi mai târziu.

B. Spațiile lui Eddington.

În teoria lui WEYL, expusă mai sus, am admis că variația lungimii unui segment prin deplasare congruentă dela un punct P la un punct P' este *independentă de orientarea* vectorului ale cărui extremități limitează segmentul considerat, depinzând numai de lungimea acestui segment.

A. S. EDDINGTON admite un fel de conexiune metrică,

într'un punct P al multiplicității *afine*, în care *variația lungimii unui segment depinde atât de lungimea segmentului cât și de orientarea lui*, când efectuăm o deplasare din punctul P până într'un punct *infinit vecin* P'. Corespondența între elementele liniare din P și P', în sensul lui EDDINGTON, se definește numai *într'o regiune infinit mică* în jurul punctului P. Cu cât ne depărtăm de acest punct, cu atât corespondența devine mai puțin precisă.

Geometria lui EDDINGTON este o *geometrie a regiunilor elementare*. Deplasarea paralelă, în sensul lui EDDINGTON, ne informează numai asupra structurii elementare a spațiului.

283. Deplasare paralelă. Să aplicăm unui punct $P(x^k)$ o deplasare infinit mică până în punctul $P'(x^k + dx^k)$. *Prin definiție*, mărimea u^k, determinată în P, va suferi, prin deplasare paralelă în P', variația

$$du^k = - \Gamma^k_{mn}\, u^m\, dx^n ; \tag{46}$$

unde cei 64 coeficienți Γ^k_{mn} sunt niște funcții de punct continue și derivabile, însă complet arbitrare (nu-s nici tensori, nici simbolii lui CHRISTOFFEL). Legea paralelogramului pe care o admitem, ne spune că aceste mărimi sunt simetrice

$$\Gamma^k_{mn} = \Gamma^k_{nm} .$$

Câtimile u^m și dx^n din (46) sunt infinit mici.

Numim ecuația (46), *ecuația deplasării paralele*. Procesul de transport paralel al mărimii u^k, din P în P', nu este identic cu noțiunea curentă a deplasării paralele din geometria lui RIEMANN sau WEYL. Sensul relației (46) trebue interpretat astfel: în punctul P există o mărime (de ex. un element liniar) definită prin câtimile u^k; din mulțimea elementelor liniare localizate în P', alegem un anumit element $u^k + du^k$ pe care-l declarăm *echivalent* cu u^k (din P), pe baza relației fundamentale (44).

Asupra procedeului intim, care stabilește această „echivalență" nu precizăm decât că:

1. Echivalența există numai în cazul limită când P și P' sunt infinit vecine. Pentru punctele la distanță finită, echivalența poate fi admisă numai aproximativ, astfel încât, cu cât distanța crește cu atât nedeterminarea ei crește;

2. Alte echivalențe decât cele definite prin deplasarea paralelă (46) nu există ;

3. Nu se poate defini nici o metodă (mecanică sau optică) care să ne permită a stabili o regulă după care să observăm și să măsurăm echivalența.

Prin aceasta, în geometria lui EDDINGTON, noțiunea obicinuită de „conexiune metrică" se înlocuește prin noțiunea, cu mult mai arbitrară, de corespondență descrisă mai sus, pe care autorul ei o numește „echivalență".

Acestea fiind precizate, să deplasăm punctul $P(x^k)$ dealungul unui circuit închis C, infinit mic. Ecuația diferențială a deplasării este, după (46),

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^n} = - \Gamma^k_{mn} u^m . \tag{47}$$

Diferența între valoarea finală a mărimii u^k și valoarea ei inițială, este

$$\delta u^k = \int_C \frac{\partial u^k}{\partial x^n} dx^n = - \int_C \Gamma^k_{mn} u^m dx^n .$$

In virtutea teoremei lui STOKES, putem scrie

$$\delta u^k = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x^r} (\Gamma^k_{mn} u^m) - \frac{\partial}{\partial x^n} (\Gamma^k_{mr} u^m) \right\} d\sigma^{nr},$$

integrala fiind extinsă asupra unei suprafețe, infinit mici, care trece prin curba inițială închisă C.

Integrandul se scrie, ținând seamă de (47),

$$- B^k_{mnr} u^m = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{mr}}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma^k_{mn}}{\partial x^r} + \Gamma^k_{n\alpha} \Gamma^\alpha_{mr} - \Gamma^k_{r\alpha} \Gamma^\alpha_{mn} \right) u^m . \tag{48}$$

Cu această notație, avem

$$\delta u^k = - \frac{1}{2} \int B^k_{mnr} u^m \, d\sigma^{nr}.$$

Această formulă este valabilă numai pentru curbe (și suprafețe) infinit mici, în vecinătatea punctului P. In aceste condiții, punând

$$\int d\sigma^{nr} = S^{nr},$$

rezultă

$$\delta u^k = -\frac{1}{2} B^k{}_{mnr}\, u^m\, S^{nr}. \tag{49}$$

Relaţia precedentă dovedeşte că $B^k{}_{mnr}$ este un tensor de ordinul al patrulea.

Sa poate forma, prin contracţie, tensorul de ordinul al doilea

$$G_{mn} = -B^\alpha{}_{mn\alpha} = \frac{\partial \gamma^\alpha{}_{\alpha m}}{\partial x_n} - \frac{\partial \gamma^\alpha{}_{mn}}{\partial x^\alpha} + \gamma^\alpha{}_{\beta m}\,\gamma^\beta{}_{n\alpha} - \gamma^\alpha{}_{nm}\,\gamma^\beta{}_{\beta\alpha}. \tag{50}$$

Schimbând în (48) indicii k şi m, între ei, şi notând convenabil indicii curenţi, deducem tensorul

$$2F_{mn} = \frac{\partial \gamma^\alpha{}_{m\alpha}}{\partial x^n} - \frac{\partial \gamma^\alpha{}_{n\alpha}}{\partial x^m},$$

sau, făcând notaţia,

$$\gamma_m = \gamma^\alpha{}_{m\alpha}, \tag{51}$$

rezultă

$$2F_{mn} = \frac{\partial \gamma_m}{\partial x^n} - \frac{\partial \gamma_n}{\partial x^m}. \tag{52}$$

După (50), avem deasemeni,

$$G_{mn} - G_{nm} = \frac{\partial \gamma_m}{\partial x^n} - \frac{\partial \gamma_n}{\partial x^m} = 2F_{mn},$$

astfel încât F_{mn} este un tensor de ordinul al doilea antisimetric.

Până acum, întru cât nu am introdus tensorul metric g_{rk}, nu putem aplica operaţia de ridicare şi coborîre a indicilor. Singurele mărimi fundamentale pentru structura invarianţilor multiplicităţii, sunt tensorii $B^k{}_{mnr}$ şi G_{mn}.

După ecuaţia (52) nu se poate afirma că tensorul F_{mn} este rotaţionalul unui vector, deoarece mărimile γ_m nu pot fi identificate cu componentele unui vector. Cum însă F_{mn} este un tensor, avem, dacă trecem la un alt sistem de variabile,

$$2F'_{kr} = 2F_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x^n}{\partial x'^r} = \frac{\partial \gamma_m}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x^n}{\partial x'^r} - \frac{\partial \gamma_n}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x^n}{\partial x'^r}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'^r}\left(\gamma_m \frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\gamma_n \frac{\partial x^n}{\partial x'^r}\right).$$

Să punem

(53) $$\varphi'_m = \varphi_n \frac{\partial x^n}{\partial x'^m}\,;\quad 2\varphi_m = \gamma_m\,;\quad 2\varphi'_m = \gamma_n \frac{\partial x^n}{\partial x'^m}\,.$$

Observăm că mărimea φ'_m se transformă ca și componentele unui vector covariant. Prin urmare,

(54) $$F'_{mn} = \frac{\partial\,\varphi'_m}{\partial\,x^n} - \frac{\partial\,\varphi'_n}{\partial\,x^m}\,,$$

este rotaționalul unui vector φ'_m. Dar, după (52) și (54),

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma'_m}{\partial\,x'^n} - \frac{\partial\,\gamma'_n}{\partial x'^m}\right) = \frac{\partial\,\varphi'_m}{\partial\,x'^n} - \frac{\partial\varphi'_n}{\partial\,x'^m}\,,$$

ecuație, a cărei soluție este

(55) $$\gamma'_m = 2\,\varphi'_m + \frac{\partial\,\Omega}{\partial x'^m}\,,$$

unde φ'_m sunt componentele covariante ale unui vector; cum însă Ω nu este numai decât un invariant, rezultă că γ'_m nu este un vector. Vom determina mai târziu funcția Ω.

284. Introducerea metricei. Lungimea unui interval elementar între două puncte infinit vecine se definește prin forma patratică invariantă

(56) $$ds^2 = g_{rk}\,dx^r\,dx^k\,.$$

In spațiile riemanniene, tensorul g_{rk} are valori determinate prin alegerea unui sistem de măsură (a unui etalonaj), care este independent de direcție și este același în toate punctele,—cu un sens fizic bine determinat.

„In teoria lui WEYL, etalonajul este, în parte, fiziceşte, bine determinat, în parte pur convențional; anume, se presupune că, în același punct lungimile diferit orientate pot fi comparate experimental, prin metode technice sau optice; în schimb, lungimile așezate în puncte diferite nu pot fi comparate între ele prin metode fizice (transport de ceasornice sau rigle); astfel încât, unitatea de lungime este fixată convențional, în fiecare punct. Cred că o astfel de definiție nesatisfăcătoare a „lungimii“ nu este acceptabilă; ci, că lungimile trebuesc considerate fie ca noțiuni pur fizice, fie ca noțiuni convenționale“ (EDDINGTON).

Observația de mai sus, citată din EDDINGTON, l'a condus

pe acest autor să se hotărască pentru noţiunea pur convenţională a „lungimii". aşa fel încât invariantul de lungime ales astfel (convenţional)' să nu contrazică structura fizică a acestei mărimi ; urmând ca, apoi, să se precizeze cum trebue alese mărimile g_{rk} (pentru moment arbitrare) pentru ca lungimea astfel definită, să corespundă noţiunii fizice curente.

In acest sens, presupunem că expresia (56) exprimă noţiunea „convenţională" de lungime ; înţelegând că tensorul simetric $g_{rk} = g_{kr}$ este o mărime absolut arbitrară, care, pentru moment, nu posedă o interpretare fizică.

Lungimea unui vector u^k să fie dată de

$$l^2 = g_{rk}\, u^r\, u^k . \tag{57}$$

Prin deplasarea paralelă a lui u^k, obţinem

$$d(l^2) = \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x_s} u^r u^k + g_{rk}\, u^r \frac{\partial u^k}{\partial x^s} + g_{rk}\, u^k \frac{\partial u^r}{\partial x^s} \right) dx^s$$

$$= \left(\frac{\partial g_{rk}}{dx^s} u^r u^k - g_{rk}\, u^r\, \gamma^k{}_{s\alpha}\, u^\alpha - g_{rk}\, u^k\, \gamma^r{}_{s\alpha}\, u^\alpha \right) dx^s ;$$

sau, după ce schimbăm convenabil ordinea indicilor,

$$d(l^2) = \left(\frac{\partial g_{rk}}{dx^s} - g_{\alpha k}\, \gamma^\alpha{}_{sr} - g_{r\alpha}\, \gamma^\alpha{}_{sk} \right) u^k\, u^r\, dx^s .$$

Introducem regula de „ridicare" şi „coborire" a indicilor :

$$\gamma_{mnr} = g_{\alpha m}\, \gamma^\alpha{}_{nr}$$

Avem astfel,

$$d(l^2) = \left(\frac{\partial g_{rk}}{dx^s} - \gamma_{ksr}\, \gamma_{rsk} \right) u^k\, u^r\, dx^s . \tag{58}$$

Membrul întâi este, evident, un invariant ; paranteza din membrul al doilea va fi, deci, un tensor covariant de ordinul al treilea, simetric în primii doi indici :

$$2\, K_{mnk} = \frac{\partial g_{mn}}{dx^k} - \gamma_{mkn} - \gamma_{nkm} ;$$

$$2\, K_{mkn} = \frac{\partial g_{mk}}{dx^n} - \gamma_{mnk} - \gamma_{knm} ; \tag{59}$$

$$2\, K_{nkm} = \frac{\partial g_{nk}}{gx_m} - \gamma_{nmk} - \gamma_{kmn} .$$

Prin adunare, obținem tensorul

$$(60)\quad -S_{mnk} = K_{mkn} + K_{nkm} - K_{mnk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}\right) - \gamma_{mnk}.$$

Cu aceste notații, simbolii γ se scriu

$$(61)\quad \gamma_{mnk} = \Gamma_{mnk} + S_{mnk}\ ;$$

$$\gamma^k{}_{mn} = \Gamma^k{}_{mn} + S^k{}_{mn}\ ;$$

unde Γ sunt simbolii lui CHRISTOFFEL.

Aceasta ne arată că teoria lui WEYL este un caz particular al teoriei lui EDDINGTON ; în adevăr, expresiile lui WEYL (11) și (12) se obțin din (61) punând

$$(62)\quad S \longrightarrow K_{mnk} = g_{mn}\,\varphi_k\ .$$

285. Calculul tensorilor fundamentali. Să exprimăm, mai întâi, derivata covariantă obicinuită :

$$(63)\quad (S^k{}_{mn})_r = \frac{\partial S^k{}_{mn}}{\partial x^r} - \Gamma^\alpha{}_{mr}\,S^k{}_{\alpha n} - \Gamma^\alpha{}_{nr}\,S^k{}_{m\alpha} + \Gamma^k{}_{\alpha r}\,S^\alpha{}_{mn}\ .$$

Să înlocuim, acum, în expresia (46) valorile (61), ținând seamă de expresia (63) ; avem

$$(64)\quad B^k{}_{mnr} = R^k{}_{mnr} - (S^k{}_{mn})_r + (S^k{}_{mr})_n + S^\alpha{}_{mr}\,S^k{}_{n\alpha} - S^\alpha{}_{mn}\,S^k{}_{r\alpha}.$$

Să punem

$$(65)\quad S^\alpha{}_{m\alpha} = 2\,\varphi_m\ ,$$

notație, pe care o vom justifica mai târziu.

Prin contracție $k = r$, obținem din (64), având în vedere (65);

$$(66)\quad G_{mn} = R_{mn} - (S^\alpha{}_{mn})_\alpha + 2\,\varphi_{mn} + S^\alpha{}_{m\beta}\,S^\beta{}_{n\alpha} - 2\,\varphi_\alpha\,S^\alpha{}_{mn}\ ,$$

unde R_{mn} este tensorul lui RICCI-EINSTEIN.

Prin înmulțire cu g^{mn}, deducem

$$(67)\quad G = R + 2\,K^\alpha{}_\alpha + 2\,\varphi^\alpha{}_\alpha + 4\,\varphi_\alpha\,K^\alpha + S^{\alpha\beta\mu}\,S^\mu{}_{\alpha\beta}\ ;$$

cu notația

$$(68)\quad S^\alpha{}_{\alpha,\,m} = -2\,K_m$$

R fiind invariantul de curbură riemannian.

Singurul termen nesimetric în (66) este $2\,\varphi_{mn}$. Să punem

$$(69)\quad R^*_{mn} = R_{mn} + (\varphi_{mn} + \varphi_{nm}) - (S^\alpha{}_{mn})_\alpha - 2\,\varphi_\alpha\,S^\alpha{}_{mn} + S^\alpha{}_{m\beta}\,S^\beta{}_{n\alpha}\ ;$$

$$F_{mn} = \varphi_{mn} - \varphi_{nm} ; \tag{70}$$

astfel încât rezultă

$$G_{mn} = R^*_{mn} + F_{mn} . \tag{71}$$

Tensorul R^*_{mn} este simetric; tensorul F_{mn} este antisimetric. Este clar că,

$$R^*_{mn} = \frac{1}{2}(G_{mn} + G_{nm}) ;$$

$$F_{mn} = \frac{1}{2}(G_{mn} - G_{nm}) .$$

Să punem apoi,

$$B_{mnrs} = R^*_{mnrs} + F_{mnrs} ; \tag{72}$$

primul tensor din membrul al doilea este antisimetric, iar ultimul este simetric, în indicii (m , n) .

Pe de altă parte, din (61), ţinând seamă de (51), rezultă

$$\gamma_m = \gamma^{\alpha}_{m\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{m\alpha} + S^{\alpha}_{m\alpha} = \frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^m} + 2\varphi_m , \tag{73}$$

ceeace justifică notaţia (65) prin comparaţie cu (55) şi care determină funcţia Ω, introdusă în relaţia (55):

$$\Omega = \log \sqrt{|g|} . \tag{74}$$

Prin aceasta, funcţiile vectoriale φ'_m sunt determinate univoc, prin ecuaţia (55).

286. Etalonare „naturală“ a spaţiului fizic. Tensorul g_{rk}, introdus prin expresia (56) şi lăsat până acum complet arbitrar, trebue ales astfel, — dacă vrem să introducem o etalonare „naturală“ a spaţiului, — încât „lungimea“ unui segment, definită convenţional (geometric) prin (55), respectiv

$$l^2 = g_{rk}\, u^r\, u^k , \tag{75}$$

relaţie invariantă numai faţă de transformări de coordonate, să se identifice cu noţiunea de lungime fizică (invariant absolut), obţinută prin măsurători efectuate, fie pe cale mecanică (cu ajutorul unor rigle), fie pe cale optică (prin semnale luminoase).

Ori, dispozitivele de măsură, pe care, pentru moment să le presupunem mecanice, sunt entităţi fizice aparţinând însuşi spa-

ţiului considerat, ca fiind ele însile o porţiune din acest spaţiu. Prin urmare, etalonarea naturală, a spaţiului aparţine spaţiului însuşi, şi nu poate fi definită decât prin mărimi tensoriale caracteristice acestui spaţiu. O astfel de mărime tensorială potrivită operaţiei de etalonare este tensorul de structură (de ordinul al doilea) G_{rk} (66). Prin urmare, suntem conduşi să definim „lungimea naturală“ prin ecuaţia

$$l^2 = G_{rk}\, u^r\, u^k ;$$

care este singurul invariant absolut (faţă de transformări de variabile şi la schimbarea etalonajului), în spaţiul riemannian cu patru dimensiuni, al Relativităţii generalizate (spaţiul fizic).

După relaţia (71), observând că F_{rk} este antisimetric, rezultă,

$$l^2 = R^*_{rk}\, u^r u^k . \tag{76}$$

„Lungimea convenţională“ exprimată prin (75) se identifică cu lungimea „naturală“ definită prtn (76), dacă.

$$R^*_{rk} = \lambda\, g_{rk} . \tag{77}$$

unde λ este o *constantă* universală, care permite ca în locul unităţii „naturale“ de măsură a lungimii, să se ia raportul ei faţă de unitatea obicinuită (de ex. centimetrul).

La un rezultat interesant ajungem dacă presupunem că măsurarea lungimii s'ar face pe cale optică (prin semnale luminoase). Dint'un punct P, lumina se propagă într'un fascicol conic, a cărui existenţă este independentă de coordonate şi etalonaj şi a cărui ecuaţie trebue să fie deci o relaţie tensorială conţinând tensori caracteristici spaţiului. Singura ecuaţie de această natură (tensorială, de gradul al doilea) este

$$R^*_{rk}\, dx^r\, dx^k = 0 . \tag{78}$$

Comparând această ecuaţie cu ecuaţia „fizică“ :

$$ds^2 = g_{rk}\, dx^r\, dx^k = 0 ,$$

rezultă relaţia

$$R^*_{rk} = \lambda\, (x^r)\, g_{rk} , \tag{79}$$

unde $\lambda\ (x^r)$ poate fi o funcţie pozitivă de coordonate, — ceeace corespunde concepţiei lui WEYL (cupă care, coeficientul de etalonare este, în adevăr, presupus ca fiind o funcţie pozitivă de poziţie). Aceasta era de aşteptat ; în adevăr, în teoria lui WEYL

nu este posibilă transportarea etalonului dintr'un punct P într'un punct P' vecin. Prin urmare, WEYL nu admite posibilitatea măsurării în două puncte deosebite, cu acelaş etalon transportat prin deplasare materială (a unei rigle). Din potrivă, după consideraţiile de mai sus, posibilitatea comparării lungimilor, în două puncte deosebite prin măsurători optice, este admisă în teoria lui WEYL căci ea ne conduce la un coeficient de etalonare, funcţie pozitivă de punct (după 79). Acest rezultat contradictoriu, din teoria lui WEYL, este nesatisfăcător. Această contradicţie se elimină în concepţia lui EDDINGTON, a „etalonării naturale" (materiale sau optice) admiţând că *mărimea* λ *este o constantă universală* (ceeace nu contrazice ecuaţia 79).

Vom constata că ecuaţia etalonajului natural joacă un rol fundamental în teoria relativităţii, generalizate.

Este de observat că din ecuaţia etalonajului natural (77), în sensul lui EDDINGTON, rezultă imediat ecuaţia etalonajului natural propusă de WEYL (44); în adevăr, înmulţind ecuaţia (77) cu g^{rk}, obţinem, pentru un spaţiu cu patru dimensiuni, exact ecuaţia (44).

Deosebirea între arbitrarul implicat în alegerea ecuaţiei (44) şi imperativul rezultat din concepţia lui EDDINGTON întru alegerea ecuaţiei (77), este evidentă.

Observaţie. Ecuaţia (77) este o ecuaţie cu derivate perţiale de ordinul al doilea pentru g_{rk} (coeficienţii τ fiind daţi). Ea permite să subsiste funcţii arbitrarea de varibile în determinarea mărimilor g_{rk}. Aceasta ar părea în contradicţie cu afirmaţia de mai sus. Vom constata însă, în aplicaţia acestei concepţii la teoria relativităţii generalizată, că arbitrarul implicat de problema pur analitică se ridică prin condiţiile la limită. Mai mult, arbitrarul provenit din simetria tensorului R^*_{rk} este înbucurător, căci permite determinarea structurii spaţiului (g_{rk}) fără a fixa un sistem privilegiat de coordonate.

In acest sens, alegerea făcută de EDDINGTON (ecuaţia 77) pentru definirea „etalonării naturale" este, într'adevăr, impusă de spaţiului fizic (al relativităţii generalizate).

TABLA DE MATERIE

CALCULUL VECTORIAL

Vectori în spațiile euclidiene

Pag.

CAP. I.

Mărimi. Numere. Spațiu euclidian. Vectori . . . 1-24

1. Conceptul de „mărime“ 1
2. Conceptul de număr real 6
3. Mărimi extensive 7
4. Punctul de vedere al expunerii de față . . 10
5. Mărimi scalare 13
6. Caracterele spațiului euclidian și conceptelor fundamentale 13
7. Segmente orientate 21
8. Segmente orientate echipolente 22
9. Vector euclidian 22

CAP. II.

Operațiile vectoriale algebrice 25-58

10. Adunarea vectorilor liberi 25
11. Diferența geometrică a doi vectori . . . 27
12. Multiplicarea vectorilor cu un număr . . . 27
13. Propozițiile fundamentale ale calculului vectorial . 28
14. Exprimarea unui vector cu ajutorul versorului său . 29
15. Componenta unui vector pe o direcție orientată . 30
16. Teorema componentelor 31
17. Proiecția unui vector pe o direcție orientată . . 31
18. Descompunerea vectorilor 31
19. Sisteme de referință. Coordonate 33
20. Vectori reprezentați prin diferența a doi vectori de poziție 34

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

21. Vectori numerici. Conexiune cu teoria ecuațiilor liniare 34
22. Reprezentare cartesiană 37
23. Unghiul a doi vectori 39
24. Produsul scalar 39
25. Caracterele generale ale spațiului metric . . 42
26. Produsul vectorial 44
27. Produse mixte de mai mulți vectori . . . 49
28. Vectori reciproci 52
29. Ecuații vectoriale 54

CAP. III.

Vectori legați și vectori alunecători. Momente. Sisteme de vectori 59–88

30. Vectori legați. Vectori alunecători 59
31. Momentul unui vector legat în raport cu un punct 59
32. Proprietățile momentelor 60
33. Momentul unui vector legat sau alunecător în raport cu un ax 61
34. Momentul relativ a doi vectori alunecători . . 62
35. Sisteme de vectori legați și alunecători . . . 63
36. Vector rezultant și moment rezultant . . . 63
37. Teorema lui Varignon 64
38. Momentul rezultant al unui sistem de vectori alunecători în raport cu un ax 64
39. Variația momentului rezultant când se schimbă polul 64
40. Invarianții scalari ai unui sistem de vectori alunecători 64
41. Axa centrală 65
42. Moment minim 67
43. Axa centrală a unui sistem de vectori concurenți . 67
44. Drepte de moment nul 67
44 a. Coordonatele lui Plücker 69
45. Complexe liniare 70
46. Sisteme particulare de vectori 73
47. Operațiile algebrice cu sistemele de vectori legați și alunecători 74
48. Sisteme echivalente de vectori aplicați sau alunecători 76
49. Operații elementare de reducere a unui sistem de vectori 77

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

50. Reducerea unui sistem de vectori la un sistem mai simplu 77
51. Reducerea la un vector rezultant și un cuplu . . 80
52. Sisteme degenerate 81
53. Teoremă: reducerea unui sistem la doi vectori polari 82
54. Sisteme speciale de vectori 83

CAP. IV.

Diferențierea vectorilor. Aplicație la curbe și suprafețe 89-136
A. Derivarea și integrarea funcțiilor vectoriale 89- 98
55. Funcții vectoriale 89
56. Derivarea unui vector variabil 91
57. Desvoltarea în serie Taylor 94
58. Reprezentarea geometrică a derivației 94
59. Proprietăți 95
60. Integrale vectoriale 96
61. Integrale de linie, suprafață și volum 97
B. Câteva proprietăți de-ale curbelor, formulate vectorial 98-108
62. Indicatoarea sferică 98
63. Curbura 99
64. Normala principală 99
65. Planul osculator 100
66. Raza de curbură 101
67. Prima serie de formule Frenet 101
68. Binormala 101
69. Torsiunea. Raza de torsiune 102
70. A doua serie de formule Frenet 103
71. Calculul razei de torsiune 103
72. A treia serie de formule Frenet 104
73. Interpretare geometrică pentru semnul torsiunii . 104
74. Centrul de curbură 106
75. Sfera osculatoare 106
C. Câteva proprietăți de-ale suprafețelor, formulate vectorial 108-136
76. Coordonatele curbilinii ale lui Gauss 108
77. Prima formă patratică fundamentală 109

Scanned with OKEN Scanner

	Pag.
78, Introducerea vectorilor unitari. Elementul liniar	110
78 a. Elementul de arie pe suprafață	113
79. A doua formă fundamentală	114
80. Teoreme privind curbura	115
81. Teorema lui Meusnier	116
82. Indicatoarea lui Dupin. Formula lui Euler	117
83. Curbura totală și curbura medie	120
84. Linii de curbură	121
85. Liniile asimptotice	124
86. Theorema egregium (C. F. Gauss)	125
87. Formele pentru derivate de primul ordin	127
88. Simbolii lui Christoffel	128
89. Formulele lui Gauss pentru derivatele de ordinul al doilea	129
90. Curbura geodezică	131
91. Linii geodezice pe suprafață	134
92. Liniile geodezice sunt linii pentru care curbura geodezică e nulă	135

CAP. V.

Vectorii Electrotechnicii și calculul cu expresiile imaginare	137-148
93. Definiții	137
94. Vectorii Electrotechnicii	139
95. Reprezentarea spațială a operatorului imaginar	141
96. Operatorul complex general	143
97. Calculul valorilor medii pentru câtimi imaginare	146

CAP. VI.

Operații vectoriale diferențiale. Câmpuri	149-218
98. Mărimi de stare	149
99. Noțiunea de câmp	151
100. Suprafețe de nivel. Potențial	152
101. Derivata geometrică a funcției de câmp scalar	152
102. Vectorul gradient. Câmpuri vectoriale	154
103. Definiția gradientului	156
104. Gradient superficial. Suprafețe de discontinuitate	160
105. Considerații asupra câmpurilor vectoriale	162

Scanned with OKEN Scanner

	Pag.
106. Câmpuri irotaționale	164
107. Câmpuri irotaționale în domenii multiplu - conexe	165
108. Introducerea coordonatelor generale	167
109. Gradientul în coordonate generale	172
110. Imagina fizică a câmpului vectorial cu izvoare	177
111. Formula lui Gauss	178
112. Divergența funcției vectoriale	181
113. Operatorul gradient	182
114. Divergența superficială	183
115. Divergența în coordonate generale	183
116. Formulele lui Green	185
117. Completarea imaginii unui câmp cu izvoare	187
118. Funcții de poziție și timp. Derivata substanțială	189
119. Derivata absolută	193
120. Câmpuri raționale	194
121. Rotorul unui vector	195
122. Relația dintre rotor și rotație	196
123. Formula lui Stokes	197
124. Proprietăți	201
125. Operatorul gradient	201
126. Rotorul are un caracter de vector	203
127. Rotorul în coordonate generale	204
128. Rotorul superficial	205
129. Relații importante	206
130. Completarea imaginii fizice a câmpurilor cu vârtejuri	207
131. Teorema lui Helmholtz	208
132. Câmpuri conținând suprafețe de discontinuitate	208
133. Determinarea câmpului de izvoare și vârtejuri	213
134. Derivata substanțială a fluxului și a circulației	216
Probleme recapitulative de calcul vectorial	219-260

Noțiuni de teoria potențialelor.

CAP. I.

Potențialul unei distribuții discrete	261-296
135. Formularea problemei	261
136. Potențialul unei distribuții discrete de izvoare	262
137. Dipol. Quadrupol. Multipol	266

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

138. Potențialul unui multipol 267
139. Desvoltarea lui 1/r în serie de funcții sferice . . 274
140. Polinoamele lui Legendre 277
141. Polinoamele și funcțiile lui Legendre de speța doua 287
142. Polinomii asociați 288
143. Funcțiile sferice sunt funcții armonice . . . 289
144. Considerații analitice asupra desvoltării funcției unui pol 295

CAP. II.

Potențialul de volum 297-340
A. Proprietăți analitice ajutătoare . . . 298-304
145. Teoreme asupra existenței unor integrale de volum 298
B. Formule ajutătoare 305-313
146. Aplicarea formulei lui Green 303
147. Regiuni infinite. Funcții regulate la infinit . . 309
148. Rezumat al proprietăților funcțiilor armonice . . 310
C. Determinarea potențialului de volum . 313-320
149. Formularea analitică a problemei 313
150. Unicitatea soluției 314
151. Principiul lui Dirichlet 315
152. Expresia potențialului de volum 317
153. Observație asupra pozițiilor de maxim și minim . 319
154. Fire și membrane materiale 319
D. Aplicații 320-340
155. Potențialul unui cerc 320
156. Potențialul unui segment de dreaptă . . . 322
157. Potențialul unei suprafețe circulare . . . 322
158. Suprafață sferică omogenă 324
159. Sferă plină omogenă 326
160. Elipsoid omogen plin 328
161. Desvoltarea potențialului de volum după funcții sferice 332
162. Aplicație la Geodezie. Teorema lui Clairaut . . 335
163. Aplicație la Astronomie. Maree 339

CAP. III.

Potențialul de pătură simplă și dublă . . 341-368
A. Proprietăți analitice ajutătoare . . . 341-343
164. Teoreme asupra suprafețelor 341

Scanned with OKEN Scanner

	Pag.
B. Expresiile potențialelor de pătură simplă și dublă	343-347
165. Potențialul de pătură simplă și dublă . . .	343
C. Proprietățile funcției potențiale a păturii simple	347-352
166. Potențialul de pătură simplă	347
D. Proprietățile funcției potențiale de pătură dublă	352-362
167. Potențialul de pătură dublă	352
168. Potențialul de pătură dublă uniformă . . .	359
169. Formula lui Biot și Savart	361
E. Aplicații	362-368
170. Familie infinită de suprafețe potențiale. Condiția lui Lamé	362
171. Problema electrostatică a conductorului electric .	364
172. Teorema lui Chasles. Densitatea superficială . .	366

CAP. IV.

Metoda imaginilor electrice . . .	369-376
173. Imagini electrice	369
174. Serii infinite de imagini	371
175. Transformările lui Lord Kelvin	372
176. Transformarea funcțiilor armonice	372
177. Integrala lui Poisson	373

CAP. V.

Potențialul logaritmic	377-386
178. Potențialul unui cilindru circular omogen, infinit	377
179. Proprietăți	378
180. Potențialul logaritmic de pătură simplă și dublă	380
181. Formula lui Green în plan	382
182. Cazul funcțiilor armonice	383
183. Integrala lui Poisson în cazul problemei plane	384
184. Aplicație la seria lui Fourier	385

CAP. VI.

Introducere în ecuațiile Fizicii matematice .	387-420
185. O soluție generală a ecuației lui Laplace .	388
186. Soluții exprimate prin funcțiile lui Legendre .	390
187. Soluție exprimată prin funcții sferice . .	391
188. Soluții exprimate prin funcțiile lui Bessel .	392

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

189. Considerații asupra ecuației undelor 393
190. Ecuația diferențială a coardei vibrante, omogenă . 396
191. Ecuația membranei omogene elastice 399
192. Problema lui Sturm – Liouville. Valori proprii . 400
193. Principiul lui Huygens. Ecuația lui Kirschhoff . 406
194. Ecuația telegrafistului 409
195. Ecuația propagării căldurii 413
196. Ecuația Mecanicii ondulatorii 418
Probleme recapitulative de teoria potențialelor 421-438

Elemente de calcul tensorial.

CAP. I.

Exemple introductive 439-448
197. Tensiunile într'un solid diformabil (Elasticitate) . 439
198. Forțe elastice și forțe exterioare în solidul diformabil 442
199. Distribuția tensiunilor într'un mediu diformabil . 443
200. Tensorul moment de inerție 445
201. Caracterul esențial al tensorului de ordinul al doilea 446

CAP. II.

Forme liniare, biliniare și patratice . . . 449-469
A. Forme și substituții liniare 449-452
202. Forme liniare 449
203. Substituții liniare 450
204. Substituții ortogonale 452
B. Forme bilîniare și forme patratice . . . 452-459
205. Forme biliniare 452
206. Forme patratice 454
207. Descompunerea unei forme patratice în sume de forme liniare 455
208. Forme patratice cu coeficienți reali 456
209. Legea inerției formelor patratice 457
210. Forma polară a unei forme patratice 457
211. Forma adjunctă a unei forme patratice . . . 458
212. Transformare prin substituție liniară . . . 458
C. Interpretare geometrică 459-469
213. Multiplicități liniare 459

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

214. Transformări liniare 460
215. Contragredienţă. Cogredienţă. Contravarianţă. Covarianţă 460
216. Reducerea la formă canonică 463
217. Numere caracteristice. Valori proprii. Ecuaţia seculară 465
218. Reducerea simultană a două forme patratice . . 466
219. Transformări generale 467
220. Funcţii de punct 467
221. Transformări de axe curbilinii 468

CAP. III.

Tensori în spaţiile euclidiene . . . 470-480
A. Definiţia generală a noţiunii de tensor . 470-474
222. Tensor de primul ordin 470
223. Inversarea formulelor precedente 471
224. Invariant scalar 472
225. Tensor de ordin oarecare 472
226. Tensori simetrici şi antisimetrici 474
B. Algebră tensorială 474-480
227. Operaţii algebrice 474
228. Aplicaţie: forţă, viteză, impuls 476
229. Tensori formaţi cu produse de vectori . . . 476
230. Pseudoscalari 477
231. Densităţi şi capacităţi tensoriale 478
232. Elementul de volum 479

CAP. IV.

Tensorul metric fundamental 481-487
233. Forma patratică fundamentală 487
234. Tensorul fundamental de ordinul al doilea . . 482
235. Operaţia de ridicare şi coborâre a unui indice. Tensori asociaţi 483
236. Linii geodezice 484
237. Proprietăţile simbolilor lui Christoffel . . . 486

CAP. V.

Analiza tensorială în spaţii euclidiene cu n dimensiuni 488-517
238. Câmp de tensori 488

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

239. Derivata covariantă a tensorului de primul ordin . 489
240. Derivata covariantă a unui tensor de ordin oarecare 490
241. Proprietăți ale derivatei covariante 491
242. Derivata contravariantă 493
243. Deplasarea paralelă a unui vector 492
244. Formule necesare privind vectorul fundamental . 497
245. Divergența unui tensor 498
246. Derivatele covariante ale pseudotensorilor . . 502
247. Tensorul lui Riemann - Christoffel 506
248. Proprietățile tensorului lui R.-Chr. . . . 508
249. Tensorul contractat al lui Ricci-Einstein . . . 510
250. Invariantul de curbură 511
251. Identitățile lui Bianchi 511
252. Interpretarea geometrică a tensorului de curbură . 512
253. Curbura spațiului 514

CAP. VI.

Tensori în spațiile lui Riemann . . 518-563
254. Considerații generale 518
255. Noțiunea de spațiu riemannian 519
256. Continuu amorf. Noțiunea generală de tensor . 522
257. Multiplicitate cu conexiune afină. Deplasare paralelă 523
258. Deplasarea paralelă a unui vector covariant . . 526
259. Linii geodezice 526
260. Curbura unei multiplicități afine 527
261. Multiplicitate metrică. Spațiu metric . . . 528
262. Transportul metrului. Invarianța etalonului . . 530
263. Proprietăți 534
264. Calculul variației totale a unui vector, prin deplasare paralelă pe un contur închis, foarte mic, într'un spațiu riemannian 536
265. Curbura unui spațiu riemannian 538
266. Curbura riemanniană într'o direcție dată . . 539
267. Transportul unui pseudotensor de-alungul unui circuit închis 540
268. Coordonatele normale ale lui Riemann . . . 541
269. Forma de curbură 543

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

270. Spaţiul riemannian R_m ca o varietate neliniară într'un E_n euclidian 545
271. Aplicaţii la teoria suprafeţelor 549

CAP. VII.

Spaţiile lui H. Weyl şi A. S. Eddington . . 564
A. Spaţiile lui Weyl
272. Metrica etalonată 564
273. Spaţiul lui Weyl 566
274. Relaţii între tensorul de curbură vectorială şi tensorul de curbură segmentară 570
275. Curbura de direcţie a unui spaţiu Weyl . . 572
276. Etalonaj geodezic. Coordonate geodezice într'un spaţiu Weyl 573
277. Derivate tensoriale în sensul lui Weyl . . . 574
278. Densităţi invariante într'un W_4 575
279. Etalonare naturală 577
B. Spaţiile lui Eddington 577
280. Deplasare paralelă 578
281. Introducerea metricei 581
282. Calculul tensorilor fundamentali 583
283. Etalonare „naturală“ a spaţiului fizic . . . 584

Scanned with OKEN Scanner

ERATĂ

Pag. 3, rândul 9 de sus în jos, se va citi: „. . . unui element *dat* al clasei".

Pag. 6, rândul 9 de sus în jos, se va citi: „. . . cu mărimea *nenulă* U".

Pag. 8, rândul 2 de sus în jos, se va citi: „. . . *nenule* $u_1, u_2, \ldots$".

Pag. 14, rândul 2 de jos în sus, se va citi: „. . . congruentă *care* păstrează" . . .

Pag. 17, rândul 17 de sus în jos, se va citi: „. . . dacă $x_i < 0$".

Pag. 55, rândul 12 de jos în sus, se va citi: „. . . care determină pe $\bar{x}$ până la" . . .

Pag. 108, rândul 2 de sus în jos, se va citi: „curbelor plane torsiunea nulă $(\tau^{-1} = 0)$".

Pag. 108, rândul 17 de sus în jos, se va citi: „. . . reali, *de* argument" . . .

Pag. 115, formulele din rândurile 4, 9, 13, se vor numerota cu (83), (84), (85).

Pag. 118, formulele (94) se vor scrie:

$$(94) \qquad G_{11} = \frac{r}{\sqrt{g}}\,;\; G_{12} = \frac{s}{\sqrt{g}}\,;\; G_{22} = \frac{t}{\sqrt{g}}\,.$$

In § 87 (pag. 125–127) se va înlocui în formule, peste tot, g^2 prin g și g^4 prin g^2.

Pag. 149, în loc de Cap. V, se va scrie Cap. VI.

Pag. 150, rândul 7 de sus în jos, se va citi: „. . . reductibilă C_r".

Rog pe cititor a rectifica erorile neînsemnate și a-mi comunica eventualele erori strecurate și neobservate.

I. Plăcinteanu

Scanned with OKEN Scanner

ERATĂ

Pag. 3, rândul 9 de sus în jos, se va citi: „ . . . unui element *dat* al clasei".

Pag. 6, rândul 9 de sus în jos, se va citi: „ . . . cu mărimea *nenulă* U".

Pag. 8, rândul 2 de sus în jos se va citi: „ . . . *nenule* u_1, u_2, . . .".

Pag. 14, rândul 2 de jos în sus, se va citi: „ . . . congruentă *care* păstrează" . . .

Pag. 17, rândul 17 de sus în jos, se va citi: „ . . . dacă $x_i < 0$".

Pag. 55, rândul 12 de jos în sus, se va citi: „ . . . care determină pe x până la".

Pag. 108, rândul 2 de sus în jos, se va citi: „curbelor plane torsiunea nulă $(\tau^{-1} = 0)$".

Pag. 108, rândul 17 de sus în jos, se va citi: „ . . . reali, *de* argument".

Pag. 115, formulele din rândurile 4, 9, 13, se vor numerota cu (83), (84), (85).

Pag. 118, formulele (94) se vor scrie:

$$(94) \qquad G_{11} = \frac{r}{\sqrt{g}}\,;\; G_{12} = \frac{s}{\sqrt{g}}\,;\; G_{22} = \frac{t}{\sqrt{g}}\,.$$

In § 87 (pag. 125-127) se va înlocui în formule, peste tot, g^2 prin g și g^4 prin g^2.

Pag. 149, în loc de Cap. V, se va scrie Cap. VI.

Pag. 150, rândul 7 de sus în jos, se va citi: „ . . . reductibilă C_r".

In § *265* (pg. 530); § *275* (pg. 564); § *277* (pg. 570); § *278* (pg. 578) și la pg. 547 se vor înlocui toți: 1 (cari se confundă cu cifra 1) prin *l* (cursiv), în formule.

Eroarea survenită în numerotarea paragrafelor, nefiind dăunătoare înțelegerii și referințelor din text, nu am crezut necesar să procedez la rectificare prin Erată.

Rog pe cititor a corecta și a-mi comunica alte eventuale erori strecurate și neobservate.

I. Plăcințeanu

Scanned with OKEN Scanner